Расчетно-графическое задание 2.

На вале (рис.1) закреплено 4 шкива (колеса), один из которых (второй) ведущий (например, соединен с электромотором), а три остальных - ведомые (например, приводят в действие станки).

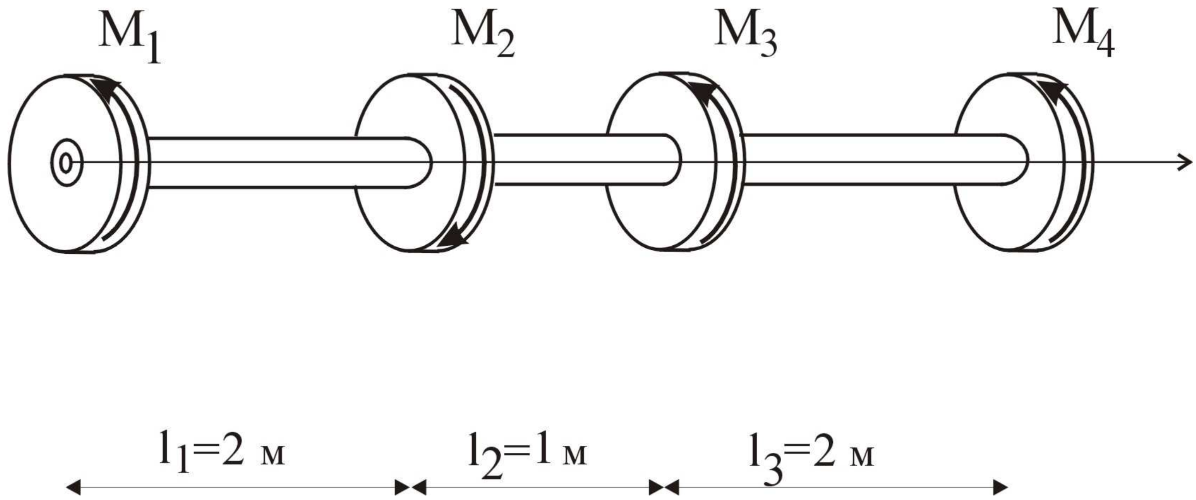

Рис.1.

Тогда направление внешнего момента на ведущем шкиве M_2 противоположно направлению тормозящих моментов на ведомых шкивах M_1, M_3, M_4, значения которых заданы: $M_1 = 20\,кНм$, $M_3 = 30\,кНм$, $M_4 = 40\,кНм$. Однако, после преодоления начальной силы трения покоя все шкивы начинают вращаться в одну сторону с постоянной угловой скоростью. При этом все внешние моменты, действующие на вал, находятся в равновесии:

$$\sum M = M_1 - M_2 + M_3 + M_4 = 0 \Rightarrow M_2 = M_1 + M_3 + M_4 = 20 + 30 + 40\,(кНм).$$

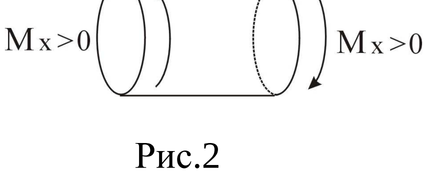

Рис.2

Эпюру крутящего момента M_x построим **методом сечений**, используя правило знаков (см.рис. 2). На каждом из трех участков вала выберем произвольное сечение и рассмотрим внешние моменты с одной стороны от сечения:

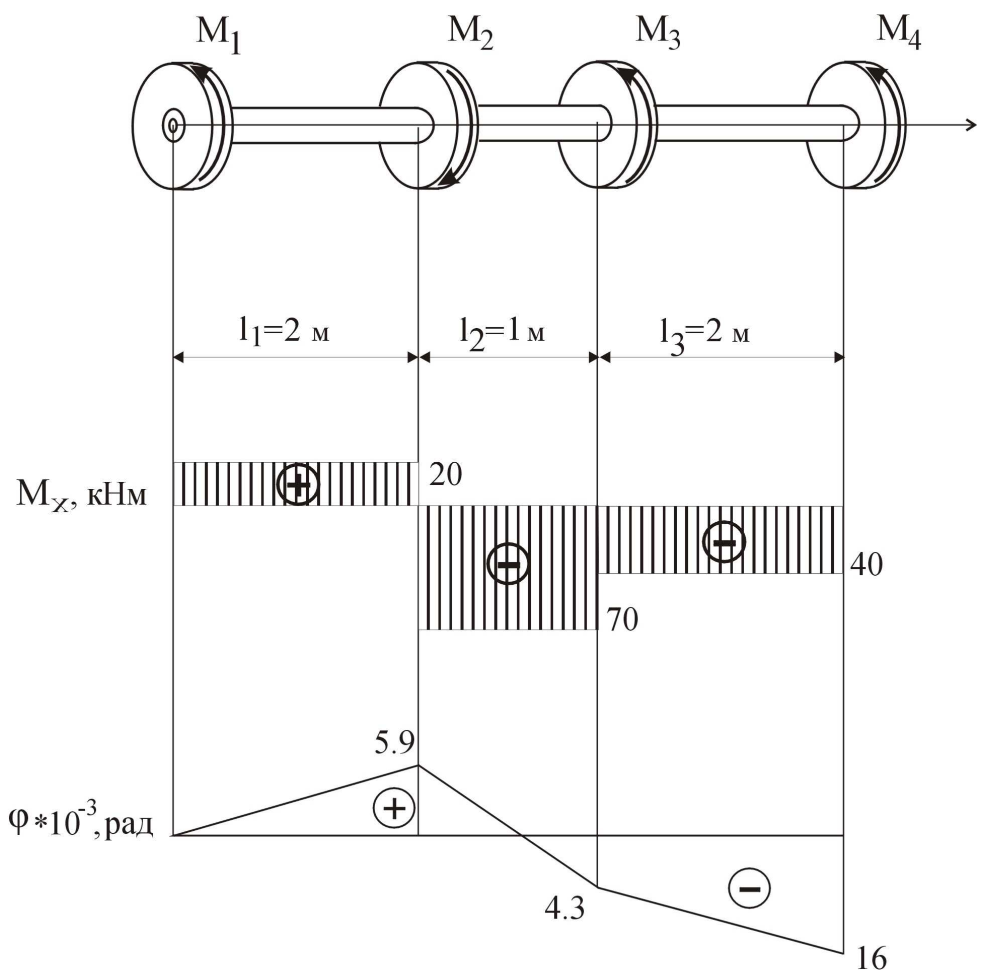

Рис.3

$M_{x1\,слева} = M_1 = 20\,(кНм)$, $M_{x2\,слева} = M_1 - M_2 = -70\,(кНм)$,

$M_{x3\,справа} = -M_4 = -40\,(кНм)$.

Отметим, что скачки на эпюре (см.рис.3) равны значениям внешних моментов в сечениях.

Выбираем опасный участок – тот, где крутящий момент принимает наибольшее значение: $|M_x|_{\max} = |M_{x2}| = 70\,кНм$. Подберем теперь кольцевое сечение вала из условий прочности и жесткости, считая $\vartheta = \dfrac{d_н}{d_{вн}} = 0.8$, $[\tau] = 80\,МПа$, $[\theta] = 1\,{}^{\circ}\!/_{м} = 17.5 \cdot 10^{-3}\,{}^{рад}\!/_{м}$,

$G = 8 \cdot 10^{10}\,МПа$. Для кольцевого сечения

$$I_p = \frac{\pi d_н{}^4}{32} - \frac{\pi d_{вн}{}^4}{32} \approx 0.1 \cdot d_н{}^4 \cdot (1 - \vartheta^4)\,,\ W_p = \frac{I_p}{0.5 d_н} \approx 0.2 \cdot d_н{}^3 \cdot (1 - \vartheta^4)\,.$$

Условие прочности приводит к неравенству:

$$d_н \geq \sqrt[3]{\frac{|M_x|_{\max}}{0.2\cdot(1-\vartheta^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{70\cdot 10^3}{0.2\cdot(1-0.8^4)\cdot 80\cdot 10^6}} = 0.195\,(м),$$

а условие жесткости – к неравенству

$$d_н \geq \sqrt[4]{\frac{|M_x|_{\max}}{0.1\cdot G\cdot(1-\vartheta^4)[\theta]}} = \sqrt[3]{\frac{70\cdot 10^3}{0.1\cdot 8\cdot 10^{10}\cdot(1-0.8^4)\cdot 17.5\cdot 10^{-3}}} = 0.171\,(м).$$

Выбираем значение $d_н$, удовлетворяющее обоим неравенствам:

$d_н = 0.195\ м,\ d_{вн} = 0.8\cdot 0.195 = 0.156\ м.$

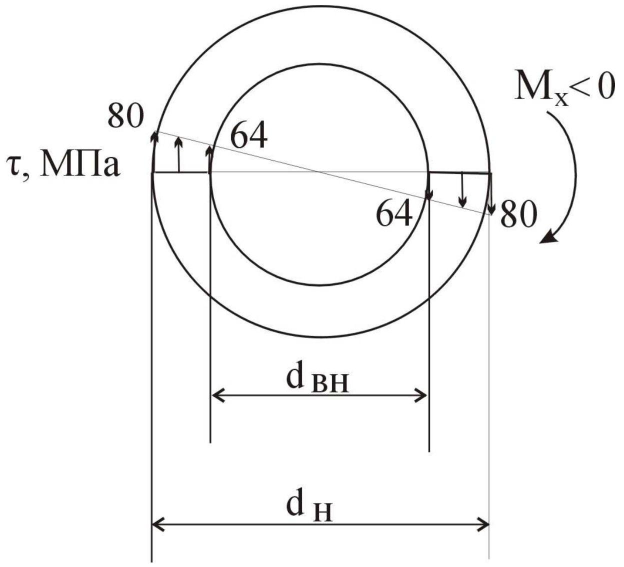

Рис.4

Вычислим напряжения на наружной и внутренней поверхности стержня в поперечном сечении на опасном участке вала:

$$|\tau_н| = |\tau_{\max}| = \frac{70\cdot 10^3}{0.2\cdot 0.195^3\cdot(1-0.8^4)} \approx 80\ МПа,$$

$$|\tau_{вн}| = \frac{|M_x|}{I_p}\cdot\frac{d_{вн}}{2} = \vartheta|\tau_н| = 0.8\cdot 80 = 64\ (МПа)$$

Построим теперь эпюру распределения касательных напряжений (см.рис.4).

Найдем углы закручивания участков вала:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{20\cdot 2}{6.83\cdot 10^3} = 5.9\cdot 10^{-3}(рад),\ \Delta\varphi_2 = \frac{-70\cdot 1}{6.83\cdot 10^3} = -10.2\cdot 10^{-3}(рад),$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{-40\cdot 2}{6.83\cdot 10^3} = -11.7\cdot 10^{-3}(рад);$$

и построим график углов поворота сечений относительно первого сечения, условно считая $\varphi_1 = 0$:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_2 = 5.9\cdot 10^{-3}(рад),\ \varphi_3 = \varphi_2 + \Delta\varphi_3 = -4.3\cdot 10^{-3}(рад),$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 + \Delta\varphi_4 = -16\cdot 10^{-3}(рад)$$ (см.рис.3).

Отметим, что условие жесткости на опасном участке выполняется с большим запасом, потому что сечение подбиралось из условия прочности: $|\theta| = \dfrac{70}{6.83 \cdot 10^3} = 10.2 \cdot 10^{-3} (рад/м) < |\theta| = 17.5 \cdot 10^{-3} (рад/м)$.

Исследуем напряженное состояние элемента материала на третьем участке. Элемент, вырезанный вдоль оси стержня, находится в состоянии чистого сдвига (см.рис.5) – на его гранях действуют только касательные напряжения $|\tau_{3\,\max}| = \dfrac{40 \cdot 10^3}{0.2 \cdot (1 - 0.8^4) \cdot 0.195^3} = 45.7\ (МПа)$.

Главные напряжения при чистом сдвиге в соответствии с по модулю также равны $|\tau_{3\max}| = \tau$: $\sigma_1 = \tau = 45.7\ МПа$, $\sigma_3 = -\tau = -45.7\ МПа$ и направлены под углом $\pm 45^\circ$ к оси стержня (см.рис.5).

Вычислим напряжения на площадке, наклоненной под углом $\beta = 30^\circ$ к оси стержня. Чтобы воспользоваться формулами преобразования напряжений нужно найти угол α между σ_1 и нормалью к площадке. В данном случае $\alpha = -(45^\circ - \beta) = -15^\circ$:

$\sigma_x = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos(-30^\circ) = 39.6\ (МПа)$, $\tau_{xy} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin(-30^\circ) = -22.9\ (МПа)$.

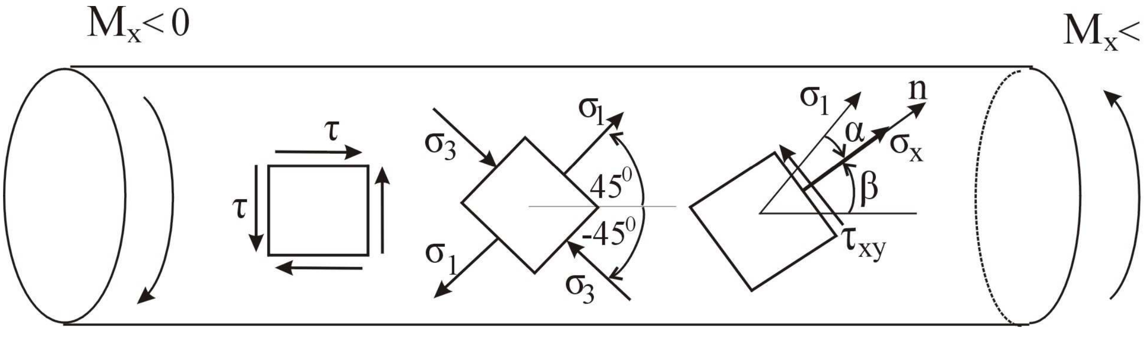

Рис.5