Задача 1 (*1 балл*)

По известным значениям z_1 и z_2 найти значения w_a, w_b, w_c

1. $z_1 = 1 - i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{3} + i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{\bar{z}_2}.$

2. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 3 - i;\quad w_a = \bar{z}_1\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_1}{z_2^2},\ w_c = \sqrt[4]{z_1^3}.$

3. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 2 - i\sqrt{3};\quad w_a = \bar{z}_1 z_2,\ w_b = \dfrac{z_1^2}{\bar{z}_2},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^2}.$

4. $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = 1 + 3i;\quad w_a = \bar{z}_1 z_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^4}.$

5. $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = 2 + 2i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{(\bar{z}_1)^2}{z_2},\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_2)^4}.$

6. $z_1 = 7 + i,\ z_2 = 3 - 3i;\quad w_a = \bar{z}_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_1}{z_2},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_2)^2}.$

7. $z_1 = 5 - 5i,\ z_2 = 2 - i;\quad w_a = \bar{z}_1 z_2^2,\ w_b = \left(\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\bar{z}_1}.$

8. $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = 4 - 3i;\quad w_a = z_1 z_2,\ w_b = \frac{\bar{z}_1}{z_2},\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_1)^2}.$

9. $z_1 = 2 - 2i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{3} + 2i;\quad w_a = z_1 z_2^2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^2}.$

10. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3};\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_2}{z_1},\ w_c = \sqrt[5]{z_1^3}.$

11. $z_1 = -4 - 4i,\ z_2 = 3 + 2i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_1)^3}.$

12. $z_1 = -3 + 3i,\ z_2 = 2 + i;\quad w_a = z_2^3,\ w_b = \dfrac{z_1^2}{\bar{z}_2},\ w_c = \sqrt[3]{\bar{z}_1}.$

13. $z_1 = 4 - 3i,\ z_2 = 1 + 7i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt{z_1 z_2}.$

14. $z_1 = 5 - 12i,\ z_2 = 2 + 2i;\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_1}{z_2^2},\ w_c = \sqrt[4]{(\bar{z}_2)^3}.$

15. $z_1 = \dfrac{7 + 24i}{5},\ z_2 = -5 + 5i;\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{z_2}{z_1},\ w_c = \sqrt[3]{\bar{z}_2}.$

16. $z_1 = -3 - 4i,\ z_2 = -4 + 4i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{\dfrac{-\bar{z}_2}{2}}.$

17. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 2\sqrt{3} + 2i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt[3]{z_1 z_2}.$

18. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i,\ z_2 = 3 - 3i\sqrt{3};\quad w_a = \overline{z_1 z_2},\ w_b = \dfrac{z_1^2}{z_2},\ w_c = \sqrt[4]{z_2^2}.$

19. $z_1 = 3\sqrt{3} + 3i,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3};\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{3z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^2}.$

20. $z_1 = -4 - 4i,\ z_2 = 2 + 3i;\quad w_a = \bar{z}_1 z_2^2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_1)^3}.$

21. $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},\ z_2 = \sqrt{8} - i\sqrt{8};\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_2}{z_1},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_2)^2}.$

22. $z_1 = 4 + 3i,\ z_2 = 3 + 4i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{z_1 z_2}.$

23. $z_1 = 7 + 24i,\ z_2 = 24 - 7i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right),\ w_c = \sqrt[5]{\dfrac{z_1}{z_2}}.$

24. $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 1 - 2i;\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\dfrac{z_2}{z_1}}.$

25. $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 1 - 3i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_2}{z_1},\ w_c = \sqrt{z_1\bar{z}_2}.$

26. $z_1 = 7 + i,\ z_2 = 1 + 7i; \quad w_a = z_1 \bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}}.$

27. $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 4 - 2i; \quad w_a = z_1^2 z_2^2,\ w_b = \dfrac{z_1}{z_2},\ w_c = \sqrt[3]{\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}}.$

28. $z_1 = 3 - 4i,\ z_2 = -4 + 3i; \quad w_a = (\bar{z}_1 z_2)^2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt{z_1 z_2}.$

29. $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = 2 - 2i; \quad w_a = z_1 z_2^2,\ w_b = \dfrac{z_1^2}{\bar{z}_2},\ w_c = \sqrt[3]{\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}}.$

30. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 2\sqrt{3} + 2i; \quad w_a = z_1^2 \bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\bar{z}_2}.$

Задача 2 (*1 балл*)

Заштриховать на рисунке область плоскости z, определяемую заданными неравенствами. Границы области, ей принадлежащие, вычертить сплошными линиями, а не принадлежащие — пунктирными.

1. $\begin{cases} |z-1| > 1; \\ |z+1| \geqslant 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} |z-2| > 2; \\ |z-4| \leqslant 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} |z-1| > 2; \\ \operatorname{Re} z < 3; \\ -\pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} |z-2| \leqslant 1; \\ \operatorname{Re} z > 1,5; \\ \operatorname{Im} z \geqslant -0,5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} |z| \geqslant 1; \\ |z+\sqrt{2}| + |z-\sqrt{2}| < 2\sqrt{3}; \\ \operatorname{Im} z > 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} |z-1| \leqslant 1 + \operatorname{Re} z; \\ \operatorname{Re} z < 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} |z+2| - |z-2| \geqslant 2\sqrt{3}; \\ \operatorname{Re} z < 3; \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} |z-2| \leqslant 2; \\ |z-1| > 1; \\ |z-3| \geqslant 1; \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} |z+2| - |z-2| \leqslant 2\sqrt{3}; \\ 0 < \arg z < \pi/6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} |z-i| \geqslant 1 + \operatorname{Im} z > 0; \\ -2 \leqslant \operatorname{Re} z < 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} |z-1-i| < \sqrt{2}; \\ \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \geqslant 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} |z+\sqrt{2}| - |z-\sqrt{2}| < 2; \\ |z-1| \leqslant 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 0 \leqslant |z+\sqrt{2}| - |z-\sqrt{2}| \leqslant 2; \\ |z+\sqrt{3}| + |z-\sqrt{3}| < 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} |z-i| < \operatorname{Im} z + 1; \\ |z+2| + |z-2| \geqslant 2\sqrt{5}; \\ \operatorname{Im} z \leqslant 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} |z+\sqrt{2}| - |z-\sqrt{2}| \leqslant 2; \\ |z-1| < 1 + \operatorname{Re} z; \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} |z-i| \leqslant 1 + \operatorname{Im} z; \\ \arg z \leqslant \pi/4; \\ \operatorname{Im} z \leqslant 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} |z^2-1| \leqslant 1; \\ \operatorname{Re} z > 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} |z-1-i| \geqslant 1; \\ |z-1+i| \geqslant 1; \\ |z-1| < 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} |z-1| > 1 + \operatorname{Re} z; \\ |z+1| + |z-1| \leqslant 2\sqrt{2}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} |z^2-1| \geqslant 1; \\ |z-\sqrt{2}| < 2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} |z-i| < 1 + \operatorname{Im} z; \\ |z+i\sqrt{2}| - |z-i\sqrt{2}| \leqslant 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} |z\bar{z}|^2 > \operatorname{Re}(z^2); \\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/4; \\ |z-1| \leqslant 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} |z-1| \leqslant 1 + \operatorname{Re} z; \\ |z+1| + |z-1| > 2\sqrt{2}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} |z+i\sqrt{5}| - |z-i\sqrt{5}| \leqslant 4; \\ \operatorname{arctg} 2 < \arg z < \pi - \operatorname{arctg} 2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} |z\bar{z}|^2 < Im(z^2); \\ \pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2. \end{cases}$

26. $\{\, |z| - 2 \leqslant \operatorname{Re} z < 2 - |z|.$

27. $\begin{cases} |z+i\sqrt{3}| - |z-i\sqrt{3}| \geqslant 2\sqrt{2}; \\ |z+i\sqrt{3}| + |z-i\sqrt{3}| < 4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} |z-1-i| \leqslant 1; \\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 2; \\ \arg z > \pi/4. \end{cases}$

29. $\begin{cases} |z\bar{z}|^2 \geqslant 2\operatorname{Im}(z^2); \\ |z-1-i| < 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} |z+i\sqrt{3}| + |z-i\sqrt{3}| \geqslant 4; \\ |z| < 2; \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0. \end{cases}$

Задача 3 (*1 балл*)

Вычислить указанные значения функций.

1. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$, $\ln(2-3i)$.

2. $\operatorname{ch}\left(2-\frac{\pi i}{2}\right)$, $e^{2+\frac{\pi i}{3}}$.

3. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2i\right)$, $\ln(3-4i)$.

4. $\operatorname{th}\left(1-\frac{\pi i}{2}\right)$, $e^{-1-\frac{2\pi i}{3}}$.

5. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+i\right)$, $\ln(-3+i)$.

6. $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi i}{4}\right)$, $e^{0,5+\pi i}$.

7. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-i\right)$, $\ln(-2-2i)$.

8. $\operatorname{ch}\left(1+\frac{\pi i}{4}\right)$, $e^{-0,5-\frac{\pi i}{2}}$.

9. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right)$, $\ln(-5+12i)$.

10. $\operatorname{cth}\left(-1+\frac{\pi i}{3}\right)$, $e^{-1+\frac{\pi i}{3}}$.

11. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+3i\right)$, $\ln(-4-3i)$.

12. $\operatorname{sh}\left(2-\frac{\pi i}{2}\right)$, $e^{1-\frac{\pi i}{4}}$.

13. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+2i\right)$, $\ln(-3-3i)$.

14. $\operatorname{sh}\left(2+\frac{\pi i}{4}\right)$, $e^{-0,5+\frac{3\pi i}{4}}$.

15. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+3i\right)$, $\operatorname{Ln}(2-4i)$.

16. $\operatorname{cth}\left(1-\frac{\pi i}{4}\right)$, $e^{0,1+\frac{\pi i}{2}}$.

17. $\sin\left(\frac{\pi}{6}-i\right)$, $\ln(-3+i)$.

18. $\operatorname{ch}\left(2-\frac{\pi i}{6}\right)$, $e^{2(1+i)}$.

19. $\operatorname{th}\left(1+\frac{\pi i}{3}\right)$, $\operatorname{Ln}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$.

20. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2i\right)$, $e^{\frac{\pi(1-i)}{2}}$.

21. $\operatorname{ch}(2-\pi i)$, $\operatorname{Ln}\left(\frac{2-i}{2+i}\right)$.

22. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$, $e^{-(1+2i)\frac{\pi}{2}}$.

23. $\operatorname{sh}\left(\frac{1+\pi i}{2}\right)$, $\ln\left(\frac{1+2i}{-1+2i}\right)$.

24. $\cos\left(\frac{\pi+2i}{2}\right)$, $e^{-1-\frac{3\pi i}{4}}$.

25. $\operatorname{cth}(2-\pi i)$, $\operatorname{Ln}(5-12i)$.

26. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$, $e^{2+\frac{\pi i}{3}}$.

27. $\operatorname{sh}\left(2+\frac{\pi i}{4}\right)$, $\operatorname{Ln}(24-7i)$.

28. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2i\right)$, $e^{-2+\frac{\pi i}{6}}$.

29. $\operatorname{ch}\left(1-\frac{\pi i}{3}\right)$, $\ln(3+4i)$.

30. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-i\right)$, $e^{1,5+\frac{\pi i}{2}}$.

Задача 4 (*1 балл*)

Установить, может ли данная функция служить вещественной или мнимой частью некоторой аналитической функции и, если может, восстановить эту аналитическую функцию. Убедиться в том, что найденная функция аналитична. Ниже через $u(x,y)$ обозначена вещественная часть искомой аналитической функции, а через $v(x,y)$ — мнимая часть.

1. $u(x,y) = \sin y \,\operatorname{ch} x$.

2. $v(x,y) = \cos y \,\operatorname{ch} x$.

3. $v(x,y) = e^x \,\operatorname{ch} y$.

4. $u(x,y) = e^{-x} \sin y$.

5. $v(x,y) = e^y \sin x$.

6. $u(x,y) = e^{-y} \cos x$.

7. $u(x,y) = e^y \,\operatorname{sh} x$.

8. $v(x,y) = \operatorname{sh} y \,\sin x$.

9. $v(x,y) = \operatorname{ch} x \,\operatorname{sh} y$.

10. $u(x,y) = -\operatorname{sh} x \,\sin y$.

11. $u(x,y) = e^{-2x} \sin 2y$.

12. $v(x,y) = \operatorname{sh} 2x \,\cos 2y$.

13. $v(x,y) = \operatorname{ch} 2x \,\cos 2y$.

14. $v(x,y) = \operatorname{sh} 3x \,\sin 3y$.

15. $u(x,y) = e^{2y} \sin 2x$.

16. $v(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$.

17. $u(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

18. $v(x,y) = -\ln(x^2+y^2)$.

19. $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

20. $u(x,y) = \dfrac{y}{(x^2+y^2)}$.

21. $v(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)}$.

22. $v(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

23. $u(x,y) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

24. $u(x,y) = 3x^2y - y^3$.

25. $u(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

26. $v(x,y) = e^{2x} \cos 2y$.

27. $v(x,y) = -e^{x/2} \sin \dfrac{y}{2}$.

28. $u(x,y) = \operatorname{sh} \dfrac{x}{2} \sin \dfrac{y}{2}$.

29. $u(x,y) = e^{x-y}$.

30. $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)

Найти все разложения заданной функции $f(z)$ по степеням $z-a$ и указать области этих разложений.

Замечания. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2.Воспользоваться формулами: $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

1. $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ по степ. $(z-1)$.

2. $f(z) = \frac{z}{z^2-5z+4}$ по степ. $(z-2)$.

3. $f(z) = \frac{z+2}{(z^2+2z+5)^2}$ по степ. $(z+1)$.

4. $f(z) = \frac{\sin z}{z-\pi/4}$ по степ. $(z-\pi/4)$.

5. $f(z) = \frac{z-1}{\sqrt[3]{z^3-3z^2+3z}}$ по степ. $(z-1)$.

6. $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$ по степ. $(z+1)$.

7. $f(z) = \frac{z+4}{(z^3+6z^2+12z)^2}$ по степ. $(z+2)$.

8. $f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{(16-12z+6z^2-z^3)^2}}$ по степ. $(z-2)$.

9. $f(z) = \frac{z}{(z^2-4)^2}$ по степ. $(z-2)$.

10. $f(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$ по степ. (z).

11. $f(z) = \operatorname{arctg} z$ по степ. (z).

12. $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)^3}$ по степ. $(z+1)$.

13. $f(z) = \frac{\cos z}{(z+\pi/4)^2}$ по степ. $(z+\pi/4)$.

14. $f(z) = (z-1)^2 \sin^2\frac{1}{z-1}$ по степ. $(z-1)$.

15. $f(z) = \frac{\sin z}{(z-3\pi/4)^3}$ по степ. $(z-3\pi/4)$.

16. $f(z) = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^3$ по степ. (z).

17. $f(z) = \frac{z}{\sqrt[3]{z^3+3z^2+3z}}$ по степ. $(z+1)$.

18. $f(z) = \frac{z}{(z^2-1)^3}$ по степ. $(z+1)$.

19. $f(z) = \frac{\sqrt[3]{7+3z-3z^2+z^3}}{z-1}$ по степ. $(z-1)$.

20. $f(z) = \frac{1}{z(z^2-4)}$ по степ. $(z+2)$.

21. $f(z) = \frac{\sin^2 z}{(z-\pi/8)^2}$ по степ. $(z-\pi/8)$.

22. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$ по степ. (z).

23. $f(z) = \frac{\cos^2 z}{(z+\pi/8)^2}$ по степ. $(z+\pi/8)$.

24. $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2-4)}$ по степ. (z).

25. $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$ по степ. (z).

26. $f(z) = \frac{1}{z+1}\cos^2\frac{1}{z+1}$ по степ. $(z+1)$.

27. $f(z) = \left(\frac{\cos z}{z}\right)^3$ по степ. (z).

28. $f(z) = \frac{1}{1-z+z^2}$ по степ. (z).

29. $f(z) = \frac{z+2}{(z^3+3z^2+3z)^2}$ по степ. $(z+1)$.

30. $f(z) = \frac{z}{(z^2-2z)^3}$ по степ. $(z-1)$.

Задача 6 (*1 балл*)

Найти все особые точки заданной функции $f(z)$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

1. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}$.

2. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2+\pi^2)^2}$.

3. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^2-\pi^2)^2}$.

4. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+\pi^2)^3}$.

5. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2-\pi^2)^3}$.

6. $f(z) = \dfrac{z^2+4}{(z^2+3z+2)^2}$.

7. $f(z) = \dfrac{(z+1)^2}{(z^2-3z+2)^2}$.

8. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2-\pi^2)^2}$.

9. $f(z) = z^3 e^{-1/z^2}$.

10. $f(z) = z^3 \cos\dfrac{1}{z^2}$.

11. $f(z) = z^5 \sin\dfrac{1}{z^2}$.

12. $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1-z}$.

13. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}\sin\dfrac{1}{z}$.

14. $f(z) = \dfrac{1}{1+z}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

15. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}e^{1/z}$.

16. $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}e^{1/z}$.

17. $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}\sin\dfrac{1}{z}$.

18. $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

19. $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}\cos\dfrac{1}{z}$.

20. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

21. $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}\cos\dfrac{1}{z}$.

22. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}\sin\dfrac{1}{z}$.

23. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z^2)}\cos\dfrac{1}{z}$.

24. $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

25. $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

26. $f(z) = \dfrac{z}{1-z}\sin\dfrac{1}{z}$.

27. $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z)}\cos\dfrac{1}{z}$.

28. $f(z) = \dfrac{1}{1+z}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

29. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

30. $f(z) = \dfrac{z}{1+z}e^{-1/z}$.

Задача 7 (*1 балл*)

Вычислить интеграл.

1. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}, \quad C\colon\ |z+i|=1.$

2. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2-1)^3}, \quad C\colon\ |z-1|=1.$

3. $\oint\limits_C \frac{(z^2+1)}{z^3+1}\,dz, \quad C\colon\ |z|=2.$

4. $\oint\limits_C z^2 e^{-1/z} dz, \quad C\colon\ |z|=1.$

5. $\oint\limits_C z^2 \operatorname{sh}\frac{1}{z}\,dz, \quad C\colon\ |z|=2.$

6. $\oint\limits_C z\,\cos\frac{1}{z}\,dz, \quad C\colon\ |z|=2.$

7. $\oint\limits_C \frac{(z^3+1)\,dz}{(z^2+1)^2}, \quad C\colon\ |z|=2.$

8. $\oint\limits_C \frac{e^z dz}{(z^2-1)^2}, \quad C\colon\ |z+1|=1.$

9. $\oint\limits_C \frac{e^{iz} dz}{z^2+1}, \quad C\colon\ |z|=2.$

10. $\oint\limits_C \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2}, \quad C\colon\ |z-\pi i|=\pi.$

11. $\oint\limits_C \frac{\sin z\,dz}{(z^2-\pi^2/4)^2}, \quad C\colon\ |z-\pi/2|=1.$

12. $\oint\limits_C \frac{\ln z\,dz}{(z^2+1)^2}, \quad C\colon\ |z-i|=0{,}5.$

13. $\oint\limits_C \frac{\ln(z+1)\,dz}{(z^2-1)^2}, \quad C\colon\ |z-1|=1.$

14. $\oint\limits_C \frac{e^{-z} dz}{z(z-1)^3}, \quad C\colon\ |z-1|=2.$

15. $\oint\limits_C \frac{\cos z\,dz}{z^2(z-\pi)^2}, \quad C\colon\ |z-\pi|=4.$

16. $\oint\limits_C \frac{(z+2)^2 e^z \sin\pi z\,dz}{z-2}, \quad C\colon\ |z-2|=1.$

17. $\oint\limits_C \frac{z^3\,dz}{(z+1)^3(z-2)}, \quad C\colon\ |z-2|=2.$

18. $\oint\limits_C \frac{(z^2+1)\,dz}{z^2(z+2)^2}, \quad C\colon\ |z|=1.$

19. $\oint\limits_C \frac{z^3\,dz}{(z-1)^3(z+2)}, \quad C\colon\ |z-1|=2.$

20. $\oint\limits_C \frac{e^{iz} z\,dz}{z^2+1}, \quad C\colon\ |z-i|=1.$

21. $\oint\limits_C \frac{e^{-iz}(1-z^2)\,dz}{1+z^2}, \quad C\colon\ |z+i|=1.$

22. $\oint\limits_C \frac{\operatorname{sh} z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2}, \quad C\colon\ |z-\pi i|=\pi.$

23. $\oint\limits_C \frac{\sin^2 z\ dz}{(z^2-\pi^2/4)^2}, \quad C\colon\ |z+\pi/2|=1.$

24. $\oint\limits_C \frac{\operatorname{tg} z\,dz}{(z-\pi/4)^3}, \quad C\colon\ |z-\pi/4|=0{,}5.$

25. $\oint\limits_C \frac{\operatorname{ch}\pi z\,dz}{(z^2+1)^3}, \quad C\colon\ |z-i|=1.$

26. $\oint\limits_C \frac{\ln(1+z)\,dz}{(z^2-1)^3}, \quad C\colon\ |z-1|=1.$

27. $\oint\limits_C \frac{e^z \ln(z+1)\,dz}{(z-1)^2}, \quad C\colon\ |z-1|=1.$

28. $\oint\limits_C \frac{dz}{(z^4-16)^2}, \quad C\colon\ |z-2i|=2.$

29. $\oint\limits_C \frac{\operatorname{th}(\pi z/4)}{(z^2+1)^2}\,dz, \quad C\colon\ |z-i|=0{,}5.$

30. $\oint\limits_C \frac{e^{iz}\cos z\,dz}{(z-\pi)^3}, \quad C\colon\ |z-\pi|=\pi.$

Задача 8 (*1 балл*)

Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с использованием операционного исчисления.

1. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$

2. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

3. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

4. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1, \\ y' = 4x - y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

5. $\begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = x - 2y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

6. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

7. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -5x - 3y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

8. $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

9. $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, \\ y' = 2x + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

10. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

11. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$

12. $\begin{cases} x' = 2x - 2y + 1, \\ y' = -4x, \end{cases}$ $x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$

13. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1, \\ y' = -\frac{3}{2}x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

14. $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

15. $\begin{cases} x' = 3x + 3y + 2, \\ y' = \frac{5}{2}x - y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

16. $\begin{cases} x' = 2y + 1, \\ y' = 2x + 3, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

17. $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$

18. $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, \\ y' = 4x + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

19. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

20. $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

21. $\begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 1.$

22. $\begin{cases} x' = x + 4y + 2, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

23. $\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$

24. $\begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

25. $\begin{cases} x' = x + 2y + 6, \\ y' = 4x - y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

26. $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 2, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

27. $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 3, \\ y' = 4x + 2, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

28. $\begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

29. $\begin{cases} x' = -2x + 3y + 3, \\ y' = x + 2, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

30. $\begin{cases} x' = x + 2y + 3, \\ y' = 2x - y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

Задача 9 (*1 балл*)

Найти оригиналы следующих изображений.

1. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$.

2. $F(p) = \dfrac{p+2}{(p-1)^2p^2}$.

3. $F(p) = \dfrac{p}{(p-2)(p^2-1)}$.

4. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)^3}$.

5. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}$.

6. $F(p) = \dfrac{2p-1}{p^2-5p+6}$.

7. $F(p) = \dfrac{1}{(p-3)(p^2+1)^2}$.

8. $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

9. $F(p) = \dfrac{p}{(p-4)^2(p^2+1)^2}$.

10. $F(p) = \sin\dfrac{1}{p}$.

11. $F(p) = \dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$.

12. $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)^3(p+3)}$.

13. $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2+4}$.

14. $F(p) = \dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

15. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.

16 $F(p) = \dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$.

17. $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

18. $F(p) = \dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.

19. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

20. $F(p) = \dfrac{6}{p^3-8}$.

21. $F(p) = \dfrac{4}{p^3+8}$.

22. $F(p) = \dfrac{1}{p^5+p^3}$.

23. $F(p) = \dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$.

24. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

25. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+9)p^2}$.

26 $F(p) = \dfrac{p+3}{(p-4)^2(p+1)^2}$.

27. $F(p) = \dfrac{p}{(p+2)(p^2-4)}$.

28. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p-1)^3}$.

29. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p-2)(p^2+9)}$.

30. $F(p) = \dfrac{p+2}{p^2+9}$.