Пример выполнения расчетного задания 1.

На стержень, закрепленный между двумя жесткими заделками, действуют продольные силы (см.рис.1). Стержень однородный, модуль Юнга материала $E = 2 \cdot 10^5$ $МПа$, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ $МПа$. Задано соотношение площадей отдельных участков стержня: $A_1 : A_2 : A_3 = 2:1:1.5$. Длины участков $l_1 = 2$ $м$, $l_2 = 1$ $м$, $l_3 = 3$ $м$.

Выразим продольные усилия через внешние силы (как заданные активные силы, так и неизвестные пока реакции опор R_A и R_D):

$N_{1\,справа} = R_A$, $N_{2\,справа} = R_A - 50$, $N_{3\,слева} = -R_D$.

Напомним, что при определении знаков продольных сил здесь используется правило знаков, а направление реакций опор выбирается произвольно.

Запишем единственное в данном случае нетривиальное (т.е. не приводящее к тождеству $0 \equiv 0$) уравнение равновесия:

$\sum F_x = -R_A + 50 - 30 - R_D = 0 \Rightarrow R_A + R_D = 20$.

Здесь знаки проекций внешних сил связаны, как обычно, с их направлением относительно оси x.

Как видно, система один раз статически неопределима, поскольку для определения двух неизвестных реакций мы располагаем лишь одним уравнением равновесия. Дополнительное уравнение – уравнение совместности перемещений – получим на основе простого заключения о неизменности длины стержня ввиду наличия на его концах жестких защемлений:

$\Delta l = 0 \Rightarrow \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$.

Это уравнение не содержит, однако, в явном виде неизвестных реакций R_A и R_B, поэтому воспользуемся законом Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1},\ \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2},\ \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3}.$$

Учитывая выражения для продольных сил через внешние силы, перепишем уравнение совместности в виде:

$$\frac{R_A l_1}{EA_1} + \frac{(R_A - 50)\cdot l_2}{EA_2} - \frac{R_D l_3}{EA_3} = 0 \Rightarrow \frac{R_A \cdot 2}{E\cdot 2A_2} + \frac{(R_A - 50)\cdot 1}{EA_2} - \frac{R_D \cdot 3}{E\cdot 1.5A_2} = 0.$$

Окончательно получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$R_A + R_D = 20,$$

$$2R_A - 50 - 2R_D = 0.$$

Решив ее, найдем $R_A = 22.5\,(кН), R_D = -2.5\,(кН)$, затем определим продольные усилия: $N_1 = 22.5\,(кН),\quad N_2 = -27.5\,(кН),\quad N_3 = 2.5\,(кН)$, построим эпюру N_x (см. рис.1).

2. Теперь запишем условия прочности для отдельных участков и подберем их сечения, сохраняя заданные соотношения между ними:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \le [\sigma] \Rightarrow A_1 = 2A_2 \ge \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{22.5\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} \cong 1.4\cdot 10^{-4}(м^2) = 1.4\,(см^2),$$

$$|\sigma_2| = \frac{|N_2|}{A_2} \le [\sigma] \Rightarrow A_2 \ge \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{27.5\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} \cong 1.7\cdot 10^{-4}(м^2) = 1.7\,(см^2),$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} \le [\sigma] \Rightarrow A_3 = 1.5A_2 \ge \frac{2.5\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} \cong 0.2\cdot 10^{-4}(м^2) = 0.2\,(см^2).$$

Разрешив эти неравенства относительно A_2, примем в соответствии с наиболее сильным из трех неравенств ($A_2 \ge 1.7\,(см^2)$):

$$A_1 = 3.4\,см^2,\quad A_2 = 1.7\,см^2,\quad A_3 = 2.6\,см^2.$$

Отметим, что определение площадей с точностью более одной значащей цифры в десятых не имеет смысла, поскольку исходные данные задаются именно с такой точностью.

3. Построим теперь эпюру напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{22.5 \cdot 10^3}{3.4 \cdot 10^{-4}} = 66.2\,(МПа),\ \sigma_2 = \frac{-27.5 \cdot 10^3}{1.7 \cdot 10^{-4}} = -161.8\,(МПа),$$

$$\sigma_3 = \frac{2.5 \cdot 10^3}{2.6 \cdot 10^{-4}} = 9.6\,(МПа).$$

Несмотря на то, что $|\sigma|_{\max} = |\sigma_2| > [\sigma]$, такой перегруз допустим, поскольку он не превышает 5%:

$$\frac{|\sigma|_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{161.8 - 160}{160} \cdot 100\% = 1.1\% < 5\%.$$

4. Найдем абсолютные удлинения участков, проверим условие совместности и определим перемещения сечений B и C:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E} l_1 = \frac{66.2}{2 \cdot 10^5} \cdot 2 = 0.66 \cdot 10^{-3} (м) = 0.66\,(мм),$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2}{E} l_2 = \frac{-161.8}{2 \cdot 10^5} \cdot 1 = -0.81 \cdot 10^{-3} (м) = -0.81\,(мм),$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3}{E} l_3 = \frac{9.6}{2 \cdot 10^5} \cdot 3 = 0.15 \cdot 10^{-3} (м) = 0.15\,(мм) \quad ;$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.66 - 0.81 + 0.15 = 0;$$

$$\Delta l_B = \Delta l_1 \approx 0.66\,(мм), \quad \Delta l_C = -\Delta l_3 = -0.15\,(мм),$$

сечение B перемещается вправо, а сечение C - влево (см.рис.1).

5. Пусть стержень изготовлен неточно - длиннее, чем нужно, на $\delta = 0.5\ мм$ (рис.2). Тогда в нем при установке (сборке) возникнут внутренние усилия (напряжения) даже при отсутствии внешних сил.

Из уравнения равновесия для стержня в целом следует, что опорные реакции равны:

$$\sum F_x = -R_A - R_D = 0 \Rightarrow R_A = -R_D.$$

Методом сечений устанавливаем, что $N_1 = N_2 = N_3 = R_A = -R_D$.

Далее возможны два равноправных подхода: неточность δ может включаться в уравнение совместности или в физическое уравнение для одного из участков. После подстановки физических уравнений в уравнение совместности в обоих случаях получается одно и то же выражение:

$$\frac{R_A l_1}{EA_1} + \frac{R_A l_2}{EA_2} - \frac{R_D l_3}{EA_3} + \delta = 0 \Rightarrow \frac{R_A \cdot 2}{E \cdot 2A_2} + \frac{R_A \cdot 1}{EA_2} + \frac{R_A \cdot 3}{E \cdot 1.5A_2} + \delta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = -\frac{\delta EA_2}{4} = -\frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1.7 \cdot 10^{-4}}{4} = -4.25\,(кН)$$

Найдем напряжения и построим эпюру:

$$\sigma_1 = \frac{-4.25 \cdot 10^3}{3.4 \cdot 10^{-4}} = -12.5\,(МПа),\ \sigma_2 = \frac{-4.25 \cdot 10^3}{1.7 \cdot 10^{-4}} = -25\,(МПа),$$

$$\sigma_3 = \frac{-4.25 \cdot 10^3}{2.6 \cdot 10^{-4}} = -16.35\,(МПа).$$

Проверим выполнение условия совместности:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E} l_1 = \frac{-12.5}{2 \cdot 10^5} \cdot 2 = -0.125 \cdot 10^{-3}(м) = -0.125\,(мм),$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2}{E} l_2 = \frac{-25}{2 \cdot 10^5} \cdot 1 = -0.125 \cdot 10^{-3}(м) = -0.125\,(мм),$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3}{E} l_3 = \frac{-16.35}{2 \cdot 10^5} \cdot 3 = -0.25 \cdot 10^{-3}(м) = -0.25\,(мм),$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0.125 - 0.125 - 0.25 + 0.5 = 0.$$

Сечение B перемещается влево на $\Delta l_B = -0.125\,мм$, сечение C перемещается влево на $\Delta l_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0.25\,мм$ (см.рис.2).

Пусть второй участок рассматриваемого стержня нагрет на $\Delta t^\circ = 40^\circ C$. Поскольку внешние силы на стержень не действуют, внутренние силы на всех участках равны (см.выше):

$$N_1 = N_2 = N_3 = R_A = -R_D.$$

Уравнение совместности запишем так же, как в п.1: $\Delta l = 0 \Rightarrow \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$, а в физическое уравнение для второго участка внесем слагаемое, учитывающее изменение температуры:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} + \delta_{t^\circ}, \quad \delta_{t^\circ} = \alpha \cdot \Delta t^\circ l_2 = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 40 \cdot 1 = 0.5 \cdot 10^{-3} (м) = 0.5 (мм).$$

Здесь $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}\ (1/^\circ)$ - температурный коэффициент линейного расширения.

Тогда окончательное уравнение для определения R_A запишется в виде:

$$\frac{R_A l_1}{EA_1} + \frac{R_A l_2}{EA_2} + \delta_{t^\circ} - \frac{R_D l_3}{EA_3} = 0 \Rightarrow \frac{R_A \cdot 2}{E \cdot 2A_2} + \frac{R_A \cdot 1}{EA_2} + \frac{R_A \cdot 3}{E \cdot 1.5 A_2} + \delta_{t^\circ} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = -\frac{\delta_{t^\circ} EA_2}{4} = -\frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1.7 \cdot 10^{-4}}{4} = -4.25\ (кН)$$

Таким образом, фактически расчет на температурное воздействие полностью аналогичен расчету на неточность изготовления.

Следует отметить, что рассмотренный здесь подход – внесение температурной деформации и неточности изготовления в физические уравнения, а не в уравнение совместности, является более общим и облегчает решение задачи в сложных стержневых системах.

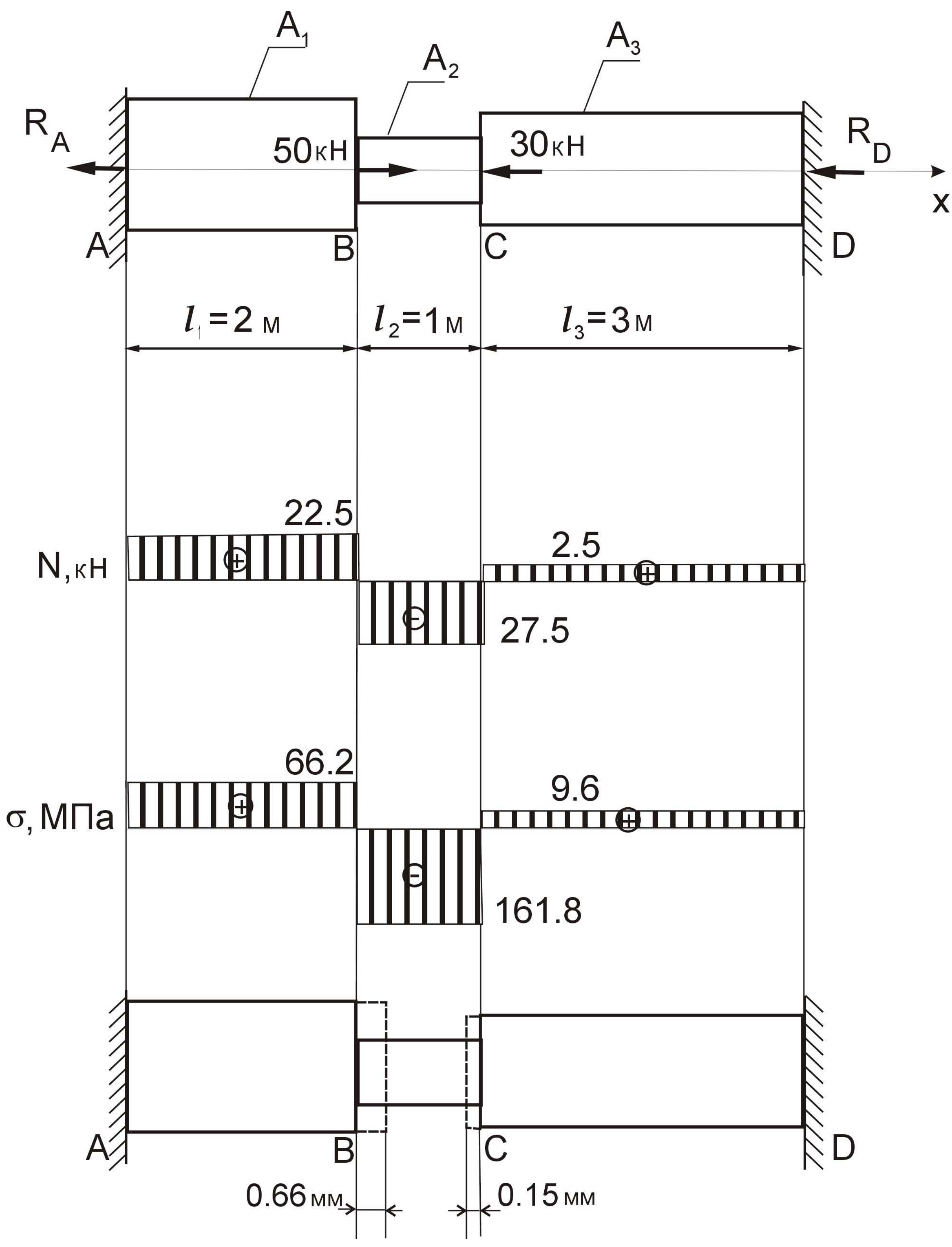
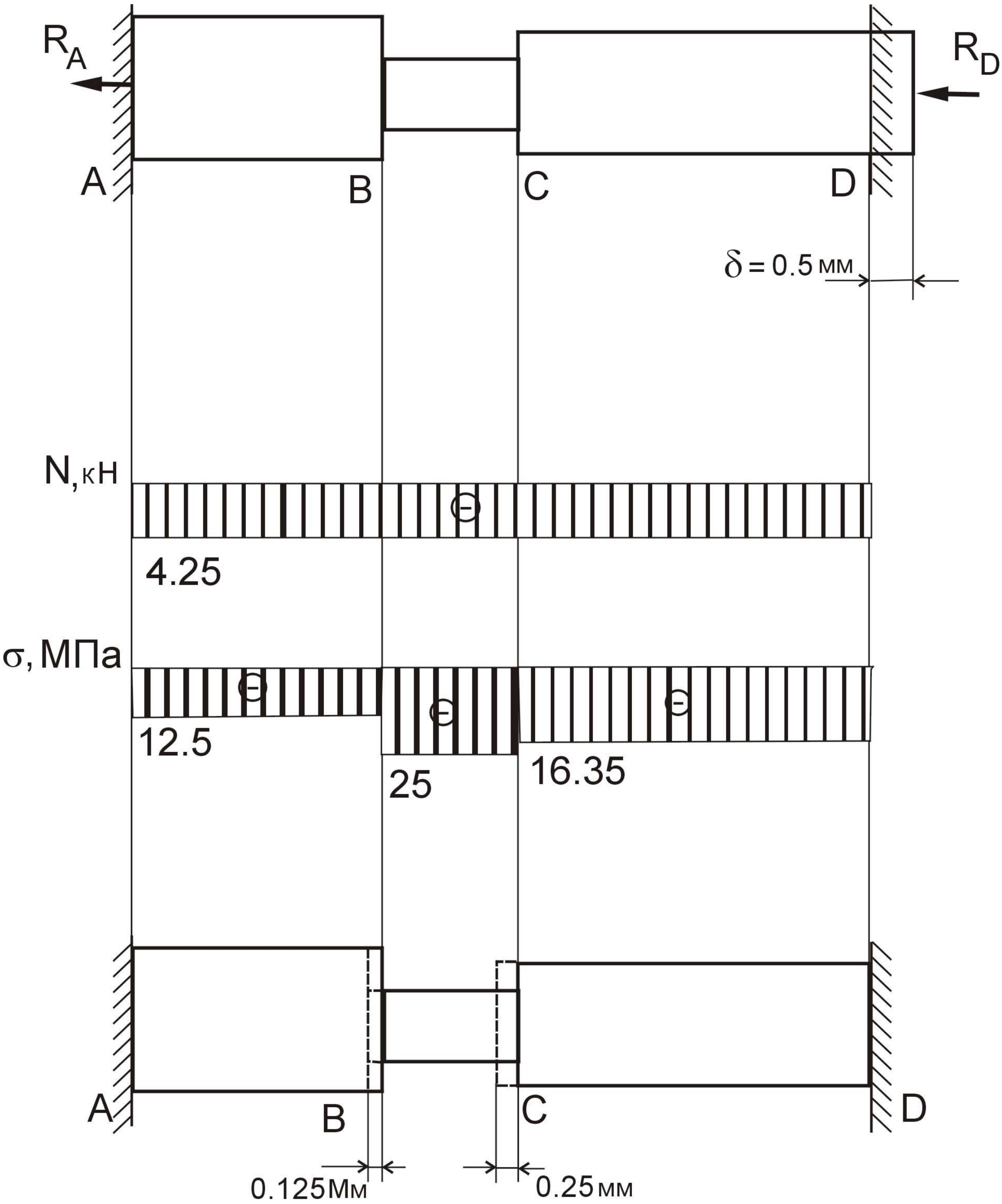

A1
A2
A3
RA
50кН
30кН
RD
x
A
B
C
D
l1=2 м
l2=1м
l3=3м
22.5
N,кН
2.5
27.5
66.2
σ, МПа
9.6
161.8
A
B
C
D
0.66мм
0.15мм

Рис.1



R_A
R_D
A
B
C
D
$\delta = 0.5$ мм
N, кН
4.25
σ, МПа
12.5
25
16.35
A
B
C
D
0.125Мм
0.25мм

Рис.2

6. Примеры определения напряжений при простом растяжении-сжатии.

Пример 1. Для участка стержня, находящегося в состоянии одноосного растяжения, $\sigma_x = 100\, МПа$, найти напряжения на площадке, наклоненной к оси стержня под углом $\beta = 30^\circ$ (см. рис.3, а).

Здесь $\sigma_1 = 100\, МПа$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Угол $\alpha = \beta = 30^\circ$.

Поэтому $\sigma_x = \frac{100}{2} + \frac{100}{2}\cos\, 60^\circ = 75\,(МПа)$,

$\sigma_y = \frac{100}{2} - \frac{100}{2}\cos\, 60^\circ = 25\,(МПа)$, $\tau_{xy} = \frac{100}{2}\sin 60^\circ = 43.3\,(МПа)$.

Пример 2. Для участка стержня, находящегося в состоянии одноосного сжатия, $\sigma_x = -100\, МПа$, найти напряжения на площадке, наклоненной к оси стержня под углом $\beta = 30^\circ$ (см. рис.3, б).

Здесь $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -100\, МПа$. Угол $\alpha = -(90 - \beta) = -60^\circ$, поскольку $\sigma_{\max} = \sigma_1 = 0$. Тогда

$$\sigma_x = -\frac{100}{2} + \frac{0 - (-100)}{2}\cos\,(-120^\circ) = -75\,(МПа),$$

$$\sigma_y = -\frac{100}{2} - \frac{0 - (-100)}{2}\cos(-120^\circ) = -25\,(МПа),$$

$$\tau_{xy} = \frac{0 - (-100)}{2}\sin(-120^\circ) = -43.3\,(МПа).$$

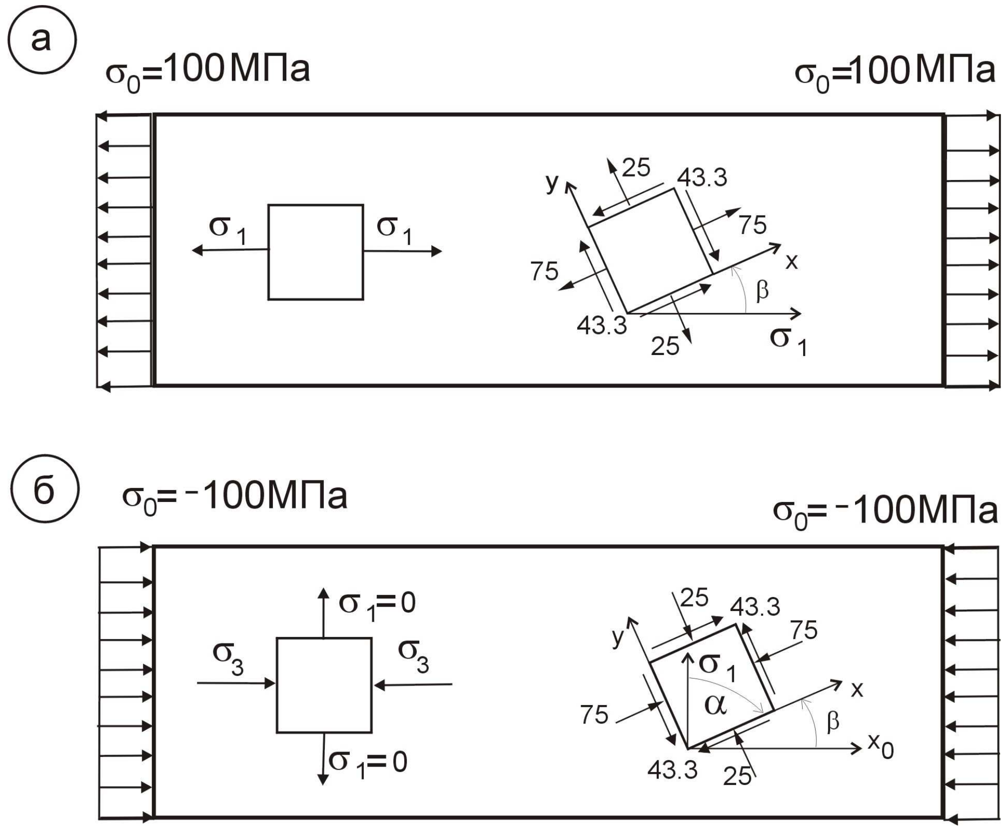

а
σ0=100МПа
σ0=100МПа
σ1
σ1
y
25
43.3
75
x
75
β
43.3
25
σ1
б
σ0= -100МПа
σ0= -100МПа
σ1=0
σ3
σ3
σ1=0
25
43.3
y
75
σ1
x
75
α
β
x0
43.3
25

Рис. 3