Приложение З.РПД Б2.В.ДВ.2.1(кр)

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ВВЕДЕНИЕ В ОПТИМИЗАЦИЮ

(НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ)

Направление подготовки: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Профиль подготовки: Вычислительные машины, комплексы системы и сети

Уровень высшего образования: бакалавриат

Нормативный срок обучения: 5 лет

Форма обучения: заочная

Смоленск – 2015 г.

Контрольная работа №1

Модели задач оптимизации: формализовать описание задачи оптимизации (заданное в терминологии предметной области) в вид математической модели.

Примеры постановки оптимизационной задачи

Пример 1. Нефтеперерабатывающее предприятие выпускает нефтепродукты четырех видов: дизельное топливо, бензин, смазочные материал и авиационное топливо. Спрос на эти виды продукции не превышает соответственно 14, 30, 10 и 8 тыс. баррелей в день.

Для производства нефтепродуктов используется нефть двух сортов (Н1 и Н2). Стоимость одного барреля нефти Н1 составляет 40 ден.ед., нефти Н2 – 51 ден.ед. В общем объеме нефти, используемой предприятием, нефть Н1 составляет не менее 40%.

Количество нефтепродуктов (в баррелях), получаемых из одного барреля нефти каждого вида, приведено в таблице.

Сорт нефти	Дизельное топливо	Бензин	Смазочные материалы	Авиационное топливо
Н1	0,2	0,25	0,1	0,15
Н2	0,1	0,6	0,15	0,1

Стоимость одного барреля дизельного топлива – 55 ден.ед., бензина – 60 ден.ед., смазочных материалов – 50 ден.ед, авиационного топлива – 70 ден.ед.

Найти, сколько нефти каждого сорта следует переработать, чтобы получить максимальную прибыль от выпуска нефтепродуктов.

В данной задаче необходимо составить план распределения нефти для получения максимальной прибыли от выпуска нефтепродуктов.

Для построения математической модели задачи введем переменные. Обозначим:

x_1 – количество нефти Н1 (в баррелях);

x_2 – количество нефти Н2 (в баррелях).

Составим целевую функцию:

$$E = 1{,}5x_1 + 5x_2 \to \max$$

Здесь:

$1{,}5x_1$ – прибыль от продаж нефтепродуктов, получаемых из нефти вида Н1;

$5x_2$ – прибыль от продаж нефтепродуктов, получаемых из нефти вида Н2.

Необходимо обеспечить максимальную прибыль от выпуска нефтепродуктов, следовательно, целевая функция стремится к максимуму.

Составим все возможные ограничения данной задачи.

Спрос на дизельное топливо, бензин, смазочные материалы, авиационное топливо, не превышает 14, 30, 10 и 8 тыс. баррелей в день. Следовательно, получим следующие ограничения:

$$0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \le 14000;$$

$$0{,}25x_1 + 0{,}6x_2 \le 30000;$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 \le 10000;$$

$$0{,}15x_1 + 0{,}1x_2 \le 8000.$$

Объеме нефти, используемой предприятием, нефть Н1 составляет не менее 40%.

Получим следующее ограничение:

$$0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 \ge 0.$$

Приведем полную математическую модель рассматриваемой задачи:

$$\begin{cases} 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 \geq 0 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \leq 14000 \\ 0{,}25x_1 + 0{,}6x_2 \leq 30000 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 \leq 10000 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}1x_2 \leq 8000 \\ E = 1{,}5x_1 + 5x_2 \to \max \end{cases}$$

В данной задаче переменные по своему физическому смыслу не могут быть отрицательными. Поэтому на них накладывается ограничение неотрицательности.

Пример 2. Производственная задача. Цех может производить стулья и столы. На производство стула идет 5 единиц материала, на производство стола - 20 единиц (футов красного дерева). Стул требует 10 человеко-часов, стол - 15. Имеется 400 единиц материала и 450 человеко-часов. Прибыль при производстве стула - 45 долларов США, при производстве стола - 80 долларов США. Сколько надо сделать стульев и столов, чтобы получить максимальную прибыль?

Обозначим: X_1 - число изготовленных стульев, X_2 - число сделанных столов. Задача оптимизации имеет вид:

$45\,X_1 + 80\,X_2 \to \max$,

$5\,X_1 + 20\,X_2 \leq 400$,

$10\,X_1 + 15\,X_2 \leq 450$,

$X_1 \geq 0$,

$X_2 \geq 0$.

Задание к контрольной работе №1

Формализовать описание задачи оптимизации (заданное в терминологии предметной области) в вид математической модели.

Варианты заданий:

Вариант 1. Для изготовления трех видов изделий *A*, *B* и *C*используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в табл. 1. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Таблица 1

Тип оборудования	Затраты времени (*станко-часы*) на обработку одного изделия каждого вида			Общий фонд рабочего времени оборудования (*часы*)
	A	*B*	*C*	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (руб.)	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Вариант 2. Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в бутылки. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-часов. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 часов. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-часов, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 часов. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготовлять заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Вариант 3. Решить задачу модифицированным симплекс-методом.
Для производства двух видов изделий А и Б используется три типа технологического оборудования. На производство единицы изделия А оборудование первого типа используется а1=4 часов, оборудование второго типа а2=8 часов, а оборудование третьего типа а3=9 часов. На производство единицы изделия Б оборудование первого типа используется б1=7 часов, оборудование второго типа б2=3 часов, а оборудование третьего типа б3=5 часов.
На изготовление этих изделий оборудование первого типа может работать не более чем t1=49 часов, оборудование второго типа не более чем t2=51 часов, оборудование третьего типа не более чем t3=45 часов.
Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет АЛЬФА=6 рублей, а изделия Б – БЕТТА=5 рублей.
Составить план производства изделий А и Б, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Вариант 4. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров - А и В. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2 м2 материала, а для полки типа В - 3 м2 материала. Компания может получить до 1200 м2 материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин машинного времени, а для изготовления одной полки типа В - 30 мин; машину можно использовать 160 час в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 денежных единицы, а от полок типа В - 4 ден. ед., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

Критерии оценивания результатов выполнения контрольной работы 1:

Оценка «Отлично» выставляется в случае, если в результате выполнения работы получена правильная формальная математическая модель задачи.

Оценки «Хорошо» и «Удовлетворительно» выставляются в случае, если в полученной модели присутствуют незначительные недочеты (например, ошибка в знаке в выражениях).

При отсутствии решения задачи или при значительных недочетах в формулировке математической модели выставляется оценка «Неудовлетворительно».

Контрольная работа №2

Найти минимум заданной функции двух переменных при наличии ограничений в виде равенств с использованием метода множителей Лагранжа.

Общая постановка задачи нелинейного программирования и ее решение методом множителей Лагранжа

Если в линейном программировании обязательным является условие, согласно которому целевая функция и все ограничения должны быть представлены в виде линейных зависимостей, то в задачах нелинейного программирования эти зависимости могут быть любого вида.

Общая задача нелинейного программирования имеет вид:

вычислить

$$\max(\min)\ z = f(x_1, x_2, ..., x_n);$$

$$при\ условиях\ \ \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_i,\ i = \overline{1, m}.$$

где z, φ_i - заданные функции;

b_i - действительные числа.

Система ограничений включает в себя условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования, предполагая, что система ограничений содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных и $z = f(x_1, ..., x_n)$ и $\varphi_i(x_1, .., x_n)$ - функции, непрерывные вместе со своими частными производными:

вычислить

$$\max(\min)\ z = f(x_1, x_2, ..., x_n);$$

$$при\ условиях\ \ \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i.$$

Такая задача называется задачей на условный экстремум или классической задачей оптимизации, т.к. поведение независимых переменных ограничено определенными условиями. Пусть выполняется условие $m<n$.

Необходимое условие существования экстремума в точке Если функция $f(x_1,x_2)$ имеет экстремум в точке P_0(a,b), то в этой точке полный дифференциал либо тождественно равен нулю, либо не существует.

Замечание Условие $df(x_1,x_2)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2=0$ равносильно системе 2 равенств: $f'_{x_1}(x_1,x_2)=0,\ f'_{x_2}(x_1,x_2)=0$.

Достаточное условие существования экстремума Пусть $Adx_1^2+2Bdx_1dx_2+Cdx_2^2$ есть второй дифференциал $f(x_1,x_2)$ в ее критической точке $P_0(a,b)$ (Числа $A=f''_{x_1x_1}, B=f''_{x_1x_2}, C=f''_{x_2x_2}$ в точке P_0(a,b)). Если при этом имеет место неравенство $AC-B^2>0$, то функция $f(x_1,x_2)$ имеет в точке $P_0(a,b)$ экстремум: максимум, если A (или C) отрицательно, минимум – если A (или C) положительно.

Условным экстремумом функции $z=f(x_1,...,x_n)$ называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что $x_1,...,x_n$ удовлетворяют дополнительным условиям $\varphi_i(x_1,...,x_n)=b_i$, $i=\overline{1,m}$.

Условный экстремум находят с помощью функции Лагранжа. Для нахождения решения задачи вводят набор переменных $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$, называемых ***множителями Лагранжа:***

1) Составляют функцию Лагранжа

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\lambda_1(b_1-\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)+...+\lambda_m(b_m-\varphi_m(x_1,x_2,...,x_n))$$

Смысл множителей Лагранжа такой же, как и двойственных оценок в задачах линейной оптимизации, т.е. λ_i показывают, на сколько изменится значение функции в оптимальном решении при изменении правой части i-го ограничения на единицу.

2) Находят частные производные $\frac{\partial L}{\partial x_j}(j=\overline{1,n})$ и $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(i=\overline{1,m})$ и рассматривают систему $n+m$ уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}-(\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}+...+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j})=0,(j=\overline{1,n}),\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=b_i-\varphi_i(x_1,...,x_n)=0\,(i=\overline{1,m}).\end{cases}$$

с $n+m$ неизвестными $x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m$. Всякое решение этой системы уравнений определяет точку $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$, в которой может иметь место экстремум функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$. Точка $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ является *укороченной* (так как отсутствуют координаты $\lambda_1,...,\lambda_m$) *подозрительной точкой* локального условного экстремума функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ при условиях $\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i$, $i=\overline{1,m}$. Следовательно, решив систему уравнений, получаем все точки, в которых эта функция может иметь экстремальные значения.

Этапы решения классической задачи оптимизации методом множителей Лагранжа:

1) составляют функцию Лагранжа;
2) находят частные производные от функции Лагранжа и приравнивают их к нулю;
3) решая систему уравнений), находят точки, в которых целевая функция задачи может иметь экстремум;

4) среди точек подозрительных на экстремум, находят такие, в которых достигается экстремум, и вычисляют значения функции $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в этих точках.

Пример. Найти $\max(\min)\ z = 6 - 4x_1 - 3x_2$ при условии $x_1^2 + x_2^2 = 1$

Решение.

1) $L(x_1, x_2, \lambda) = 6 - 4x_1 - 3x_2 + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2)$;

2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -4 - \lambda 2x_1 = 0$,

$\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -3 - \lambda 2x_2 = 0$,

$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$;

3) $\begin{cases} 2\lambda x_1 = -4, \\ 2\lambda x_2 = -3, \\ x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2}{\lambda}, \\ x_2 = \dfrac{-3}{2\lambda}, \\ \dfrac{4}{\lambda^2} + \dfrac{9}{4\lambda^2} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{25}{4\lambda^2} = 1,\ 4\lambda^2 = 25,\ \lambda^2 = \dfrac{25}{4},\ \lambda = \pm\dfrac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{5}{2}, \\ x_1 = \dfrac{-2}{5/2} = -\dfrac{4}{5}, \\ x_2 = \dfrac{-3}{2\dfrac{5}{2}} = -\dfrac{3}{5}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{5}{2}, \\ x_1 = -\dfrac{2}{-\dfrac{5}{2}} = \dfrac{4}{5}, \\ x_2 = -\dfrac{3}{2(-\dfrac{5}{2})} = \dfrac{3}{5}, \end{cases}$$

Итак, $(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{5}{2})$, $(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; -\frac{5}{2})$.

Найдем

$$A = f''_{x_1 x_1} = -2\lambda,$$
$$B = f''_{x_1 x_2} = 0,$$
$$C = f''_{x_2 x_2} = -2\lambda$$

$AC - B^2 = 4\lambda^2 4\lambda^2 > 0$ экстремум существует.

Значение выражения A в точке $(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{5}{2})$ принимает значение меньше нуля – это точка максимума. Значение выражения A в точке $(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; -\frac{5}{2})$ принимает значение больше нуля – это точка минимума.

Значение целевой функции

$$z_{\max} = 6 - 4\frac{-4}{5} - 3\frac{-3}{5} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11,$$

$$z_{\min} = 6 - 4\frac{4}{5} - 3\frac{3}{5} = 6 - 5 = 1.$$

Ответ. $z_{\max} = 11\ (-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5})$, $z_{\min} = 1(\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$

Задание к контрольной работе №2

Найти минимум заданной функции двух переменных при наличии ограничений в виде равенств с использованием метода множителей Лагранжа.

Варианты заданий к контрольным работам 2 и 3

Каждый вариант задания имеет индивидуальную постановку задачи, включающую:

- конкретный вид целевой функции – $f(x_1, x_2)$;
- несколько конкретных ограничений типа неравенств – $g_i\ (x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$.

При выполнении контрольной работы №2 применяются условия ограничений вида:

$g_i\ (x_1, x_2) = 0,\ i = 1,m$

При выполнении контрольной работы №3 применяются ограничения вида:

$g_i\ (x_1, x_2) \le 0$, i = 1,m

вариант № 1

$f(x_1, x_2)$	$g_i\ (x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$3(x_1 - 1)^2 + 9(x_2 - 6)^2$	$x_1 + x_2 - 3$
	$-x_1 - 2$
	$-x_2 - 1$

вариант № 2

$f(x_1, x_2)$	$g_i\ (x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$8(x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 4)^2$	$x_1 + 2x_2 - 8$
	$-x_1 + 2$
	$-x_2 - 1$

вариант № 3

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$5(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2$	$x_1 + 3x_2 - 9$
	$-x_1 + 3$
	$-x_2 - 2$

вариант № 4

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$4(x_1 - 1)^2 + 16(x_2 - 5)^2$	$x_1 + x_2 - 3$
	$-x_1 - 1$
	$-x_2 - 3$

вариант № 5

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$2(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 8)^2$	$x_1 + 2x_2 - 6$
	$-x_1 - 3$
	$-x_2 - 4$

вариант № 6

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$(x_1 - 6)^2 + 4(x_2 - 3)^2$	$3x_1 + x_2 - 6$
	$-x_1 - 2$
	$-x_2 - 1$

вариант № 7

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$3(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 8)^2$	$x_1 + 3x_2 - 6$
	$-x_1 - 1$
	$-x_2 - 2$

вариант № 8

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$2(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2$	$2x_1 + x_2 - 4$
	$-x_1 - 3$
	$-x_2 - 4$

вариант № 9

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$

$2(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$	$x_1 + x_2 - 5$
	$-x_1 + 2x_2 - 6$
	$-x_2 - 2$

вариант № 10

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 3)^2$	$-x_1 + x_2 - 1$
	$3x_1 + 2x_2 - 6$
	$-x_2 - 2$

вариант № 11

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$(x_1 - 2)^2 + 6(x_2 - 2)^2$	$2x_1 + x_2 - 2$
	$-x_1 - 2$
	$-x_2 - 3$

вариант № 12

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 4)^2$	$3x_1 + 2x_2 - 6$

	$-4x_1 + 3x_2 - 12$
	$-x_2$

вариант № 13

$f(x_1, x_2)$	$g_i\,(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$2(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$	$x_1 + x_2 - 2$
	$-x_1$
	$-x_2 - 3$

вариант № 14

$f(x_1, x_2)$	$g_i\,(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$2(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$	$x_1 + x_2 - 2$
	$-x_1 + x_2 - 1$
	$-x_2 - 3$

вариант № 15

$f(x_1, x_2)$	$g_i\,(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$3(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2$	$x_1 + 2x_2 - 2$
	$-x_1 - 4$

	$x_1 - x_2 - 3$

вариант № 16

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$(x_1 - 5)^2 + 2(x_2 - 3)^2$	$2x_1 + x_2 - 6$
	$-2x_1 + x_2 - 4$
	$-x_2 - 3$

вариант № 17

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$2(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 7)^2$	$x_1 + 2x_2 - 8$
	$-x_1 - 2$
	$-x_2 - 3$

вариант № 18

$f(x_1, x_2)$	$g_i(x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$(x_1 - 5)^2 + (x_2 + 3)^2$	$2x_1 - x_2 - 4$
	$-x_1 - x_2 - 1$
	$x_2 - 3$

вариант № 19

$f(x_1, x_2)$	$g_i\ (x_1, x_2) \le 0,\ i = 1,m$
$(x_1 + 4)^2 + 2(x_2 + 2)^2$	$x_1 - 2$
	$-3x_1 - x_2 - 6$
	$x_2 - 1$

Критерии оценивания результатов выполнения контрольной работы №2

Оценка «Отлично» выставляется в случае, если ход решения задачи правильный, система для нахождения точек экстремума функции составлена правильно, ответ в численном виде дан правильный, сделан правильный вывод о точках минимума и максимума функции, по ходу решения даны комментарии.

Оценки «Хорошо» или «Удовлетворительно» выставляются в случае, если отсутствуют комментарии при решении задачи, вычисления в численном виде не в полной мере развернуты, присутствуют прочие незначительные недочеты.

Оценки «Удовлетворительно» или «Неудовлетворительно» выставляется в случае, если допущены ошибки в вычислениях, но ход решения правильный. При неправильном ходе решения задачи, отсутствии числового результата, использовании неверных выражений и формул, отсутствии решения выставляется оценка «Неудовлетворительно».

Контрольная работа №3

Составить условия Куна-Таккера для заданной функции двух переменных при наличии ограничений в виде неравенств.

Теорема Куна-Таккера. Решение задач нелинейного программирования

Пусть задача нелинейного программирования имеет вид

$$\max(\min)\ \ f(x_1, x_2, ..., x_n);$$

$$h_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \quad i = 1...m.$$

Для решения поставленной задачи используется центральная теорема математического программирования – теорема Куна-Таккера, выдвигающая необходимые условия существования решения задачи нелинейного программирования. Достаточные условия существования решения формулируются в теоремах Куна-Таккера второго, третьего и т.д. порядках и в данном курсе не рассматриваются.

Теорема (Куна-Таккера) Точка $(x_1^0, ...x_m^0)$ может являться решением задачи нелинейного программирования только в том случае, если в ней выполнены следующие условия:

1) $gradf + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i gradh_i = 0$;

2) $\lambda_i h_i = 0, i = 1,...,m$;

3) $\lambda_i \le 0, i = 1,...,m(\max)$, $\lambda_i \ge 0, i = 1,...,m(\min)$.

Пример Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$ при заданных ограничениях при ограничениях $y \le 1 - x^2$ и $y \ge 0$.

Решение. Запишем ограничения в стандартном виде

$h_1(x,y) = y + x^2 - 1 \le 0,$

$h_2(x,y) = -y \le 0.$

Первое условие теоремы Куна-Таккера позволяет записать два уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0.$$

Второе условие теоремы позволяет записать еще два уравнения: $\lambda_1 h_1 = 0$, $\lambda_2 h_2 = 0$.

Подставляя в них функции f, h_1, h_2 и вычислив производные, получаем систему из 4 уравнений с 4 неизвестными:

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 2x = 0, \\ 2y - 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 (y + x^2 - 1) = 0, \\ \lambda_2 (-y) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько ветвей решения системы уравнений:

$$1) \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ 2x = 0, \\ 2y - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ x = 0, \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \lambda_1 \ne 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ 2x + \lambda_1 2x = 0, \\ 2y - 1 + \lambda_1 = 0, \\ y + x^2 - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0, \\ 2x(1 + \lambda_1) = 0, \\ 2y = 1 - \lambda_1, \\ y + x^2 - 1 = 0. \end{cases}.$$

Вторая система распадается на два случая:

$$2а) \begin{cases} \lambda_2 = 0, \\ x = 0, \\ y = x^2 + 1 = 1, \\ \lambda_1 = 1 - 2y = -1. \end{cases}; \quad 2б) \begin{cases} \lambda_2 = 0, \\ x \ne 0, \\ \lambda_1 + 1 = 0, \lambda_1 = -1, \\ 2y = 1 - \lambda_1 = 1 + 1 = 2, y = 1, \\ x^2 = 1 - y = 0. \end{cases};$$

3) $\begin{cases}\lambda_1 = 0,\\ \lambda_2 \neq 0,\\ 2x = 0,\\ 2y - 1 - \lambda_2 = 0,\\ y = 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 0,\\ x = 0,\\ \lambda_2 = -1,\\ y = 0.\end{cases};$

4) $\begin{cases}\lambda_1 \neq 0,\\ \lambda_2 \neq 0,\\ 2x + \lambda_1 2x = 0,\\ 2y - 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0,\\ y = 0,\\ y + x^2 - 1 = 0.\end{cases}, \begin{cases}2x + \lambda_1 2x = 0,\\ 2y - 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0,\\ y = 0,\\ x^2 = 1.\end{cases}$ Эта система распадается на две

4а) $\begin{cases}x = -1,\\ y = 0,\\ -2 - 2\lambda_1 = 0,\\ \lambda_2 = \lambda_1 - 1.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = -1,\\ y = 0,\\ \lambda_1 = -1,\\ \lambda_2 = -2.\end{cases};$ 4б) $\begin{cases}x = 1,\\ y = 0,\\ 2 + \lambda_1 2 = 0,\\ \lambda_2 = \lambda_1 - 1.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 1,\\ y = 0,\\ \lambda_1 = -1,\\ \lambda_2 = -2.\end{cases}.$ После того как система решена результаты собираются в таблицу 15:

Таблица 15

P	x	y	λ_1	λ_2	f
P_1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$
P_2	0	1	-1	0	0
P_3	0	0	0	-1	0
P_4	1	0	-1	-2	1
P_5	-1	0	-1	-2	1

Предварительно убеждаемся, что все точки принадлежат допустимому множеству. Подставляя их координаты в ограничения-неравенства и видя, что они остаются истинными, рассчитываем значение целевой функции в каждой из них. Кроме того, убеждаемся, что третье условие теоремы Куна-Таккера также выполнено во всех точках. Сравнивая значение целевой функции в каждой из найденных точек, видим, что наибольшее значение функции 1 достигается в точках (1;0) и (-1;0), наименьшее $-\frac{1}{4}$ в точке (0; $\frac{1}{2}$).

Задание к контрольной работе №2

Составить условия Куна-Таккера для заданной функции двух переменных при наличии ограничений в виде неравенств.

Варианты заданий приведены в задании к контрольной работе 2.

Критерии оценивания результатов выполнения контрольной работы №3

Оценка «Отлично» выставляется в случае, если ход решения задачи правильный, система для нахождения точек экстремума функции составлена правильно, по ходу решения даны комментарии.

Оценки «Хорошо» или «Удовлетворительно» выставляются в случае, если отсутствуют комментарии при решении задачи, присутствуют прочие незначительные недочеты.

Оценки «Удовлетворительно» или «Неудовлетворительно» выставляется в случае, если допущены ошибки в составленных выражениях, но ход решения правильный. При неправильном ходе решения задачи, использовании неверных выражений и формул, отсутствии решения выставляется оценка «Неудовлетворительно».

Контрольная работа №4

Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Основы графического метода решения задач линейного программирования

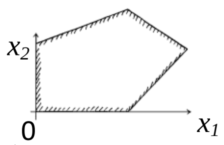
Графический метод основан на геометрической интерпретации экономических задач, которая дает возможность наглядно представить их структуру. Задачу линейного программирования с двумя переменными всегда можно решить графически. Однако уже в трехмерном пространстве такое решение усложняется, а в пространствах, размерность которых больше трех, графическим методом может быть решена задача линейного программирования, система ограничений которой содержит n-неизвестных и m-линейно независимых уравнений, причем $n - m \le 2$.

Пусть задача линейного программирования задана в двумерном пространстве, т.е. ограничения содержат две переменные. Найти максимальное значение функции $z = c_1x_1 + c_2x_2$ при следующих ограничениях:

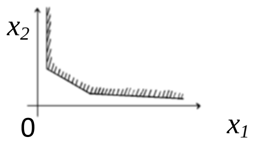
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases} . \qquad (1)$$

Дадим геометрическую интерпретацию элементов этой задачи.

1. Каждое из ограничений (1) Задает на плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость. Их пересечение является областью допустимых решений задачи.

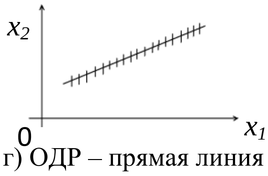


а) ОДР – выпуклый многоугольник

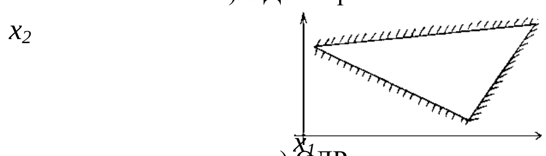


б) ОДР – неограниченная выпуклая многоугольная область

в) ОДР – единственная точка



г) ОДР – прямая линия



д) ОДР – пустое множество

Рис. 1.

На рис. 1 представлены возможные ситуации, когда область допустимых решений задачи линейного программирования – выпуклый многоугольник (а), неограниченная выпуклая многоугольная область (б), единственная точка (в), прямая (г), пустое множество (д).

2. Перейдем к геометрической интерпретации целевой – функции $Z = c_1x_1 + c_2x_2$. Пусть область допустимых решений задачи – линейного программирования непустое множество (например, многоугольник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$, изображенный на рис. 2).

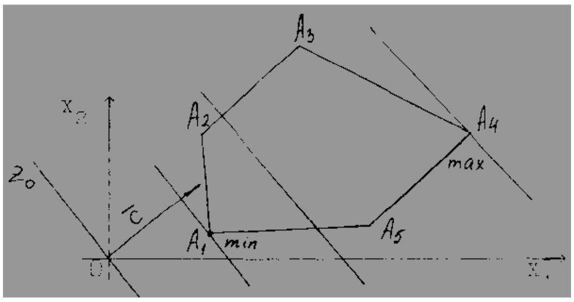


Рис. 2.

Выберем произвольное значение целевой функции $Z = Z_0$. Получим $c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$, – это уравнение прямой линии. В точках прямой *NM* целевая функция сохраняет одно и то же постоянное значение Z_0. Считая в равенстве $Z = c_1x_1 + c_2x_2Z$ – параметром, получим уравнение семейства параллельных прямых, которые называются линиями уровня целевой функции. Чтобы установить направление возрастания (убывания) целевой функции, найдем градиент этой функции:

$$gradZ = \bar{c} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = (c_1 : c_2),\ \text{так как}\ \frac{\partial z}{\partial x_1} = c_1,\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = c_2$$

Вектор $\bar{c}$ – указывает направление наискорейшего возрастания целевой функции, $a - \bar{c}$ (антиградиент) – направление наискорейшего убывания.

Вектор $\bar{c} = (c_1 : c_2)$ перпендикулярен к прямым $Z = const$.

Алгоритм графического решения задачи линейного программирования:

1. С учетом системы ограничений построить область допустимых решений (ОДР).

2. Построить вектор $\bar{c}(c_1c_2)$- вектор наискорейшего возрастания целевой функции.

3. Построить произвольную линию уровня $Z = Z_0$. Перпендикулярную к вектору с внутри ОДР.

4. При решении задачи на максимум переместить линию уровня $Z = Z_0$ в направлении $\bar{c}$ так, чтобы она касалась области допустимых решений в ее крайнем положении (на рис. 2 – до точки A_4). В случае решения задачи на минимум линию уровня $Z = Z_0$ перемещают в антиградиентном направлении (на рис. 2 – до точки A_1).

5. Определить оптимальный план $x^* = (x_1^*; x_2^*)$ и экстремальное значение целевой функции $Z^* = z(x^*)$.

Как видно из рис. 3, возможны следующие случаи:

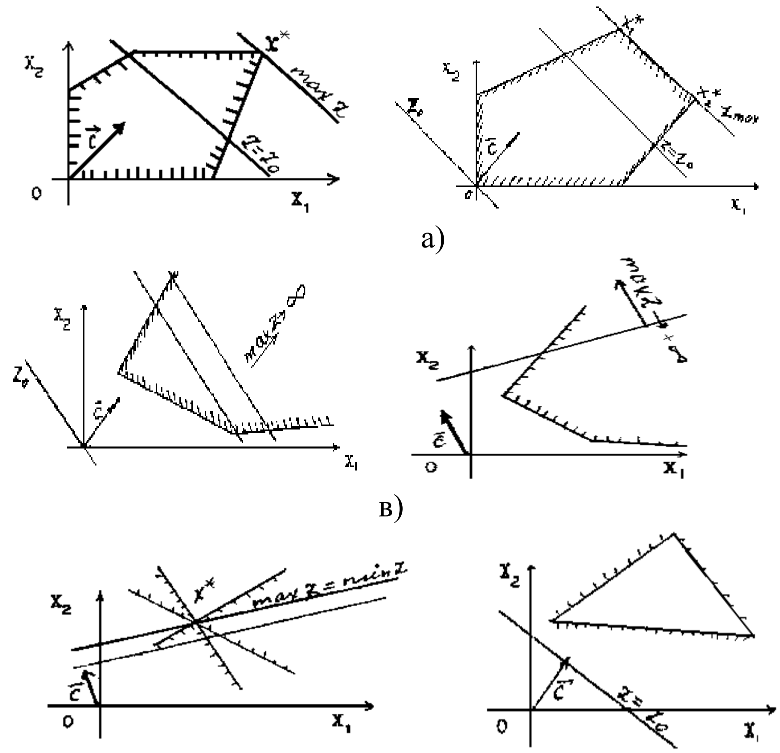
1) Оптимальный план единственный; линия уровня и область допустимых решений в разрешающем положении имеют одну общую точку (а).

2) Оптимальных планов бесконечное множество: в разрешающем положении линия уровня проходит через сторону области допустимых решений (б).

3) Целевая функция неограничена: линия уровня не может занять разрешающего положения (в, г).

4) Область допустимых решений состоит из единственной точки, где целевая функция достигает одновременно и максимально, и минимального значений (д).

5) Задача не имеет решений, так как область допустимых решений – пустое множество (е)



а) б) в) г) д) е)

Рис. 3.

Пример 1

На фабрике планируется выпустить миткаль двух артикулов: *№ 30* и *№ 21* из одинаковой пряжи на одинаковых станках. Планируемый суммарный выпуск *80000 тыс. м*. Известно, что в 1997 г. фабрика может выделить не более *8400 т* основной пряжи и *4500 т* уточной. Требуется составить такую производственную программу, при которой был бы перевыполнен запланированный выпуск ткани и суммарный выпуск ткани оказался бы максимальным (табл. 1).

Таблица 1

Ассортимент суровья	расход пряхи на 1 тыс. м ткани, кг	
	основной	уточной
миткаль № 30	60	45
миткаль № 21	70	30

Решение

Пусть x_1 *(тыс. м)* – выпуск миткаля *№ 30*.

x_2 *(тыс. м)* – выпуск миткаля *№ 21,*

значит $X = (x_1;x_2)$ – план задачи, тогда модель задачи будет следующая:

$\max Z = x_1 + x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 > 80000$ (выпуск ткани должен быть перевыполнен);

$60x_1 + 70x_2 \le 8400000$ (фабрика может выделить основной пряжи не более *8400 т*);

$45x_1 + 30x_2 \le 4500000$ (уточной пряжи может быть выделено не более *4500 т*);

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ (условие не отрицательности переменных). Итак, целевая функция $Z = x_1 + x_2$ ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 800, \\ 60x_1 + 70x_2 \le 8400000, \\ 45x_1 + 30x_2 \le 4500000, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1. Построим область допустимых решений:

l_1: $x_1 + x_2 = 80000$ – прямая, проходящая через точки *(80000;0) (0:80000)*;

l_2:$60x_1 + 70x_2 = 8400000$ – прямая, проходящая через точки *(0:120000). (140000:0)*:

l_3: $45x_1 + 30x_2 = 4500000$ – прямая, проходящая через точки *(100000:0). (0:150000).*

2. Построим вектор $\bar{c}$ (1;1).

3. Построим линию уровня $z = z_0$, перпендикулярную $\bar{c}$. Параллельным перемещением прямой $Z = Z_0$ находим точку *А*, в которой целевая функция достигает максимума.

4. Решая совместно уравнения граничных прямых l_2 и l_3:

$$\begin{cases} 60x_1 + 70x_2 = 8400000, \\ 45x_1 + 30x_2 = 4500000. \end{cases}$$

находим координаты точки *А*:

$x_1^* = 46667$, $x_2^* = 80000$, при этом $Z^* = max\ Z = Z(A) = 126667$.

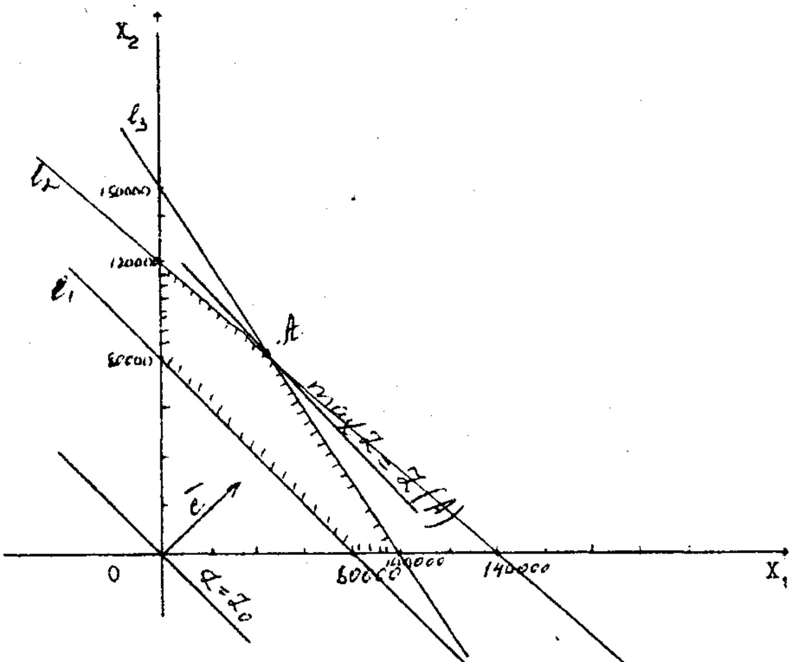


Рис.4

Итак, по оптимальному плану следует выпускать *46667 тыс. м* миткаля *< 30* и *80000 тыс. м* миткаля *№ 21*; тогда общий выпуск ткани *126667 тыс. м* на *46667 тыс. м* больше запланированного выпуска ткани.

Пример 2.

Двум погрузчикам разной мощности за *24 часа* нужно погрузить на первой площадке *230 т*, на второй – *68 т*. Первый погрузчик на 1-ой площадке может погрузить *10 т* в час. на 2-ой – *12 т*. Второй погрузчик на каждой площадке может погрузить по *13 т* в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой *1 т* первым погрузчиком на первой площадке *8 руб.*, на второй – *7 руб.*, вторым погрузчиком на первой площадке – *12 руб.*, на второй – *13руб.* Нужно найти, какой объем работ должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

Решение

Пусть x_{ij} – объем работ (тоннах) *i*-го погрузчика *(i = l,2)* на *j*-ой площадке, *(j = 1,2).*

Условия задачи занесём в табл. 2.

Таблица 2

f t	$П_1$	$П_2$	Лимит рабочего времени
1 погрузчик	10т 8р x_{11}	I0т 7р x_{12}	24

2 погрузчик	13т 12р x_{21}	13т 13р x_{22}	24
задание	230	168	

Построим математическую модель задачи.

Целевая функция $\min Z = 8x_{11} + 7x_{12} + 12x_{21} + 13x_{22}$

Ограничения на лимиты рабочего времени:

$$\frac{x_{11}}{10} + \frac{x_{12}}{12} \le 24, \qquad \frac{x_{21}}{13} + \frac{x_{22}}{13} \le 24;$$

на необходимость выполнить задание:

$$x_{11} + x_{21} = 230;$$

$$x_{12} + x_{22} = 168;$$

условие не отрицательности: $x_{ij} \ge 0$ $(i, j = 1,2)$. Итак, система ограничений будет:

$$\begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} \le 1440 \\ x_{21} + x_{22} \le 312 \\ x_{11} + x_{21} = 230 \\ x_{12} + x_{22} = 168 \end{cases}$$

$x_{ij} \ge 0$ здесь $n = 4, m = 4, n - m = 0 < 2$

Решим эту задачу графически. Для этого исключим из модели переменные x_{21} и x_{22}, Из ограничений равенств имеем:

$$x_{21} = 230 - x_{11};$$

$$x_{22} = 168 - x_{12}.$$

Подставив выражения для x_{21} и x_{22} в ограничения – неравенства и целевую функцию, получим задачу линейного программирования с двумя переменными x_{11} и x_{12}:

$$\min Z = 4944 - 4x_{11} - 6x_{12},$$

$$\begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} \le 1440 \\ x_{11} + x_{12} \ge 86 \\ x_{11} \ge 0, \quad x_{12} \ge 0 \\ x_{12} \le 168, \; x_{11} \le 230 \end{cases}.$$

1. Построим область допустимых решений:

l_1: $6x_{11} + 5x_{12} = 1440$ – прямая, проходящая через точки $(0; 288), (240; 0)$;

l_2: $x_{11} + x_{12} = 86$ – прямая, проходящая через точки $(0;86), (86:0)$;

l_3: $x_{12} = 168$;

l_4: $x_{11} = 230$.

2. Построим градиент целевой функции $\bar{c}\,(-4;-6)$.

3. Построим линию уровня $Z = Z_0$, перпендикулярную $\bar{c}$.

4. Параллельно перемещая прямую $Z = Z_0$ в антиградиентном направлении, найдем точку A, в которой целевая функция достигает минимума.

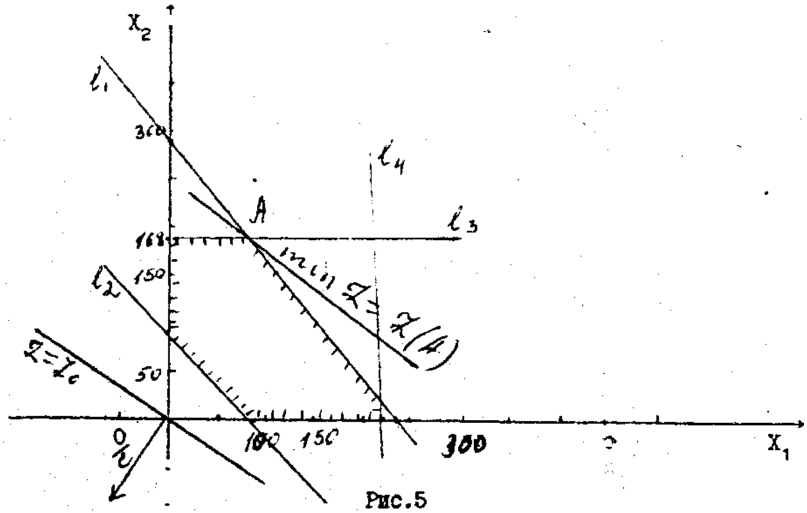


Рис.5

Функция Z достигает наименьшего значения при $x_{11}^* = 100$, $x_{12}^* = 168$; из выражений для x_{21} и x_{22} получим: $x_{21}^* = 130$, $x_{22}^* = 0$; $\min Z = 4944 - 4 \cdot 100 - 6 \cdot 168 = 3536$ *руб.*

Итак, по оптимальному плану первый погрузчик должен погрузить *100 т* на первой площадке и *168 т* – на второй; второму погрузчику надлежит погрузить *130 т* на первой площадке.

Задание к контрольной работе №4

Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Варианты индивидуальных заданий к контрольной работе №4

Решите графическим методом задачу линейного программирования ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$):

1. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq -8 \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 24 \end{cases}$$ $$\max Z = x_1 + 2x_2$$

2. $$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \geq \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \geq -\frac{3}{2} \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30 \\ -3x_1 + 9x_2 \leq 27 \end{cases}$$ $$\min Z = 3x_1 + x_2$$

3. $$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 6x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ -2x_1 + x_2 \geq -2 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 15 \end{cases}$$ $$\max Z = 3x_1 + x_2$$

6. $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 5x_1 + 15x_2 \leq 75 \\ -4x_1 + 5x_2 \geq -20 \\ x_1 - 2x_2 \geq -2 \end{cases}$$ $$\min Z = -3x_1 + 4x_2$$

7. $$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ -\frac{3}{2}x_1 + \frac{9}{2}x_2 \geq -\frac{27}{4} \\ 11x_1 + 7x_2 \leq 77 \end{cases}$$ $$\max Z = x_1 + 2x_2$$

8. $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$ $$\min Z = 2x_1 - 3x_2$$

11. $$\begin{cases} x_1 + 12x_2 \geq 5 \\ -3x_1 + 3x_2 \geq -24 \\ 4x_1 + 10x_2 \leq 50 \\ 5x_1 - 12x_2 \geq -35 \end{cases}$$ $$\max Z = 5x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

12. $$\begin{cases} x_1 \leq 8 \\ 5x_1 + 7x_2 \geq 35 \\ -3x_1 + \frac{9}{2}x_2 \geq -\frac{27}{2} \\ x_1 - 3x_2 \geq -12 \end{cases}$$ $$\min Z = -6x_1 + 2x_2$$

13. $$\begin{cases} -8x_1 + 5x_2 \leq 29 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 54 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ -9x_1 + 3x_2 \geq -30 \end{cases}$$ $$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

4. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ 9x_1 + 6x_2 \le 54 \\ -\dfrac{7}{2}x_1 + \dfrac{9}{2}x_2 \ge -\dfrac{63}{4} \\ 3x_1 - 4x_2 \ge -12 \end{cases}$$ $$\min Z = -6x_1 + x_2$$

5. $$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ -\dfrac{1}{3}x_1 + 3x_2 \ge -1 \\ -x_1 + \dfrac{5}{2}x_2 \le \dfrac{5}{2} \\ 7x_1 + 11x_2 \le 77 \end{cases}$$ $$\max Z = 3x_1 + x_2$$

9. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 8x_1 + 12x_2 \le 96 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \\ -5x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$$ $$\max Z = 4x_1 + x_2$$

10. $$\begin{cases} x_1 \le 6 \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \end{cases}$$ $$\max Z = x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

14. $$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \ge -14 \\ x_1 + 3x_2 \ge 7 \\ x_1 - x_2 \le 5 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$ $$\max Z = 2x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

15. $$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \ge -8 \\ -3x_1 + x_2 \ge -14 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ -\dfrac{1}{2}x_1 + 3x_2 \le \dfrac{21}{2} \end{cases}$$ $$\min Z = -7x_1 + 7x_2$$

16. $$\begin{cases} x_1 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 8x_1 + 12x_2 \le 96 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \end{cases}$$ $$\min Z = -3x_1 + \frac{5}{2}x_2$$

17. $$\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x_1 + 3x_2 \ge -1 \\ -x_1 + \dfrac{5}{2}x_2 \le \dfrac{5}{2} \\ 7x_1 + 11x_2 \le 77 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$$ $$\min Z = -x_1 + 7x_2$$

18. $$\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 \ge 20 \\ x_1 - 3x_2 \ge -12 \\ 3x_1 + \dfrac{5}{2}x_2 \le \dfrac{27}{2} \\ x_1 \le 2 \end{cases}$$ $$\max Z = x_1 + 2x_2$$

19. $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ -4x_1 + 5x_2 \ge -20 \\ x_1 - 2x_2 \ge -2 \end{cases}$$ $$\max Z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

20. $$\begin{cases} \dfrac{5}{3}x_1 - x_2 \ge -10 \\ x_1 + \dfrac{4}{3}x_2 \ge \dfrac{32}{3} \\ x_1 - \dfrac{5}{2}x_2 \le 3 \\ 7x_1 + 6x_2 \le 162 \end{cases}$$ $$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

21. $$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 \ge -48 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 40 \\ 7x_1 - 5x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 73 \end{cases}$$ $$\max Z = 6x_1 + 5x_2$$

22. $$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge -24 \\ x_1 + 2x_2 \ge 16 \\ x_1 - 4x_2 \le -8 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 82 \end{cases}$$ $$\max Z = 7x_1 + 6x_2$$

23. $$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -24 \\ x_1 + 2x_2 \ge 12 \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 16 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 104 \end{cases}$$ $$\min Z = -4x_1 + 5x_2$$

24. $$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \ge -40 \\ 3x_1 + 7x_2 \ge 56 \\ 3x_1 - 3x_2 \le 22 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 136 \end{cases}$$ $$\min Z = -5x_1 + 7x_2$$

25. $$\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 \ge -12 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 30 \\ 3x_1 - 8x_2 \le 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 84 \end{cases}$$ $$\max Z = 7x_1 + 9x_2$$

26. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge -20 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 32 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 24 \\ 4x_1 + 7x_2 \le 116 \end{cases}$$ $$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

27. $$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -16 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 48 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 32 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 160 \end{cases}$$ $$\max Z = 7x_1 + 8x_2$$

28. $$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \ge -30 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 32 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 6 \\ 7x_1 + 6x_2 \le 162 \end{cases}$$ $$\min Z = -3x_1 + 7x_2$$

29. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -10 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 36 \\ x_1 - 3x_2 \le 14 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 90 \end{cases}$$ $$\min Z = 2x_1 - 5x_2$$

30. $$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \ge -14 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 94 \end{cases}$$ $$\min Z = 8x_1 - 7x_2$$

Критерии оценивания результатов выполнения контрольной работы №4

Оценка «Отлично» выставляется в случае, если ход решения задачи правильный, графики построены правильно, найдено правильное решение, по ходу решения даны комментарии.

Оценки «Хорошо» выставляется в случае, если отсутствуют комментарии при решении задачи, присутствуют прочие незначительные недочеты.

Оценка «Удовлетворительно» выставляется в случае, если допущены ошибки при построении графиков, но ход решения правильный. При неправильном ходе решения задачи, использовании неверных выражений и формул, неправильных выводах, отсутствии решения выставляется оценка «Неудовлетворительно».

Контрольная работа 5

Решение элементарных задач вариационного исчисления.

Элементарная задача вариационного исчисления. Дифференциальное уравнение Эйлера

Рассмотрим пример, который легко решить аналитически. Требуется найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_0^1 \left(y'^2 + 12xy\right) dx \to \text{extr}$$

при граничных условиях

$$\begin{cases} y(0) = 0; \\ y(1) = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Найдём частные производные F_y и $F_{y'}$:

$F_y = 12x$; $\quad F_{y'} = 2y'$.

Вычислим полную производную по x от $F_{y'}$:

$$\frac{dF_y}{dx} = 2y''.$$

Составляем дифференциальное уравнение Эйлера вида:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

Получим: $12x - 2y'' = 0$,

или, после упрощений

$y'' = 6x$.

Его общее решение имеет вид

$y(x) = x^3 + C_1x + C_2$. (2)

Для нахождения произвольных постоянных C_1 и C_2 подставим решение (2) в граничные условия (1):

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0; \\ y(1) = 1 + C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$

Видно, что система имеет единственное решение. Решая эту систему, найдём значения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 0; \end{cases}$$

и тогда уравнение экстремали имеет вид:

$y(x) = x^3$.

Действительно ли на этой кривой достигается экстремум? И если да, то какой: минимум или максимум? Условие Лежандра: если на экстремали выполняется условие $F_{y'y'}>0$, а на функциях, близких к экстремали, для произвольных y' имеет место $F_{y'y'} \geq 0$, то достигается сильный минимум. В нашем случае это выполняется:

$F_{y'y'} = 2 > 0$,

и, следовательно, на нашей экстремали достигается сильный минимум.

Задание к контрольной работе №5

Для своего варианта функционалов найти экстремали, построить их графики и исследовать на выполнение достаточных условий экстремума.

Варианты заданий

Вариант 1.

$$J(y) = \int_{-1}^{1} \left(y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2\right) dx; \quad y(-1) = 3; \quad y(1) = 1.$$

Вариант 2.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2-4y^2+2xy-x^2\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=4.$$

Вариант 3.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2+4x^2y+x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=0.5.$$

Вариант 4.

$$J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2+9y^2+2xy-x\sin x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2.$$

Вариант 5.

$$J(y)=\int_{-2}^{0}\left(y'^2-4y^2+2y+xe^{2x}\right)dx;\quad y(-2)=0;\quad y(0)=1.$$

Вариант 6.

$$J(y)=\int_{0}^{1}\left(y'^2-9y^2+2y\sin x-x^2e^x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(1)=-1.$$

Вариант 7.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2+6ye^x+2x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3.$$

Вариант 8.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+y^2+4ye^x-x\sin x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3.$$

Вариант 9.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2+8ye^{2x}+3x^2\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3.$$

Вариант 10.

$$J(y)=\int_0^2\left(2y'^2+2y^2+y\cos x-5x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=2.$$

Вариант 11.

$$J(y)=\int_0^2\left(2y'^2+2y^2+xy\sin x+6xe^x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2.$$

Вариант 12.

$$J(y)=\int_0^2\left(2y'^2-2y^2+y\sin 2x-x^2\sin x\right)dx;\quad y(0)=-1;\quad y(2)=4.$$

Вариант 13.

$$J(y)=\int_0^2\left(2y'^2-2y^2+y\cos x+xe^{2x}\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2.$$

Вариант 14.

$$J(y)=\int_1^2\left(2y'^2-2y^2+ye^{2x}\sin 3x-x\sin x\right)dx;\quad y(1)=2;\quad y(2)=3.$$

Вариант 15.

$$J(y)=\int_{-1}^1\left(2y'^2+2y^2+ye^x+4xe^{2x}\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=2.$$

Вариант 16.

$$J(y)=\int_{-1}^1\left(2y'^2+2y^2+3ye^x\cos x-5x^2e^{2x}\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=1.$$

Вариант 17.

$$J(y)=\int_{-1}^1\left(2y'^2+2y^2+ye^{2x}+4\sin x\right)dx;\quad y(-1)=4;\quad y(1)=3.$$

Вариант 18.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}\left(2y'^2+2y^2+3ye^{2x}\sin x-5\cos x\right)dx;\quad y(-1)=3;\quad y(1)=4.$$

Вариант 19.

$$J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2+4y^2+6ye^{2x}\cos x-x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3.$$

Вариант 20.

$$J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2+4y^2+4ye^{x}\sin x+x^2\sin x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=3.$$

Вариант 21.

$$J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2+4y^2-8y\cos x+4x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3.$$

Вариант 22.

$$J(y)=\int_{2}^{4}\left(y'^2-4y^2+4y\cos 2x-3x^2\right)dx;\quad y(2)=1;\quad y(4)=4.$$

Вариант 23.

$$J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2-4y^2+4ye^{x}\sin 2x+x^2\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=3.$$

Вариант 24.

$$J(y)=\int_{-1}^{0}\left(y'^2-9y^2+4y\sin 3x+5x^2\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(0)=0.$$

Вариант 25.

$$J(y)=\int_{0}^{1}\left(y'^2-9y^2+4ye^{2x}\cos 3x\right)dx;\quad y(0)=3;\quad y(1)=2.$$

Вариант 26.

$$J(y)=\int_0^2\left(y'^2+4y^2-8y\cos x+4x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3.$$

Вариант 27.

$$J(y)=\int_2^4\left(y'^2-4y^2+4y\cos 2x-3x^2\right)dx;\quad y(2)=2;\quad y(4)=3.$$

Вариант 28.

$$J(y)=\int_0^2\left(y'^2-4y^2+4ye^x\sin\frac{x}{2}+2x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3.$$

Вариант 29.

$$J(y)=\int_0^1\left(y'^2-9y^2+6y\sin 3x+5x^2\right)dx;\quad y(0)=3;\quad y(1)=1.$$

Вариант 30.

$$J(y)=\int_0^3\left(y'^2+4y^2+4ye^x\sin x+x^2\sin x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(3)=4.$$

Критерии оценивания результатов выполнения контрольной работы №5

Оценка «Отлично» выставляется в случае, если ход решения задачи правильный, графики построены правильно, найдено правильное решение, по ходу решения даны комментарии.

Оценки «Хорошо» выставляется в случае, если отсутствуют комментарии при решении задачи, присутствуют прочие незначительные недочеты.

Оценка «Удовлетворительно» выставляется в случае, если допущены ошибки при построении графиков, но ход решения правильный. При неправильном ходе решения задачи, неверном нахождении экстремали, неправильных выводах, отсутствии решения выставляется оценка «Неудовлетворительно».

Результаты выполнения контрольных работ должны быть представлены в письменном виде с указанием Ф.И.О. студента, группы; номера контрольной работы; и включать формулировку задания, полное описание хода решения задачи, ответ, необходимые иллюстрации в виде графиков (при наличии соответствующего требования).

При подготовке к выполнению контрольных работ 1-4 рекомендуется использовать конспект лекций по дисциплине «Введение в оптимизацию», прочитанных в ходе лекционных занятий.

Рекомендуемая дополнительная литература:

1. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах : Учеб. пособие для студентов втузов / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова .— 4- е изд., испр. — Изд-во Лань, 2015 .— 512 с. : ил. [Режим доступа - http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67460]
2. Летова Т. А. , Пантелеев А. В. Методы оптимизации. Практический курс: учебное пособие - М.: Логос, 2011. - 424 с. [Режим доступа - http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=84995&sr=1]

Автор
старший преподаватель А.И. Гаврилов

Зав. кафедрой ВТ
д-р техн. наук, профессор А.С. Федулов