2. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА НА ТЕМУ: «СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С МНОГОКРАТНЫМИ НЕЗАВИСИМЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ»

Вариант № 8

6.4083, 6.3929, 6.4048, 6.3996, 6.3917, 6.3848, 6.4044, 6.4006, 6.4056, 6.3899,
6.3974, 6.4031, 6.4088, 6.3930, 6.4063, 6.3934, 6.4009, 6.4153, 6.3952, 6.4101,
6.3942, 6.3970, 6.4002, 6.3979, 6.4075, 6.4040, 6.3990, 6.4022, 6.3959, 6.3984,
6.3999, 6.4015, 6.4027, 6.4040, 6.4051, 6.3888, 6.4018.

2.2. Порядок выполнения контрольной работы

2.2.1. Задание

Номер варианта контрольной работы студент определяет по своему номеру в списке группы. В соответствии с номером варианта получает задание в виде выборки результатов отдельных наблюдений (см. Прил. А).

2.2.2. Алгоритм статистической обработки

При статистической *обработке результатов наблюдений* выполняют следующие операции.

• Исключение известных *систематических погрешностей* из результатов наблюдений.

Систематические погрешности исключают путем:

– ликвидации источников погрешностей до начала измерения;

– исключения погрешностей в процессе измерения способами замещения, компенсации погрешности по знаку, противопоставления, симметрических наблюдений;

– внесения вычисленных поправок в результат измерения.

Результат *наблюдений*, в который введены поправки с целью устранения систематических погрешностей, считается *исправленным.*

• Вычисление:

а) *среднего арифметического* (*центра распределения погрешностей*) исправленных результатов наблюдений, принимаемого за *результат измерения;*

б) ***оценки*** среднеквадратического отклонения *результата наблюдения и измерения*;

в) ***доверительных границ*** случайной составляющей погрешности результата измерения (при этом проверяют гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат *нормальному распределению*).

Оценка математического ожидания

Наиболее эффективной оценкой центра распределения погрешностей (математического ожидания) для распределения погрешностей, близких к нормальному закону, является среднее арифметическое $\bar{x}$.

Несмещённой, состоятельной, эффективной *оценкой* $\bar{x}$ для генерального среднего m нормального распределения является выборочное среднее, определяемое по формуле [5. с. 17–24, с. 37–38]

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2}$$

где x_1; x_2 ....; x_n – значения случайной величины; n – число наблюдений.

Оценка среднеквадратического отклонения результата наблюдения

При значениях объёма выборок $n \geq 20$ несмещенную *оценку* S для среднеквадратического отклонения σ определяют по формуле

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{3}$$

Оценка среднеквадратического отклонения результата измерения

Оценку среднеквадратического отклонения *результата измерения* $S(\bar{x})$оценивают по формуле

$$S(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \tag{4}$$

где $S(\bar{x})$ – оценка среднеквадратического отклонения результата измерения; $\bar{x}$ – результат измерения (среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений); x_i – i-й результат наблюдений.

Отбраковка грубых и аномальных результатов наблюдений

Отбраковка грубых и аномальных результатов проводится с целью исключения их из дальнейшей обработки. Если эти результаты не являются промахами, то необходимо подвергнуть результаты статистическому анализу.

Существуют различные критерии отбраковки. Наиболее часто употребляемый критерий основан на использовании значений интеграла вероятности

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp(-\frac{t^2}{2}) dt, \tag{5}$$

т.е. на предположении, что результаты измерений распределены по нормальному закону.

Порядок действий по этому критерию следующий [5, с. 22–23].

По формулам (2) и (3) определяют оценки математического ожидания x и среднеквадратического отклонения S; для сомнительного результата x_c вычисляют величину

$$Z_c = \frac{\left| x_c - \overline{x} \right|}{S}, \tag{6}$$

по таблице интеграла вероятности (см. Прил. В, табл. 1) находят значение $\Phi(z_c)$, если величина $2\Phi(z_c)$ близка к единице, то результат считается грубым и может быть отброшен. После его исключения из выборки вычисления повторяются.

Частным случаем рассмотренного критерия является широко применяемое правило «трех сигм», в соответствии с которым погрешность $\left| x_c - \overline{x}, \right|$ считается грубой, если она превосходит $3S$.

Преобразование выборки в вариационный ряд, построение гистограммы, полигона и эмпирической функции распределения

Для определения эмпирического закона распределения от вариационного ряда переходят к статистическому или интервальному ряду, для чего вариационный ряд разбивают на N интервалов: I_1 от $x^{(0)}$ до $x^{(1)}$, I_2 от $x^{(1)}$ до $x^{(2)}$...., от $x^{(n-1)}$ до $x^{(n)}$. Рекомендуется иметь 10 – 20 интервалов. Интервалы целесообразно принимать равными, хотя это и необязательно. При построении такого ряда принимают, что результаты, попавшие в интервал, имеют одно и то же значение, соответствующее середине интервала

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2}\left(x^{(i-1)} + x^{(i)}\right). \tag{7}$$

Для каждого интервала подсчитываются частости

$$P^*{}_i = \frac{n_i}{n}, \tag{8}$$

где n_i – число результатов в i-м интервале.

От частостей переходят к эмпирической плотности вероятности

$$f^*(\bar{x}_i) = \frac{P_i^*}{I_i}. \tag{9}$$

Полученные результаты оформляют графически. По оси абсцисс x откладываются интервалы I_i и на них, как на основаниях, строятся прямоугольники с высотами $f^*(\bar{x}_i)$. Получается ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, которую называют **гистограммой.** Полная площадь ее, как следует из способа построения, равна 1.

Иногда эмпирическую плотность вероятности отображают с помощью полигона – ломаной линии, отрезки которой последовательно соединяют средние точки интервалов. При необходимости можно построить и ступенчатый график эмпирической функции распределения

$$F^*(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^{i} P_j. \tag{10}$$

После построения гистограммы плотности вероятности или ступенчатого графика функции распределения возникает задача аппроксимации (выравнивания) полученных эмпирических графиков кривой какого-то теоретического распределения. Знание этого распределения необходимо для последующей обработки.

Формулировка и проверка гипотезы о тождественности теоретического и эмпирического законов распределения выборки

Пусть мы аппроксимировали эмпирическую плотность вероятности $f^*(\bar{x}_i)$ теоретической кривой $f(x)$. Между нею и эмпирическим распределением неизбежны расхождения. Возникает вопрос: случайны ли эти расхождения, объясняются ли они только ограниченностью выборки или же они существенны и обусловлены плохим соответствием эмпирического распределения выбранному теоретическому.

Порядок установления математической модели распределения погрешности измерения, который регламентируется МИ 199-79, предполагает накопление статистических данных, их математическую обработку и графическое представление, а также выбор аппроксимирующей теоретической функции для эмпирического распределения погрешностей.

Для проверки правильности выбора аппроксимирующей теоретической функции для эмпирического распределения погрешностей наиболее часто употребляют χ^2-критерий.

Порядок проверки «согласия» по критерию следующий [5. с. 37–38].

1. Находят по выборке из n результатов измерений **оценки** математического ожидания и дисперсии в генеральной совокупности.

2. Диапазон полученных результатов измерений разбивают на N интервалов. Число результатов в интервале должно быть не менее пяти. Обычно используют те же интервалы, что и при определении эмпирического распределения. Но если окажется, что в некоторых интервалах число результатов n_i менее 5, то их следует объединить с соседними.

3. По функциям $f(x)$ или $F(x)$ предполагаемого распределения вычисляют теоретические вероятности p_i попадания результатов в интервалы.

4. Определяют теоретическое число результатов в каждом интервале $n_{i\text{Т}} = np_i$.

5. Вычисляют критерий согласия

$$x^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_j - n_{iT})^2}{n_{iT}}. \tag{11}$$

Как видим, сущность критерия в том, что сравниваются экспериментальные n_iи теоретические $n_{i\text{Т}}$ числа результатов в интервалах.

6. Задаются уровнем значимости α и по таблице χ^2-распределения (см. Прил. В, табл. 2) для заданного уровня значимости и числа степеней свободы $k = N{-}r{-}1$, где r – число параметров предполагаемого распределения, определяемых по выборке (для нормального

закона r = 2), находят критическое значение $X^2 a,k$. Если рассчитанное значение $X^2 < X^2 a,k$, то гипотезу принимают, в противном случае – отвергают.

3. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет по контрольной работе должен содержать

1. Титульный лист.
2. Вариант задания.
3. Решение задачи с приведением формул, примеров расчета, графиков, гистограммы, полигона.

Таблица 1. Значения функции Лапласа

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4813	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4886
3,0	4986									
3,5	4998									
4,0	4999									

Таблица 2. Интегральная функция $\chi^2_{\alpha,к}$ – распределения Пирсона. Значения $\chi^2_{\alpha,к}$ для различных к и Р

к	α = 0,99	α = 0,90	α = 0,70	α = 0,50	α = 0,30	α = 0,20	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,02
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,00	0,02	0,15	0,45	1,07	1,64	2,71	3,84	5,41
2	0,02	0,21	0,71	1,39	2,41	3,22	4,61	5,99	7,82
3	0,11	0,58	1,42	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84
4	0,30	1,06	2,19	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,7
5	0,55	1,61	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	13,4
6	0,87	2,20	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	15,0
7	1,24	2,83	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,6
8	1,65	3,49	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	18,2
9	2,09	4,17	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7
10	2,56	4,86	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2
12	3,57	6,30	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1
14	4,66	7,79	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,9
16	5,81	9,31	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6
18	7,01	10,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3
20	8,26	12,4	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0
22	9,54	14,0	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7
24	10,9	15,7	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3
26	12,2	17,3	21,8	25,3	29,3	31,8	35,6	38,9	42,9
28	13,6	18,9	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4
30	15,0	20,6	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	48,0