РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО КИНЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЕ К-1

Точка движется в координатной плоскости *xy*. Закон движения точки задан уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ (*x*, *y* - в сантиметрах, *t* - в секундах). Определить траекторию точки и для момента времени $t = t_1$, сек. найти:

- положение точки на траектории;
- скорость и ускорение точки;
- касательную и нормальную составляющие ускорения;
- радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Необходимые данные для расчета приведены в таблице 1.

Таблица I.

Вариант	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	t_1 , сек
1	$x = 2t^2 + 3$	$y = -5t$	*0.5*
2	$x = 4\cos\left(\frac{pt}{3}\right) + 2$	$y = 4\sin\left(\frac{pt}{3}\right)$	1.0
3	$x = -\cos\left(\frac{pt}{3}\right) + 3$	$y = \sin\left(\frac{pt}{3}\right) - 1$	1.0
4	$x = 4t + 4$	$y = \frac{4}{t+1}$	2.0
5	$x = 2\sin\left(\frac{pt}{3}\right)$	$y = -3\cos\left(\frac{pt}{3}\right) + 4$	1.0
6	$x = 3t^2 + 2$	$y = 4t$	0.5
7	$x = 3t^2 - t + 1$	$y = 5t^2 - \frac{5t}{3} - 2$	1.0
8	$x = 7\sin\left(\frac{pt}{6}\right) + 3$	$y = 2 - 7\cos\left(\frac{pt}{6}\right)$	1.0
9	$x = \frac{-3}{(t+2)}$	$y = 3t + 6$	2.0
10	$x = -4\cos\frac{pt}{3}$	$y = -2\sin\left(\frac{pt}{3}\right) - 3$	1.0
11	$x = -4t^2 + 1$	$y = -3t$	0.5
12	$x = 5\sin\left(\frac{pt}{6}\right)$	$y = -5\cos\left(\frac{pt}{6}\right) - 3$	1.0
13	$x = 5\cos\left(\frac{pt}{3}\right)$	$y = -5\sin\left(\frac{pt}{3}\right)$	1.0
14	$x = -2t - 2$	$y = -\frac{2}{t+1}$	2.0
15	$x = 4\cos\left(\frac{pt}{3}\right)$	$y = -3\sin\left(\frac{pt}{3}\right)$	1.0

Вариант	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	t_1 , сек
16	$x = 3t$	$y = 4t^2 + 1$	0.5
17	$x = 7\sin\left(\frac{pt}{6}\right) - 5$	$y = -7\cos\left(\frac{pt}{6}\right)$	1.0
18	$x = 1 + 3\cos\left(\frac{pt}{3}\right)$	$y = 3\sin\left(\frac{pt}{3}\right) + 3$	1.0
19	$x = -5t^2 - 4$	$y = 3t$	1.0
20	$x = 2 - 3t - 6t^2$	$y = 3 - \frac{3t}{2} - 3t^2$	0.0
21	$x = 6\sin\left(\frac{pt}{6}\right) - 2$	$y = 6\cos\left(\frac{pt}{6}\right) + 3$	1.0
22	$x = 7t^2 - 3$	$y = 5t$	0.25
23	$x = 3 - 3t^2 + t$	$y = 4 - 5t^2 + \frac{5t}{3}$	1.0
24	$x = -4\cos\left(\frac{pt}{3}\right) - 1$	$y = -4\sin\left(\frac{pt}{3}\right)$	1.0
25	$x = -6t$	$y = -2t^2 - 4$	1.0
26	$x = 8\cos\left(\frac{pt}{6}\right) + 2$	$y = -8\sin\left(\frac{pt}{6}\right) - 7$	1.0
27	$x = -3 - 9\sin\left(\frac{pt}{6}\right)$	$y = -9\cos\left(\frac{pt}{6}\right) + 5$	1.0
28	$x = -4t^2 + 1$	$y = -3t$	1.0
29	$x = 5t^2 + \frac{5t}{3} - 3$	$y = 3t^2 + t + 3$	1.0
30	$x = 2\cos\left(\frac{pt}{3}\right) - 2$	$y = -2\sin\left(\frac{pt}{3}\right) + 3$	1.0

Пример выполнения задания К-1

Заданы уравнения движения точки

$$\left.\begin{array}{l} x = 4t^2 + 1 \\ y = 2t \end{array}\right\} \quad (1)$$

(x, y - в сантиметрах, t - в секундах).

Определить траекторию точки и для момента времени $t_1 = 1$ сек. найти:

- положение точки на траектории;
- скорость и ускорение точки;
- касательную и нормальную составляющие ускорения;
- радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение:

1. Уравнения движения точки (1) можно рассматривать как уравнения ее траектории в параметрической форме. При этом параметром является время *t*. Чтобы найти уравнение траектории точки в координатной форме, необходимо исключить из уравнений (1) параметр *t*. В результате получим

$$x = y^2 + 1 \quad . \tag{2}$$

Уравнение (2) есть уравнение параболы, осью симметрии которой является ось *Ox* (рис.1.1).

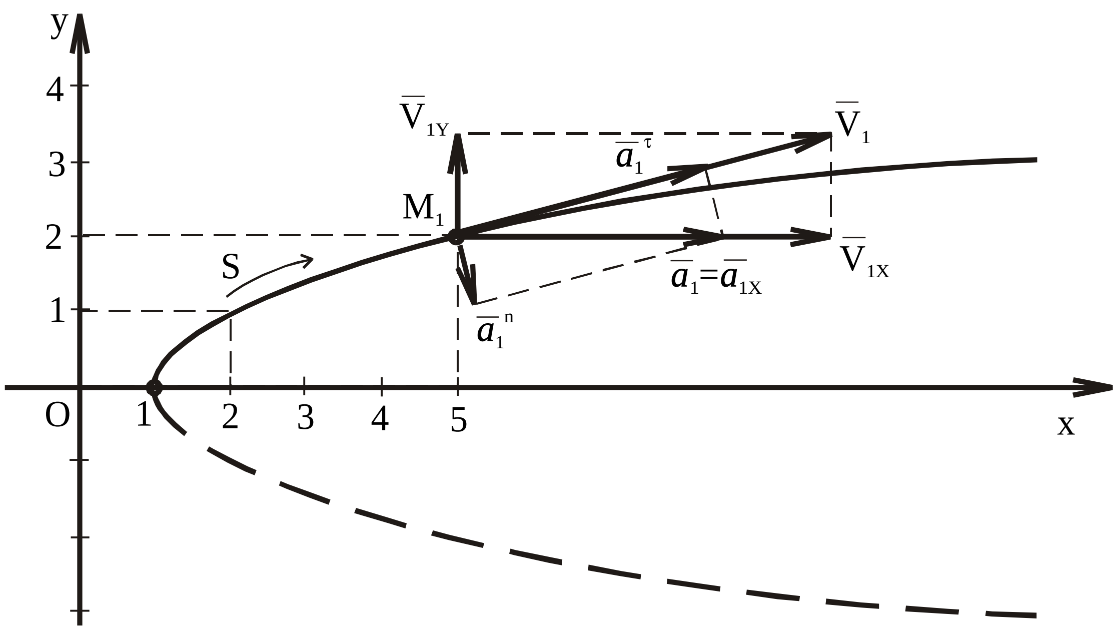

Рис. 1.1

Из уравнений (1) следует, что координаты *x* и *y* все время положительны, так как время $t \geq 0$. Таким образом, траекторией точки является верхняя ветвь параболы, показанная на рис.1.1 сплошной линией.

2. Подставляя значение времени $t_1 = 1$ сек. в уравнения (1), найдем координаты точки в указанный момент времени:

$$x_1 = 5 \text{ см}, \qquad y_1 = 2 \text{ см} \quad . \tag{3}$$

На основании (3) покажем положение точки на траектории (рис.1.1).

3. Для определения скорости точки найдем проекции вектора скорости на оси координат по формулам

$$\left.\begin{aligned} V_X &= \dot{x} = 8t \\ V_Y &= \dot{y} = 2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

По найденным проекциям вектора скорости на оси координат нетрудно найти модуль скорости (*V*) и ее направление

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{64t^2 + 4} \tag{5}$$

В момент времени $t_1 = 1$ сек.

$$V_{1x} = 8 \text{ см/с}, \qquad V_{1y} = 2 \text{ см/с}, \qquad V_1 = 8{,}124 \text{ см/с}. \tag{6}$$

На основании (6) вектор скорости $\vec{V}_1$ строим в точке M_1 траектории как геометрическую сумму составляющих $\vec{V}_{1x}$ и $\vec{V}_{1y}$ ($\vec{V}_1 = \vec{V}_{1x} + \vec{V}_{1y}$, где $\vec{V}_{1x} = V_{1x}\vec{i}$, $\vec{V}_{1y} = V_{1y}\vec{j}$; $\vec{i}$, $\vec{j}$ - орты осей x и y). При этом вектор $\vec{V}_1$ должен быть направлен по касательной к траектории точки (рис. 1.1).

4. Аналогично найдем ускорение точки по его проекциям на координатные оси:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = 8 \\ a_y &= \ddot{y} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} = 8 \quad \text{см/с}^2 \ . \tag{8}$$

Как следует из (7) и (8), в данном случае проекции вектора ускорения на оси координат, а также его модуль не зависят от времени t, то есть являются постоянными величинами. Таким образом, в момент времени $t_1 = 1$ сек, учитывая (7) и (8),

$$a_{1x} = 8 \ \text{см/с}^2 \ , \qquad a_{1y} = 0 \ \text{см/с}^2 \ , \tag{9}$$

$$a_1 = 8 \ \text{см/с}^2 \ . \tag{10}$$

На основании (9) вектор ускорения $\vec{a}_1$, строим в точке M_1, как геометрическую сумму составляющих $\vec{a}_{1x}$ и $\vec{a}_{1y}$ ($\vec{a}_1 = \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{1y}$, где $\vec{a}_{1x} = a_{1x}\vec{i}$, $\vec{a}_{1y} = a_{1y}\vec{j}$; $\vec{i}$, $\vec{j}$ - орты осей x и y). В рассматриваемом случае $a_1 = a_{1x}$ (рис.1.1).

5. Определим касательную и нормальную составляющие ускорения точки. Касательная составляющая ускорения характеризует изменение вектора скорости по модулю, а нормальная составляющая характеризует изменение вектора скорости по направлению.

Модуль касательного ускорения точки ($|\vec{a}_t|$) можно найти на основании формулы

$$|\vec{a}_t| = \left|\frac{dV}{dt}\right| \ . \tag{11}$$

Принимая во внимание соотношение (5), производную dV/dt можно представить в виде

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{64t^2 + 4}\right) = \frac{64 \cdot 2 \cdot t}{2\sqrt{64t^2 + 4}} \ . \tag{12}$$

Для момента времени $t_1 = 1$ сек. на основании (12) с учетом (6) и (9) получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{64 \cdot 2 \cdot t}{2\sqrt{64t^2 + 4}} = 7{,}76 \qquad \text{см/с}^2 \ . \tag{13}$$

Таким образом, модуль касательного ускорения точки в момент времени $t_1 = 1$ сек.

$$|\vec{a}_t| = 7{,}76 \quad \text{см/с}^2 \ . \tag{14}$$

Знак "+" при dV/dt показывает, что модуль скорости возрастает, то есть движение точки является ускоренным и, следовательно, направления векторов $\vec{V}_1$ и $\vec{a}_{1t}$ совпадают (рис.1.1). Модуль нормального ускорения точки определим по формуле

$$|\vec{a}_n| = \sqrt{a^2 - a_t^2} \quad . \tag{15}$$

Для момента времени $t_1 = 1$ сек, учитывая (8) и (14), на основании (15) получим

$$|\vec{a}_{1n}| = \sqrt{8^2 - 7{,}76^2} = 1{,}94 \quad \text{см/с}^2 \ . \tag{16}$$

Нормальное ускорение точки направлено перпендикулярно касательному ускорению в сторону вогнутости кривой (рис.1.1). Ускорение $\vec{a}$ найдено как по составляющим $\vec{a}_{1x}$ и $\vec{a}_{1y}$, так и по составляющим $\vec{a}_{1n}$ и $\vec{a}_{1t}$ чем проверяется правильность проведенных вычислений.

6. Радиус кривизны траектории (r) в данной точке можно определить на основании формулы для нормального ускорения

$$|\vec{a}_n| = \frac{V^2}{r} \quad . \tag{17}$$

Таким образом, в точке M_1 траектории (где находится точка при t_1= 1 сек.), учитывая (6), (16) и (17), получим

$$r_1 = \frac{V_1^2}{|\vec{a}_{1n}|} = 35 \quad \text{см} \ . \tag{18}$$

Примечание. В случаях, если траекторией точки является либо некоторая прямая, либо окружность определенного радиуса, радиус кривизны такой траектории в каждой точке известен заранее. При этом формулы, приведенные в пункте 6, могут служить основанием для проверки результатов, получаемых в пунктах 3-5.

ЗАДАНИЕ К-2

Тело D (рис.2.1-2.6) вращается вокруг неподвижной оси по закону $j = j(t)$ (j измеряется в радианах, t - в секундах; положительное направление отсчета угла j показано на рисунках дуговой стрелкой). По телу вдоль прямой AB (рис.2.1, 2.5, 2.6), или по окружности радиуса R (рис.2.2-2.4) движется точка M по закону $S=OM=f(t)$ см (положительное и отрицательное направления отсчета координаты S от точки O указаны соответственно знаками плюс (+) и минус (-)). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t=t_1$ сек. Необходимые данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

№ вар.	№ рис.	Уравнение вращательного движения $j = j(t)$ (рад)	Уравнение движения точки M $OM = S = f(t)$ (см)	t_1 (сек)	R (см)	a (см)
1	2.1	$2pt^2$	$16\cos(pt/4)$	2	-	16
2	2.2	$2pt^2$	$10pt$	0.5	10	-
3	2.3	$2pt$	$5pt$	0	5	4
4	2.4	pt^2	$20p\sin(pt/3)$	0,5	20	-
5	2.5	$\sin(pt/6)$	$5 - 2t^2$	1	-	5
6	2.6	t^3	$7 - 4t^2$	1	-	7
7	2.1	$2t$	$5 – 5t^2$	1	-	5
8	2.2	pt^3	$20pt$	1	20	-
9	2.3	$3pt^2$	$20pt^2$	1	80	60
10	2.4	pt^3	$5pt^2$	1	5	-
11	2.5	$\cos(pt/3)$	$3t – t^2$	1	-	3
12	2.6	t^2	$4\sin(pt/4)$	2	-	4
13	2.1	pt^2	$6\sin(pt/6)$	1	-	6
14	2.2	$2pt$	$10pt^2$	1	10	-
15	2.3	pt^3	$p(2 – t^2)$	1	1	2
16	2.4	$2pt$	$10p\cos(pt/6)$	2	10	-
17	2.5	$\cos(pt/2)$	t^2	1	-	2
18	2.6	$2t$	$8\sin(pt/2)$	2	-	8
19	2.1	$p(t^2 + 3t)$	$3t^2 - 8t$	1	-	8
20	2.2	pt^2	$8pt$	1,5	8	-
21	2.3	$4pt^2$	$2p(t + t^2)$	2	12	10
22	2.4	$4 + 2pt^2$	$3p(2 – t^3)$	1	2	-
23	2.5	$\cos(pt/6)$	$2 – 4t^2$	1	-	4
24	2.6	$3t – t^2$	$2t^2 - 4$	1	-	6
25	2.1	$8pt + pt^2$	$4\cos(pt/2)$	1	-	4
26	2.2	$3pt^2$	$40pt^2$	0,5	20	-
27	2.3	$2pt^3$	$20pt$	1	8	6

№ вар.	№ рис.	Уравнение вращательного движения $j = j(t)$ (рад)	Уравнение движения точки M $OM = S = f(t)$ (см)	t_1 (сек)	R (см)	a (см)
28	2.4	$0,6\ pt^2$	$p(10t - 2t^2)$	1	16	-
29	2.5	$sin(pt/3)$	$1 - 2t^2$	1	-	2
30	2.6	$2t$	$4\ cos(pt/3)$	1	-	4

Пример выполнения задания К-2

Диск радиуса $R = 0,5$ м вращается вокруг своего вертикального диаметра OB (рис.2.7) по закону $j = t^3 - 2t^2$ (j измеряется в радианах, t - в секундах; положительное направление отсчета угла j показано на рисунке дуговой стрелкой). По ободу диска движется точка M по закону $S = \breve{OM} = \frac{pR}{6}\left(7t - 2t^2\right)$ м. (положительное и отрицательное направления отсчета дуговых координат S от точки O указаны соответственно знаками плюс (+) и минус (-)). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ секунда.

Решение. Для определенности свяжем жестко с диском систему координат O_1xyz (координатная плоскость O_1yz совмещена с плоскостью диска). Движение точки M рассматриваем как сложное. Вращение диска (подвижной системы координат O_1xyz) вокруг вертикальной неподвижной оси O_3z_1 считаем переносным. При этом движение точки M по ободу диска будет относительным. Рассмотрим более полно эти движения.

1. Закон переносного вращательного движения задан уравнением

$$j = t^3 - 2t^2 \quad . \qquad (1)$$

Определим угловую скорость и угловое ускорение переносного вращения как алгебраические величины:

$$w_e = \dot{j} = 3t^2 - 4t \quad ;$$

$$e_e = \dot{w}_e = 6t - 4 \quad .$$

В момент времени $t_1 = 1$ сек.

$$w_e = -1 \text{ с}^{-1} \quad ; \qquad e_e = 2 \text{ с}^{-2} \quad . \qquad (2)$$

Знак угловой скорости определяет направление вращения тела вокруг неподвижной оси. В рассматриваемом случае $w_e < O$. Это означает, что вращение в момент времени $t_1 = 1$ сек. происходит в направлении убывания угла j (то есть в отрицательном направлении отсчета j). Путем сопоставления знаков угловой скорости и углового ускорения можно установить характер вращательного движения, то есть является оно ускоренным или замедленным. В рассматриваемом случае, как следует из (2), знаки угловой скорости и углового ускорения разные ($w_e < 0$, $e_e > 0$). Это

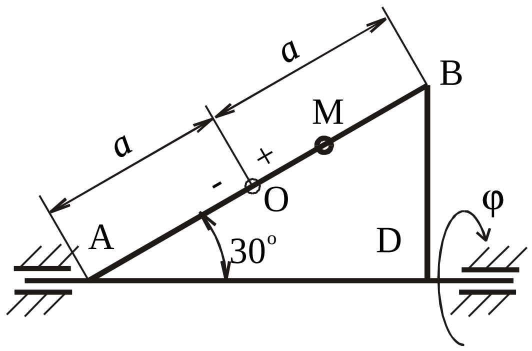

Рис. 2.1

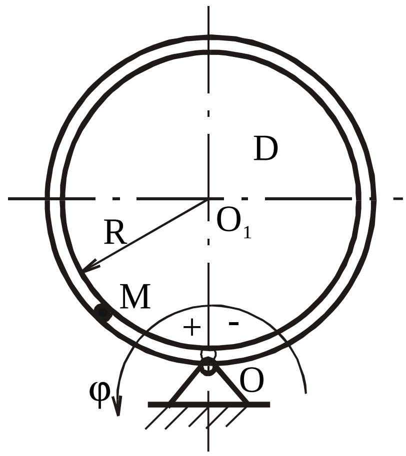

Рис. 2.2

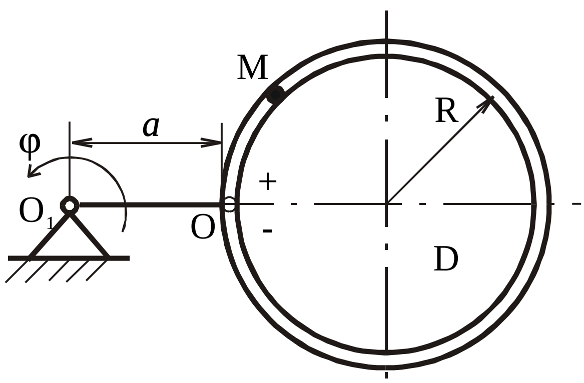

Рис. 2.3

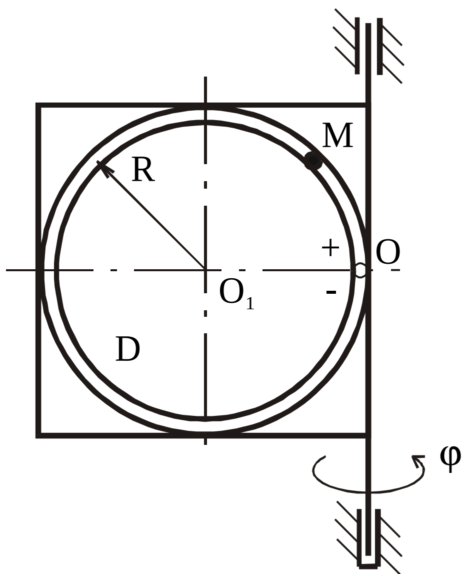

Рис. 2.4

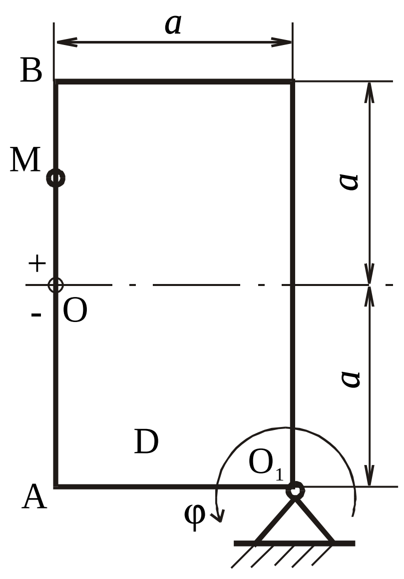

Рис. 2.5

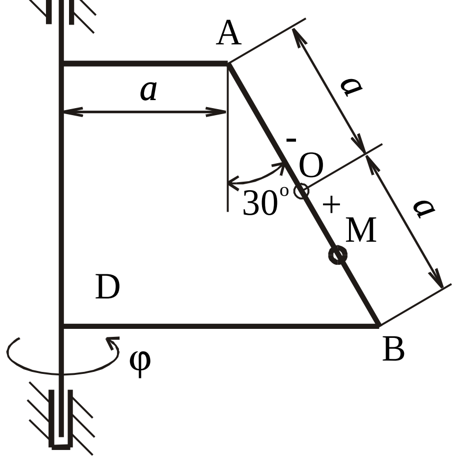

Рис. 2.6

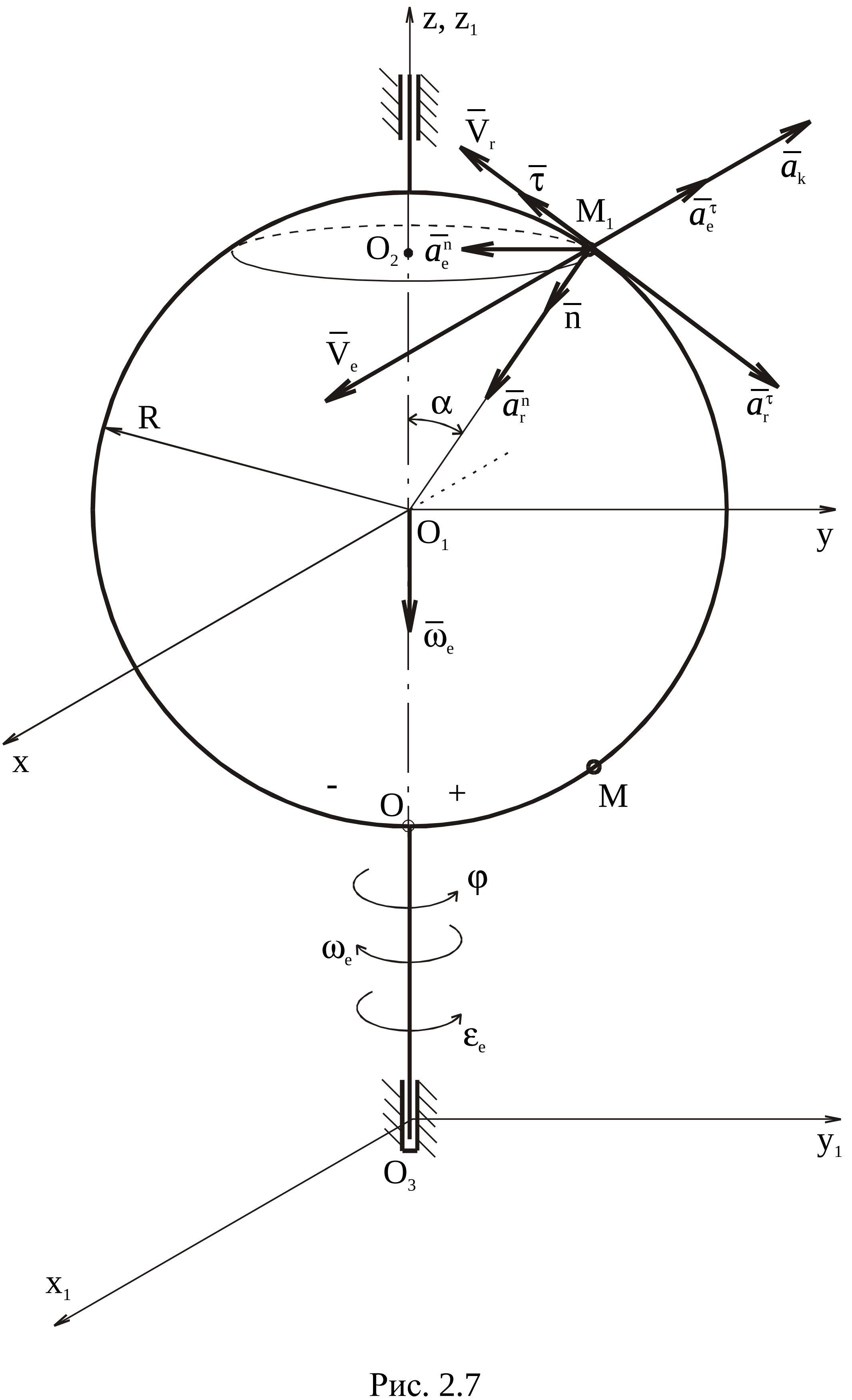

Рис. 2.7

показывает, что в момент времени $t_1=1$ сек. абсолютная величина угловой скорости убывает, то есть вращение диска является замедленным. Угловая скорость и угловое ускорение на рисунке 2.5 условно показаны дуговыми стрелками вокруг оси вращения.

2. Относительное движение точки M задано естественным способом, так как известны: траектория относительного движения (окружность радиуса $R=0,5$ м с центром в точке O_1), начало и положительное направление отсчета дуговых координат S, а также закон движения точки по траектории, определяемый уравнением

$$S = \frac{pR}{6}\left(7t - 2t^2\right) \quad \text{м} \quad . \tag{3}$$

Сначала установим положение точки M на дуге окружности в момент времени $t_1=1$ сек. Подставляя в уравнение (3) $t_1=1$ сек., получим

$$S_1 = \frac{5pR}{6} \quad (\text{м}) \tag{4}$$

Центральный угол, соответствующий дуге окружности (4), определится по формуле

$$\angle OO_1M_1 = \frac{S_1}{R} = \frac{5p}{6} \quad \text{рад.}$$

Таким образом, как следует из рисунка 2.5, угол

$$a = p - \frac{5p}{6} = \frac{p}{6} \quad \text{рад.}$$

В положении точки M_1, покажем орты двух естественных осей $\vec{t}$ и $\vec{n}$ (орт $\vec{t}$ направляется по касательной к окружности радиуса R в сторону возрастания дуговых координат S, а орт главной нормали $\vec{n}$ - к центру окружности O_1).

3. Найдем абсолютную скорость точки M по формуле:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad , \tag{5}$$

где $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ соответственно переносная и относительная скорости точки.

Для определения переносной скорости точки в момент времени $t_1=1$ сек. нужно мысленно остановить относительное движение точки в положении M_1, и определить ее скорость как точки, жестко связанной с подвижной системой координат, то есть с диском. Диск, как было указано выше, совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси O_3z_1. В силу этого величина переносной скорости (V_e) определится по формуле

$$V_e = |w_e| h \tag{6}$$

где h - расстояние от точки M_1 до оси вращения. Из прямоугольного треугольника $O_1M_1O_2$ (рис.2.5)

$$h = M_1O_2 = R \cdot \sin a = 0{,}5 \cdot \sin\frac{p}{6} = 0{,}25 \quad \text{м.} \tag{7}$$

Таким образом, на основании (6) с учетом (2) и (7) величина переносной скорости точки M в момент $t_1=1$ сек. будет

$$V_e = 0{,}25 \quad \text{м/с.} \tag{8}$$

Вектор $\vec{V}_e$ направлен перпендикулярно плоскости диска (значит параллельно оси O_1x) в направлении вращения, указанному дуговой стрелкой w_e.

Для определения относительной скорости точки M_1 ($\vec{V}_r$) нужно мысленно остановить переносное движение (вращательное движение диска) и найти скорость точки при ее движении по окружности радиуса R по закону (3). Проекция вектора $\vec{V}_r$ на направление орта $\vec{t}$ определяется по формуле:

$$V_{rt} = \dot{S} = \frac{pR}{6}(7-4t) \quad . \tag{9}$$

В момент времени $t_1=1$ секунда

$$V_{rt} = \frac{pR}{2} = \frac{p}{4} \quad \text{м/с.} \tag{10}$$

Положительный знак проекции V_{rt} указывает, что вектор $\vec{V}_r$ направлен в сторону $\vec{t}$. В общем случае величина относительной скорости (V_r) определяется по формуле

$$V_r = |V_{rt}| = \frac{p}{4} \approx 0{,}785 \quad \text{м/с.} \tag{11}$$

Так как векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно перпендикулярны (вектор $\vec{V}_r$ расположен в координатной плоскости O_1yz, а вектор $\vec{V}_e$ параллелен оси O_1x), величина абсолютной скорости (V_a) может быть определена на основании теоремы Пифагора. В момент времени $t_1=1$ сек.

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 0{,}82 \quad \text{м/с.} \tag{12}$$

4. Определим абсолютное ускорение точки M.

В рассматриваемом случае переносное движение не является поступательным. В силу этого найдем абсолютное ускорение точки на основании теоремы Кориолиса по формуле

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k \quad , \tag{13}$$

где $\vec{a}_e$, $\vec{a}_r$, $\vec{a}_k$ - соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения точки.

При определении абсолютного ускорения целесообразно разложить $\vec{a}_e$ и $\vec{a}_r$ на нормальную и касательную составляющие

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,t} \quad , \qquad \vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,t} \quad .$$

При этом соотношение (13) примет вид

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,t} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,t} + \vec{a}_k \tag{14}$$

При определении переносного ускорения точки в момент времени $t_1=1$ сек. аналогично, как и при определении переносной скорости, мысленно останавливаем относительное движение и определяем ускорение точки M_1 как точки, неизменно связанной с диском (с подвижной системой координат). При вращательном движении диска вокруг неподвижной оси

O_3z_1 величины нормального и касательного ускорения точки M_1 диска определяются соответственно по формулам

$$\left|\vec{a}_e^{\,n}\right| = \omega_e^2 h = 0{,}25 \quad \text{м/с}^2 \;, \tag{15}$$

$$\left|\vec{a}_e^{\,\tau}\right| = \left|\varepsilon_e\right| h = 0{,}5 \quad \text{м/с}^2 \;. \tag{16}$$

Вектор $\vec{a}_e^{\,n}$ направлен по радиусу окружности, описываемой точкой M_1 диска, к центру этой окружности - точке O_2 ($\vec{a}_e^{\,n}$ параллелен оси O_1y). Ускорение $\vec{a}_e^{\,\tau}$ направлено по касательной к этой окружности, то есть перпендикулярно $\vec{a}_e^{\,n}$ ($\vec{a}_e^{\,\tau}$ параллелен оси O_1x). Так как диск в указанный момент времени $t_1=1$ сек. вращается замедленно, то векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{a}_e^{\,\tau}$ направлены в противоположные стороны, то есть направление вектора $\vec{a}_e^{\,\tau}$ определяется направлением углового ускорения ε_e , которое показано на рис. 2.7 дуговой стрелкой.

Относительное движение, как было подчеркнуто выше, задано естественным способом. При этом проекции относительного ускорения точки на естественные оси, положительные направления которых определяются ортами $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$, можно найти по формулам

$$a_{r\tau} = \ddot{S} = -\frac{2}{3}\pi R = -\frac{\pi}{3} = -1{,}047 \qquad \text{м/с}^2 \;, \tag{17}$$

$$a_{rn} = \frac{V_r^2}{r} = \frac{V_r^2}{R} = 1{,}232 \qquad \text{м/с}^2 \,. \tag{18}$$

Отрицательный знак проекции $a_{r\tau}$ указывает, что вектор $\vec{a}_r^{\,\tau}$ направлен в противоположную сторону орта $\vec{\tau}$. Нормальное ускорение всегда направлено в сторону орта $\vec{n}$, то есть по главной нормали к центру кривизны траектории точки. Таким образом, в рассматриваемом случае вектор $\vec{a}_r^{\,n}$ направлен к центру O_1, окружности радиуса R, являющейся траекторией относительного движения точки. Величины относительного касательного ($\left|\vec{a}_r^{\,\tau}\right|$) и относительного нормального ($\left|\vec{a}_r^{\,n}\right|$) ускорений согласно (17) и (18) будут соответственно равны

$$\left|\vec{a}_r^{\,\tau}\right| = \left|a_{r\tau}\right| = 1{,}047 \quad \text{м/с}^2 \,, \tag{19}$$

$$\left|\vec{a}_r^{\,n}\right| = a_{rn} = 1{,}232 \quad \text{м/с}^2 \,. \tag{20}$$

Ускорение Кориолиса ($\left|\vec{a}_k\right|$) определяется по формуле

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r \quad . \tag{21}$$

Вектор угловой скорости переносного вращения $\vec{\omega}_e$ направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение наблюдается против хода часовой стрелки (рис.2.5). В момент времени $t_1=1$ сек., учитывая (2),

$$\left|\vec{\omega}_e\right| = 1 \quad \text{сек}^{-1}. \tag{22}$$

Модуль ускорения Кориолиса ($|\vec{a}_k|$) на основании свойств векторного произведения двух векторов, очевидно, равен

$$|\vec{a}_k| = 2 \cdot |\vec{w}_e| \cdot |\vec{V}_r| \cdot \sin(\vec{w}_e \wedge \vec{V}_r) \quad . \tag{23}$$

Учитывая (22), (11), на основании (23) получим:

$$|\vec{a}_k| = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}785 \cdot \sin 120° = 1{,}36 \quad \text{м/с}^2. \tag{24}$$

Направление ускорения Кориолиса определяется направлением векторного произведения векторов $\vec{w}_e$ и $\vec{V}_r$, то есть направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{w}_e$ и $\vec{V}_r$ (вектор $\vec{w}_e$ при этом нужно перевести в точку M_1) в сторону, откуда кратчайшее совмещение $\vec{w}_e$ с $\vec{V}_r$ видно против хода часовой стрелки. Так как векторы $\vec{w}_e$ и $\vec{V}_r$ расположены в координатной плоскости O_1yz, то $\vec{a}_k$ направлено параллельно оси O_1x в сторону, противоположную оси O_1x.

Направление ускорения Кориолиса можно найти другим способом, применив правило Н.Е.Жуковского. Суть правила Н.Е.Жуковского состоит в следующем. Прежде всего нужно найти проекцию вектора $\vec{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (на плоскость O_1xy). В данном случае эта проекция направлена также, как вектор $\vec{a}_e^{\,n}$. Затем необходимо повернуть найденную проекцию в направлении вращения, указанному дуговой стрелкой w_e, на угол $\pi/2$. Полученное в результате поворота направление проекции относительной скорости будет соответствовать направлению $\vec{a}_k$.

Для определения абсолютного ускорения найдем его проекции на оси координат x, y, z. Согласно (14) проекция абсолютного ускорения на любую ось равна алгебраической сумме проекций ускорений $\vec{a}_e^{\,n}$, $\vec{a}_e^{\,t}$, $\vec{a}_r^{\,n}$, $\vec{a}_r^{\,t}$, $\vec{a}_k$ на ту же ось. Проекции этих ускорений на оси координат легко найти из чертежа. Таким образом, для момента времени $t_1=1$ сек.

$$a_{ax} = -|\vec{a}_e^{\,t}| - |\vec{a}_k| = -0{,}5 - 1{,}36 = -1{,}86 \quad \text{м/с}^2 \ ,$$

$$a_{ay} = -|\vec{a}_e^{\,n}| - |\vec{a}_r^{\,n}| \cdot \cos 60° + |\vec{a}_r^{\,t}| \cdot \cos 30° = -0{,}25 - 1{,}232 \cdot \frac{1}{2} + 1{,}047 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}04 \ \text{м/с}^2,$$

$$a_{az} = |\vec{a}_r^{\,n}| \cdot \cos 30° - |\vec{a}_r^{\,t}| \cdot \cos 60° = -1{,}232 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1{,}047 \cdot \frac{1}{2} = -1{,}59 \quad \text{м/с}^2 \ .$$

По найденным трем проекциям абсолютного ускорения нетрудно найти его модуль и направление. Модуль абсолютного ускорения

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{1{,}86^2 + 0{,}04^2 + 1{,}59^2} = 2{,}45 \quad \text{м/с}^2 \ .$$

ЗАДАНИЕ К-3

В планетарном механизме (рис.3.1-3.6) шестерня I радиуса R_1 неподвижна, а кривошип *OA*, вращаясь вокруг неподвижной оси, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение свободно насаженную на его конец *A* шестерню II радиуса R_2 . Для указанного на рисунке положения механизма найти скорости и ускорения точек *A* и *B*, если для соответствующего момента времени известны абсолютные величины угловой скорости и углового ускорения кривошипа (w_{OA}, e_{OA}). На рисунках условно показаны направления угловой скорости и углового ускорения дуговыми стрелками вокруг оси вращения. При этом направление угловой скорости соответствует направлению вращательного движения кривошипа. Угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости при ускоренном вращении и в противоположную - при замедленном. Необходимые данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

№ варианта	№ рисунка	w_{OA} ($с^{-1}$)	e_{OA} ($с^{-2}$)	R_1 (м)	R_2 (м)	a (град.)
1	3.1	1	9	0,5	0,1	0
2	3.2	1	8	0,6	0,1	30
3	3.3	2	7	0,7	0,2	60
4	3.4	2	6	0,8	0,2	90
5	3.5	2	3	0,6	0,1	60
6	3.6	3	5	0,7	0,2	120
7	3.1	3	5	0,9	0,3	120
8	3.2	3	4	0,5	0,5	150
9	3.3	4	3	0,6	0,4	180
10	3.4	4	2	0,7	0,4	210
11	3.5	2	4	0,7	0,2	90
12	3.6	3	6	0,7	0,2	150
13	3.1	5	1	0,8	0,5	240
14	3.2	1	1	0,5	0,1	0
15	3.3	2	2	0,5	0,2	30
16	3.4	3	1	0,6	0,3	60
17	3.5	4	7	0,8	0,3	180
18	3.6	5	9	0,8	0,3	240
19	3.1	4	2	0,6	0,4	90
20	3.2	5	1	0,7	0,5	120
21	3.3	6	2	0,7	0,1	150
22	3.4	7	1	0,8	0,2	180
23	3.5	4	8	0,8	0,3	210
24	3.6	1	1	0,5	0,1	0
25	3.1	8	2	0,8	0,3	210

№ варианта	№ рисунка	w_{OA} (c^{-1})	e_{OA} (c^{-2})	R_1 (м)	R_2 (м)	a (град.)
26	3.2	9	1	0,9	0,4	240
27	3.3	1	1	0,6	0,1	0
28	3.4	1	2	0,6	0,1	30
29	3.5	1	2	0,6	0,2	30
30	3.6	2	3	0,6	0,3	60

Пример выполнения задания К-3

Дано: кинематическая схема планетарного механизма (рис.3.7); R_1= 0,6 м ; R_2= 0,4 м ; w_{OA} = 1 с$^{-1}$; e_{OA} = 1 с$^{-2}$. Определить скорости и ускорения точек A и B, показанных на рисунке, если a = 60°.

Решение: Рассмотрим последовательно движения каждого из двух подвижных звеньев планетарного механизма. Начинать при этом необходимо со звена, угловая скорость и угловое ускорение которого заданы. Таким образом, начнем исследование кинематики механизма с кривошипа.

1. Кривошип OA совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Определим скорость и ускорение точки A кривошипа, которая одновременно принадлежит и подвижной шестерне II.

Абсолютная величина скорости точки A (V_A) определяется по формуле

$$V_A = w_{OA} \cdot |OA| = w_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \quad . \tag{1}$$

Для заданного положения механизма

$$V_A = 1 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \quad \text{м/с} \quad . \tag{2}$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно OA (радиусу вращения) в направлении вращения, указанному на рис.3.5 дуговой стрелкой w_{OA}.

Ускорение точки A представим разложенным на касательную и нормальную составляющие

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t \quad . \tag{3}$$

Величины нормального (a_A^n) и касательного (a_A^t) ускорений определяются соответственно по формулам:

$$a_A^n = w_{OA}^2 \cdot |OA| = w_{OA}^2 \cdot (R_1 + R_2) \quad , \tag{4}$$

$$a_A^t = e_{OA} \cdot |OA| = e_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \ . \tag{5}$$

Для заданного положения механизма

$$a_A^n = 1^2 (0,6 + 0,4) = 1 \ \text{м/с}^2 \ . \tag{6}$$

$$a_A^t = 1 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \ \text{м/с}^2 \ . \tag{7}$$

При этом нормальное ускорение точки A ($\vec{a}_A^n$) направлено по радиусу окружности, описываемой точкой к центру этой окружности - к точке O.

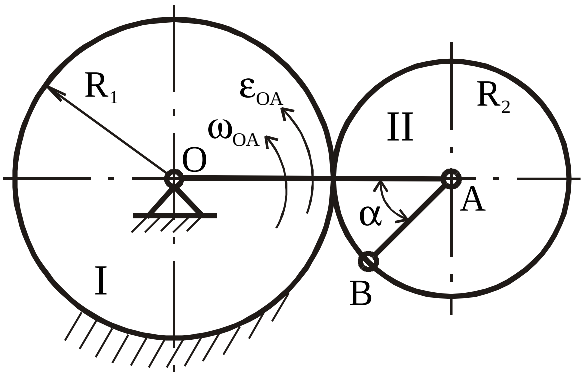

Рис. 3.1

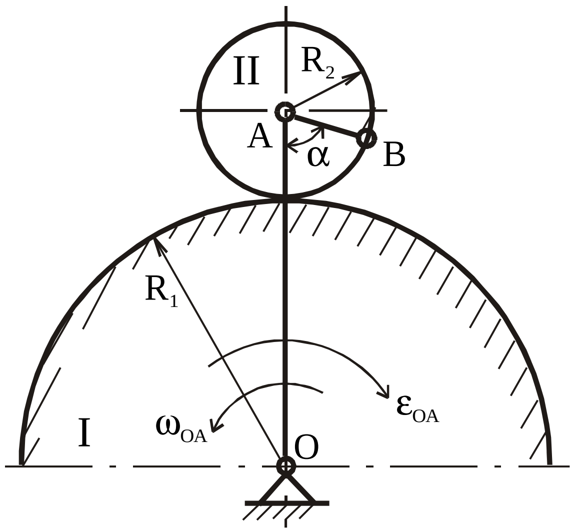

Рис. 3.2

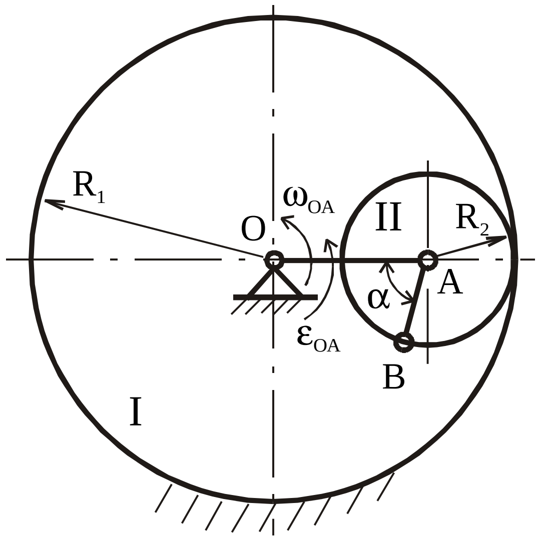

Рис. 3.3

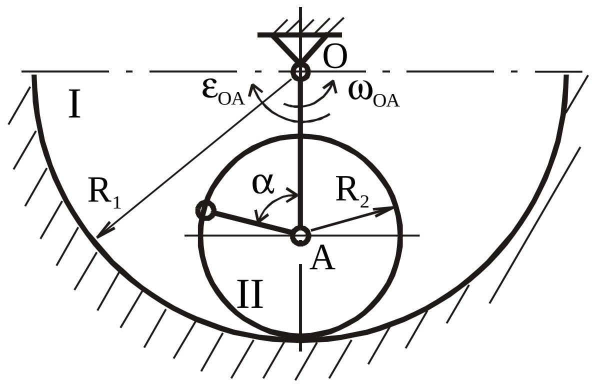

Рис. 3.4

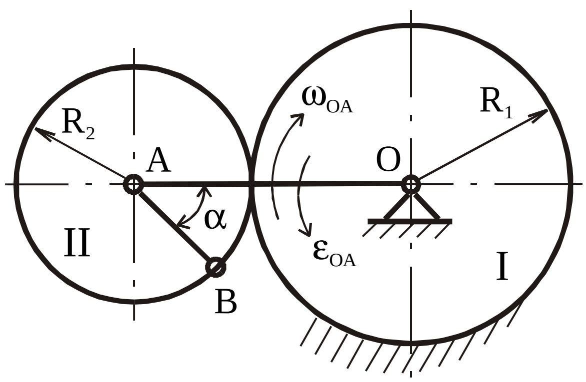

Рис. 3.5

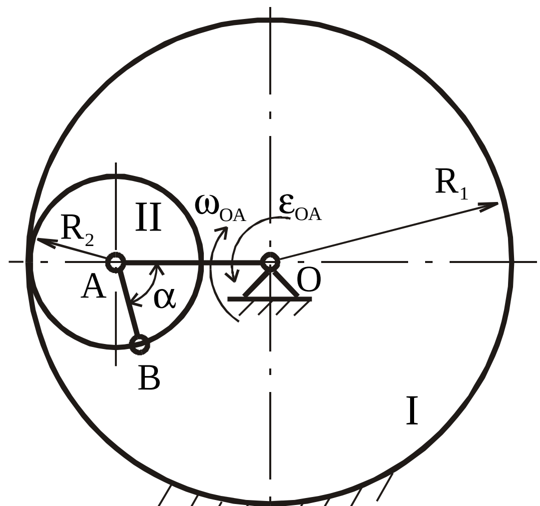

Рис. 3.6

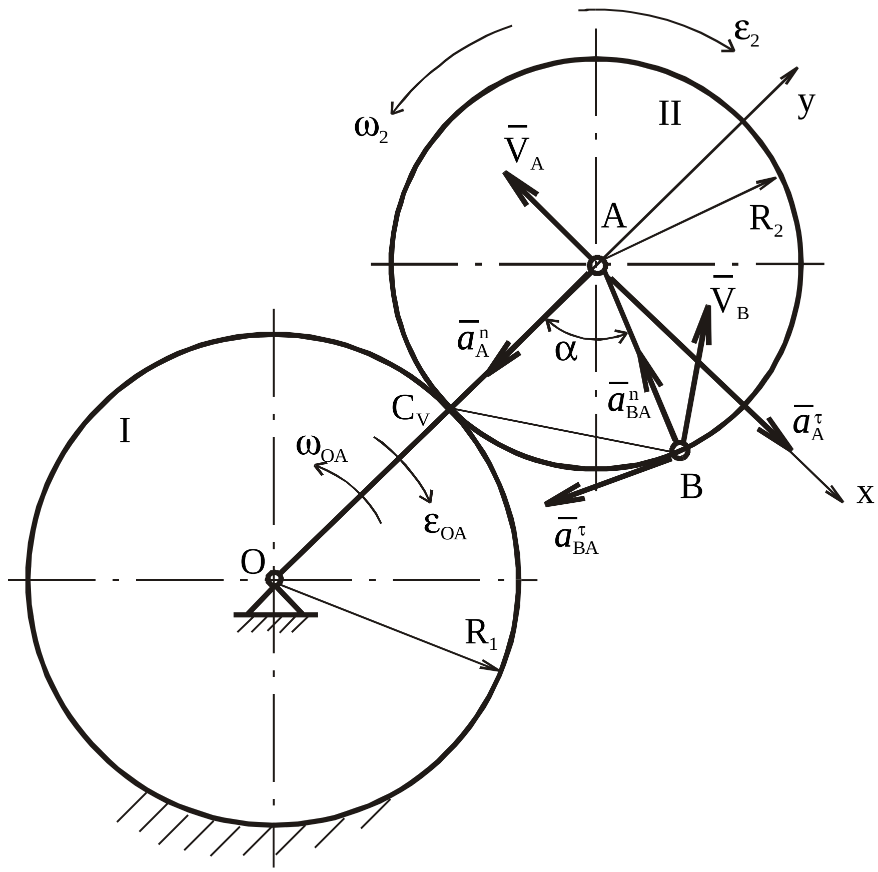

Рис. 3.7

Касательное ускорение $(\overset{\mathbf{r}}{a}{}_A^t)$ направлено по касательной к этой окружности (перпендикулярно *OA*) в сторону, указанную дуговой стрелкой e_{OA}. Это объясняется тем, что при замедленном вращении (по условию задачи кривошип *OA* вращается замедленно) касательное ускорение направляется в сторону, противоположную направлению вращения, указанного дуговой стрелкой w_{OA} . В то же время при замедленном вращении угловое ускорение направляется также в сторону, противоположную направлению угловой скорости.

Величина ускорения точки *A* в соответствии с соотношением (3) и с учетом (6) и (7) для заданного положения механизма определится по формуле:

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^n\right)^2 + \left(a_A^t\right)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{м/с}^2 .$$

2. Шестерня II совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Учитывая, что шестерня II катится без скольжения по неподвижной шестерне I, мгновенный центр скоростей (точка C_V) подвижной шестерни будет находиться в точке соприкосновения двух шестерен (рис.3.5).

Для заданного положения планетарного механизма выше определена скорость центра шестерни II (точки *A*). Таким образом, зная величину скорости одной из точек и положение мгновенного центра скоростей подвижной шестерни, можно определить величину ее мгновенной угловой скорости (w_2) по формуле

$$w_2 = \frac{V_A}{AC_V} \quad , \tag{7}$$

где расстояние $AC_V = R_2$.

В результате подстановки значения $AC_V = R_2$ и (1) в соотношение (7) получим

$$w_2 = \frac{w_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} \quad . \tag{8}$$

Для заданного положения механизма

$$w_2 = \frac{1 \cdot (0{,}6 + 0{,}4)}{0{,}4} = 2{,}5 \quad \text{с}^{-1} \; . \tag{9}$$

Направление мгновенного вращения шестерни II вокруг мгновенного центра скоростей (точки C_V), определяемое направлением скорости точки A ($\vec{V}_A$), условно показано на рис.3.5 дуговой стрелкой w_2 .

Шестерня II в указанном положении движется замедленно. Это следует из сопоставления направлений векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{a}_A^{\,t}$ (они направлены в противоположные стороны). Следовательно угловое ускорение шестерни II (e_2) направлено в сторону, противоположную направлению угловой скорости w_2 , что условно показано на рис.3.5 дуговой стрелкой e_2 .

Величину углового ускорения e_2 определим по формуле

$$e_2 = |\dot{w}_2| \quad . \tag{10}$$

Учитывая (8), на основании (10) получим

$$e_2 = \frac{|\dot{w}_{OA}| \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} = \frac{e_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} \quad . \tag{11}$$

где e_{OA} - величина углового ускорения кривошипа OA. Для заданного положения механизма

$$e_2 = \frac{1 \cdot (0{,}6 + 0{,}4)}{0{,}4} = 2{,}5 \quad \text{с}^{-2} \; . \tag{12}$$

Таким образом, для некоторого момента времени найдены положение мгновенного центра скоростей, угловая скорость, угловое ускорение подвижной шестерни II, а также ускорение точки A. Это позволяет найти скорость и ускорение любой точки шестерни.

Прежде всего определим абсолютную величину скорости точки B (V_B) по формуле

$$V_B = w_2 \cdot BC_V \; , \tag{13}$$

где BC_V - расстояние от точки B до мгновенного центра скоростей.

Расстояние BC_V определим из треугольника ABC_V . Этот треугольник равносторонний и, следовательно,

$$BC_V = R_2 = 0{,}4 \ \text{м} \; . \tag{14}$$

Для заданного положения механизма, учитывая (9) и (14), на основании (13) получим

$$V_B = 2{,}5 \cdot 0{,}4 = 1 \ \text{м/с} \; . \tag{15}$$

Вектор скорости $\vec{V}_B$ направлен перпендикулярно прямой BC_V. Ускорение точки B можно найти на основании теоремы об ускорениях точек плоской фигуры, приняв точку A за полюс

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,t}_{BA} \quad , \tag{16}$$

где $\vec{a}^{\,n}_{BA}$ и $\vec{a}^{\,t}_{BA}$ - соответственно нормальное и касательное ускорения точки B при относительном вращательном движении шестерни II вокруг полюса A. Учитывая (3), формулу (16) представим в виде

$$\vec{a}_B = \vec{a}^{\,n}_A + \vec{a}^{\,t}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,t}_{BA} \quad . \tag{17}$$

Величины нормального (a^n_{BA}) и касательного (a^t_{BA}) ускорений точки B при относительном вращательном движении шестерни II вокруг полюса A определяются по формулам

$$a^n_{BA} = w_2^2 \cdot BA = w_2^2 \cdot R_2 \quad , \tag{18}$$

$$a^t_{BA} = e_2 \cdot BA = e_2 \cdot R_2 \quad . \tag{19}$$

Для заданного положения механизма на основании (18) и (19) с учетом (9) и (12) получим

$$a^n_{BA} = 2{,}5^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}5 \text{ м/с}^2 , \tag{20}$$

$$a^t_{BA} = 2{,}5 \cdot 0{,}4 = 1 \text{ м/с}^2 . \tag{21}$$

При этом нормальное ускорение $\vec{a}^{\,n}_{BA}$ направлено вдоль BA к центру относительного вращения (к полюсу A), а касательное ускорение $\vec{a}^{\,t}_{BA}$ направлено перпендикулярно прямой AB в сторону, указанную дуговой стрелкой e_2.

Таким образом, найдены модули четырех векторов ускорений, стоящих в правой части векторного равенства (17), и показаны их направления в точке B на рис. 3.5. Найдем ускорение точки B как геометрическую сумму четырех показанных в точке ускорений аналитическим способом. Для этого спроектируем векторы, стоящие в правой и левой части равенства (17), на две оси координат x, y (рис.3.5)

$$a_{Bx} = a^t_A - a^n_{BA} \cdot \cos 30° - a^t_{BA} \cdot \cos 60° \quad , \tag{22}$$

$$a_{By} = -a^n_A + a^n_{BA} \cdot \cos 60° - a^t_{BA} \cdot \cos 30° \quad . \tag{23}$$

Учитывая (6), (7) (20) и (21), на основании (22) и (23) найдем для заданного положения механизма проекции ускорения точки B на оси x, y

$$a_{Bx} = 1 - 2{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -1{,}665 \text{ м/с}^2 \quad ,$$

$$a_{By} = -1 + 2{,}5 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}616 \text{ м/с}^2 \quad .$$

Проекции вектора ускорения $\vec{a}_B$ (лежащего в плоскости xy) на две оси координат полностью определяют его модуль и направление. Итак, величина

$$a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} = \sqrt{1{,}665^2 + 0{,}616^2} = 1{,}775 \text{ м/с}^2 \quad .$$

Задание К-4

В дифференциальном механизме (рис. 4.1-4.6) шестерня I радиуса R_1 и кривошип *OA* вращаются независимо друг от друга вокруг неподвижной оси *O*. Кривошип *OA* приводит в движение свободно насаженную на его конец шестерню II радиуса R_2. Для указанного на рисунке положения механизма найти скорости и ускорения точек *A* и *B*, если для момента времени, соответствующего указанному положению механизма, известны абсолютные величины угловой скорости и углового ускорения шестерни I (w_1 , e_1) и кривошипа *OA* (w_{OA} , e_{OA}). На рисунке условно показаны направления угловых скоростей и угловых ускорений дуговыми стрелками вокруг осей вращения. При этом направления угловых скоростей соответствуют направлениям вращательных движений. Угловые ускорения направлены в сторону угловой скорости при ускоренном вращении и в противоположную сторону - при замедленном. Необходимые данные приведены в таблице 4.

Таблица 4

№ варианта	№ рисунка	w_1 ($с^{-1}$)	e_1 ($с^{-2}$)	w_{OA} ($с^{-1}$)	e_{OA} ($с^{-2}$)	R_1 (м)	R_2 (м)	a (град.)
1	4.1	0,1	1	1	9	0,5	0,1	0
2	4.2	0,2	2	1	8	0,6	0,1	30
3	4.3	0,3	1	2	7	0,7	0,2	60
4	4.4	0,4	2	2	6	0,8	0,2	90
5	4.5	0,3	2	2	3	0,6	0,1	60
6	4.6	0,5	1	3	5	0,7	0,2	120
7	4.1	0,5	1	3	5	0,9	0,3	120
8	4.2	0,6	2	3	4	0,5	0,3	150
9	4.3	0,7	1	4	3	0,6	0,4	180
10	4.4	0,8	2	4	2	0,7	0,4	210
11	4.5	0,4	1	2	4	0,7	0,2	90
12	4.6	0,6	1	3	6	0,7	0,2	150
13	4.1	0,9	1	5	1	0,8	0,5	240
14	4.2	1	2	1	1	0,5	0,1	0
15	4.3	2	1	2	2	0,5	0,2	30
16	4.4	1	2	3	1	0,6	0,3	60
17	4.5	0,7	2	4	7	0,8	0,3	180
18	4.6	0,9	1	5	9	0,8	0,3	240
19	4.1	2	1	4	2	0,6	0,4	90
20	4.2	2	1	5	1	0,7	0,5	120
21	4.3	2	1	6	2	0,7	0,1	150
22	4.4	1	2	7	1	0,8	0,2	180
23	4.5	0,8	2	4	8	0,8	0,3	210
24	4.6	2	1	1	1	0,5	0,1	0
25	4.1	1	2	8	2	0,8	0,3	210

№ варианта	№ рисунка	w_1 ($с^{-1}$)	e_1 ($с^{-2}$)	w_{OA} ($с^{-1}$)	e_{OA} ($с^{-2}$)	R_1 (м)	R_2 (м)	a (град.)
26	4.2	2	1	9	1	0,9	0,4	240
27	4.3	0,1	1	1	1	0,6	0,1	0
28	4.4	0,2	2	1	2	0,6	0,1	30
29	4.5	2	1	1	2	0,5	0,2	30
30	4.6	0,3	1	2	2	0,7	0,3	45

Пример выполнения задания К-4

Дано: кинематическая схема дифференциального механизма (рис.4.5); R_1= 0,2 м ; R_2= 0.1 м ; w_{OA} = 2 $с^{-1}$; e_{OA} = 2 $с^{-2}$; w_1= 1 $с^{-1}$; e_1= 1 $с^{-2}$. Определить скорости и ускорения точек A и B, показанных на рисунке, если α= 90° .

Решение. Рассмотрим последовательно движение каждого из трех звеньев дифференциального механизма, начиная с одного из ведущих звеньев, то есть, начиная со звена, угловая скорость и угловое ускорение которого заданы.

1. Кривошип OA совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Определим скорость и ускорение точки A кривошипа, принадлежащей одновременно шестерне II. Величину скорости точки A (V_A) определим по формуле

$$V_A = w_{OA} \cdot |OA| = w_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \quad . \tag{1}$$

Для заданного положения механизма

$$V_A = 2 \cdot (0{,}1 + 0{,}2) = 0{,}6 \text{ м/с} \ . \tag{2}$$

Вектор скорости точки A ($\vec{V}_A$) направлен перпендикулярно радиусу вращения (OA) в направлении вращения кривошипа, указанному на рисунке 4.5 дуговой стрелкой w_{OA}.

Ускорение точки A представим в виде геометрической суммы нормального и касательного ускорений

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,t} \quad . \tag{3}$$

Величины нормального (a_A^n) и касательного (a_A^t) ускорений определим соответственно по формулам:

$$a_A^n = w_{OA}^2 \cdot |OA| = w_{OA}^2 \cdot (R_1 + R_2) \quad , \tag{4}$$

$$a_A^t = e_{OA} \cdot |OA| = e_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \ . \tag{5}$$

Для заданного положения механизма

$$a_A^n = 2^2 (0{,}2 + 0{,}1) = 1{,}2 \ \text{ м/с}^2 \ . \tag{6}$$

$$a_A^t = 2 \cdot (0{,}2 + 0{,}1) = 0{,}6 \ \text{ м/с}^2 \ . \tag{7}$$

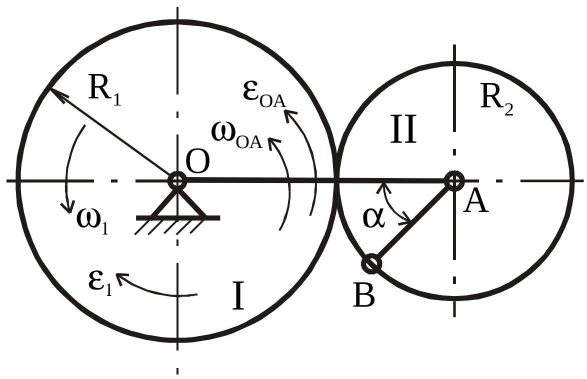

Рис. 4.1

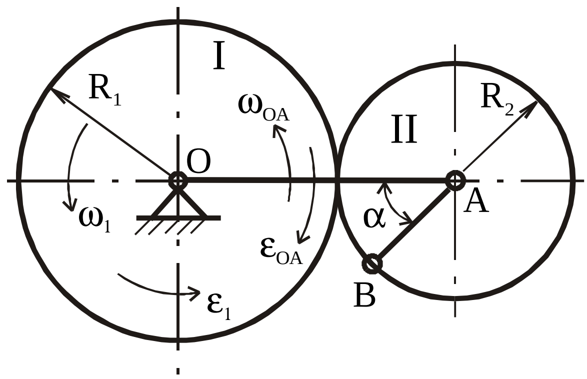

Рис. 4.2

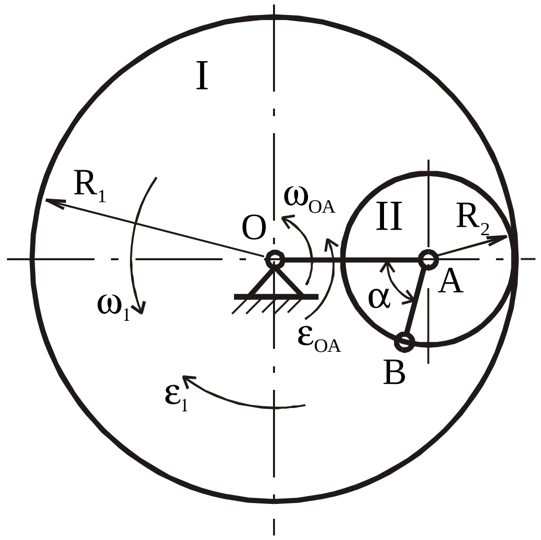

Рис. 4.3

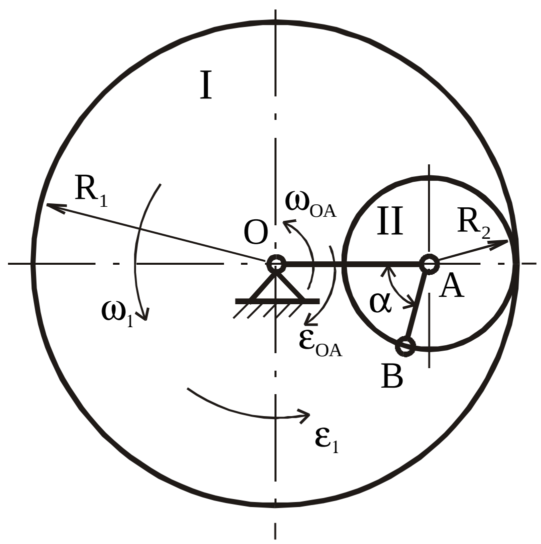

Рис. 4.4

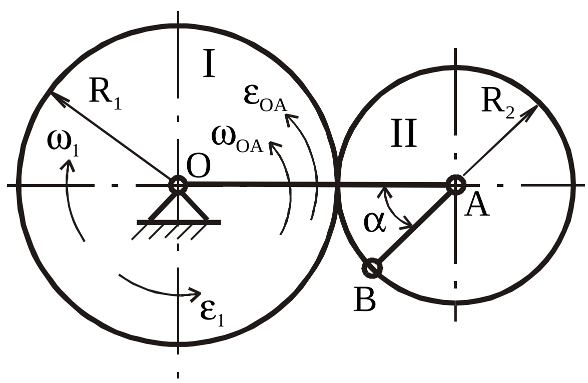

Рис. 4.5

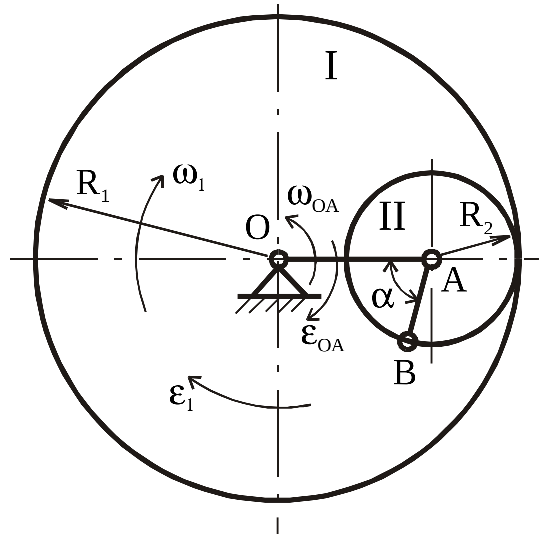

Рис. 4.6

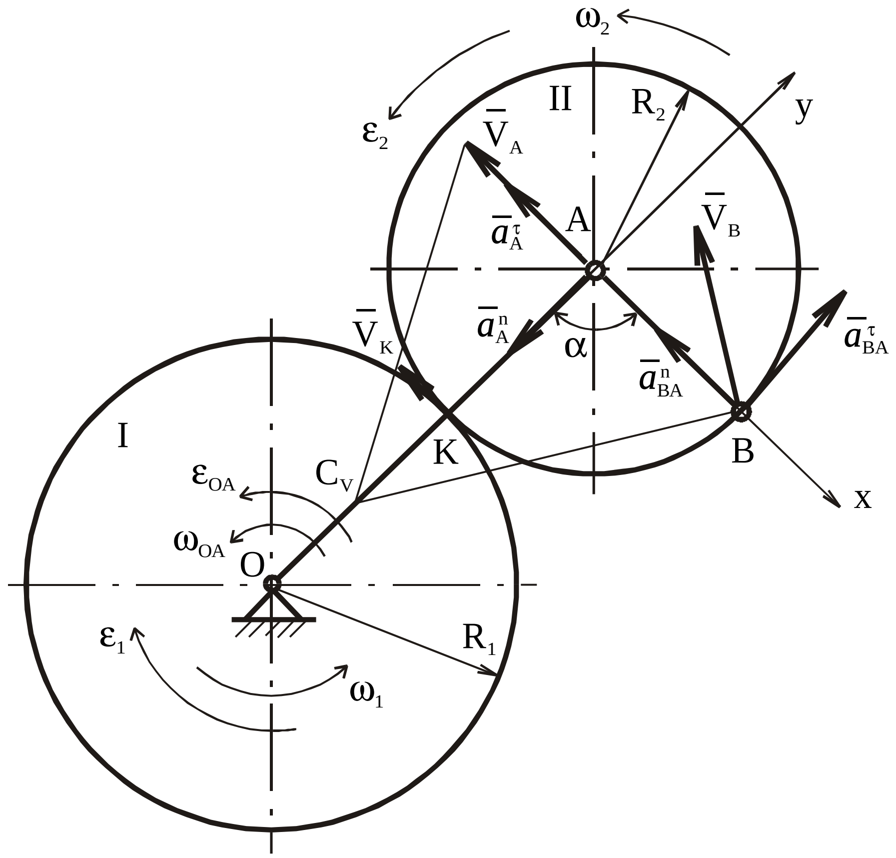

Рис. 4.7

При этом нормальное ускорение точки A ($\vec{a}_A^n$) направлено по радиусу окружности, описываемой точкой A, к центру этой окружности - к точке O, а касательное ускорение ($\vec{a}_A^t$) - по касательной к этой окружности, перпендикулярно OA, в сторону, указанную дуговой стрелкой e_{OA}.

Величина ускорения точки A в соответствии с (3) и с учетом (6) и (7) будет равна

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^n\right)^2 + \left(a_A^t\right)^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}6^2} = \sqrt{1{,}8} \quad \text{м/с}^2 .$$

2.. Шестерня I совершает вращательное движение вокруг той же оси, что и кривошип OA.

Определим величину скорости точки K касания двух шестерен (V_K)

$$V_K = w_1 \cdot R_1 \quad . \tag{8}$$

Для указанного положения механизма

$$V_K = 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \ \text{м/с}. \tag{9}$$

Вектор скорости точки K ($\vec{V}_K$) направлен перпендикулярно радиусу вращения (R_1) в направлении вращения шестерни I, указанном на рисунке дуговой стрелкой w_1.

3. Шестерня II совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Для момента времени, соответствующего заданному положению механизма, выше определены скорости двух точек этой шестерни (точек A и

K), а также ускорение точки *A*. Это позволяет определить скорость и ускорение любой точки шестерни II.

Прежде всего необходимо найти положение мгновенного центра скоростей (точку C_V) шестерни II. Так как скорости точек *A* и *K* параллельны друг другу и при этом линия *AK* перпендикулярна скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_K$, то мгновенный центр скоростей, находящийся в точке пересечения прямых, проведенных через начала и концы векторов скоростей (рис.4.5). Здесь учтено, на основании сравнения (2) и (9), что $V_A > V_K$.

Величина угловой скорости шестерни II может быть определена на основании соотношения

$$w_2 = \frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_K}{KC_V} \quad . \tag{8}$$

Из свойств пропорции получим

$$w_2 = \frac{V_A - V_K}{AC_V - KC_V} = \frac{V_A - V_K}{R_2} \quad . \tag{9}$$

Подставляя (1) и (8) в равенство (11), получим

$$w_2 = \frac{w_{OA} \cdot \left(R_1 + R_2\right) - w_1 \cdot R_1}{R_2} \quad . \tag{12}$$

Для заданного положения механизма

$$w_2 = \frac{2 \cdot \left(0{,}2 + 0{,}1\right) - 1 \cdot 0{,}2}{0{,}1} = 4 \quad \text{с}^{-1}. \tag{13}$$

Направление вращения шестерни II вокруг мгновенного центра скоростей (точки C_V), определяемое направлением скоростей точек *A* и *K*, условно показано на рисунке дуговой стрелкой w_2.

Алгебраическую величину углового ускорения шестерни II определим на основании формулы

$$e_2 = \dot{w}_2 \ . \tag{14}$$

Учитывая (12), на основании (14) получим

$$e_2 = \frac{\dot{w}_{OA} \cdot \left(R_1 + R_2\right) - \dot{w}_1 \cdot R_1}{R_2} \quad . \tag{15}$$

По условию задачи кривошип *OA* вращается ускоренно. Это значит, что абсолютная величина угловой скорости кривошипа w_{OA} возрастает. В этом случае $\dot{w}_{OA} > 0$, то есть

$$\dot{w}_{OA} = e_{OA} \quad , \tag{16}$$

где e_{OA} - заданная абсолютная величина углового ускорения кривошипа.

Шестерня I вращается замедленно. При этом абсолютная величина угловой скорости шестерни I убывает и, следовательно, $\dot{w}_1 < 0$. Таким образом

$$\dot{w}_1 = -e_1 \quad , \tag{17}$$

где e_1 - заданная величина углового ускорения шестерни I.

В результате подстановки (16) и (17) в (15) найдем

$$e_2 = \frac{e_{OA} \cdot (R_1 + R_2) + e_1 \cdot R_1}{R_2} \quad .$$

Для заданного положения механизма

$$e_2 = \frac{2 \cdot (0{,}2 + 0{,}1) + 1 \cdot 0{,}2}{0{,}1} = 8 \quad \text{с}^{-2}. \qquad (18)$$

Так как знаки w_2 и e_2 совпадают, шестерня II вращается ускоренно. Направление e_2 покажем на рисунке дуговой стрелкой в сторону w_2.

На основании (1),(10) и (12) нетрудно найти расстояние AC_V

$$AC_V = \frac{V_A}{w_2} \quad .$$

Для заданного положения механизма, учитывая (2) и (13), получим

$$AC_V = \frac{0{,}6}{4} = 0{,}15 \quad \text{м}.$$

Величину скорости точки B (V_B) можно найти по формуле

$$V_B = w_2 \cdot BC_V \quad , \qquad (19)$$

где $$BC_V = \sqrt{AC_V^2 + AB^2} = \sqrt{0{,}15^2 + 0{,}1^2} = 0{,}18 \quad \text{м}. \qquad (20)$$

Учитывая (13) и (20) на основании (19) найдем величину скорости точки B для заданного положения механизма

$$V_B = 4 \cdot 0{,}18 = 0{,}72 \quad \text{м/с} .$$

Вектор скорости ($\vec{V}_B$) направлен перпендикулярно прямой BC_V в сторону вращения шестерни II, указанную дуговой стрелкой w_2.

Ускорение точки B можно найти на основании теоремы об ускорениях точек плоской фигуры, приняв точку A за полюс

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,t} \quad , \qquad (21)$$

где $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ и $\vec{a}_{BA}^{\,t}$ - соответственно нормальное и касательное ускорения точки B при относительном вращательном движении шестерни II вокруг полюса A.

С учетом (3), (21) примет вид

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,t} + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,t} \quad . \qquad (22)$$

Величины нормального (a_{BA}^n) и касательного (a_{BA}^t) ускорений точки B при относительном вращательном движении шестерни II вокруг полюса A определяются по формулам

$$a_{BA}^n = w_2^2 \cdot BA = w_2^2 \cdot R_2 \quad , \qquad (23)$$

$$a_{BA}^t = |e_2| \cdot BA = |e_2| \cdot R_2 \quad . \qquad (24)$$

Для заданного положения дифференциального механизма на основании (23) и (24) с учетом (13) и (18) получим

$$a_{BA}^n = 4^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}6 \quad \text{м/с}^2 , \qquad (25)$$

$$a_{BA}^t = 8 \cdot 0{,}1 = 0{,}8 \quad \text{м/с}^2 . \qquad (26)$$

При этом нормальное ускорение $\vec{a}_{BA}^{n}$ направлено вдоль *BA* к центру относительного вращения (к полюсу *A*), а касательное ускорение $\vec{a}_{BA}^{t}$ направлено перпендикулярно *BA* в сторону, указанную дуговой стрелкой e_2. Таким образом, в векторном равенстве (22) известны модули и направления всех четырех векторов, стоящих справа от знака равенства. Для определения ускорения точки *B* ($\vec{a}_B$) найдем его проекции на две оси координат *x*, *y*, показанные на рис. 4.5. Проекция $\vec{a}_B$ на любую ось равна алгебраической сумме проекций ускорений $\vec{a}_A^{n}$, $\vec{a}_A^{t}$, $\vec{a}_{BA}^{n}$ и $\vec{a}_{BA}^{t}$ на ту же ось. .Проекции этих ускорений легко найти из чертежа. Таким образом

$$a_{Bx} = -a_A^t - a_{BA}^n = -0{,}6 - 1{,}6 = -2{,}2 \quad \text{м/с}^2 ,$$

$$a_{By} = a_{BA}^t - a_A^n = 0{,}8 - 1{,}2 = -0{,}4 \quad \text{м/с}^2 .$$

По найденным двум проекциям ускорения точки *B* нетрудно найти его модуль и направление. Модуль ускорения точки *B*

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{2{,}2^2 + 0{,}4^2} = 2{,}24 \quad \text{м/с}^2 .$$

Задание К-5

Приняв угловую скорость w_0 кривошипа OA постоянной, определить для заданного положения механизма (рис.5.1-5.6):

1. скорости точек A, B, C, D механизма и угловые скорости звеньев AB и CD при помощи мгновенных центров скоростей;

2. скорости этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки;

3. ускорения точек A, B, C, а также угловое ускорение звена AB (аналитическим способом).

Необходимые для решения данные приведены в таблице 5.

Таблица 5

№ варианта	№ рис.	w_0 (c^{-1})	OA (см)	j (град.)	AB (см)	AC (см)	CD (см)	h (см)	l (см)	O_1D (см)
1	5.1	π/2	40	90	80	40	70	-	10	-
2	5.2	π/4	50	45	60	60	80	20	-	-
3	5.3	π/2	30	90	60	20	50	-	25	-
4	5.4	π/4	20	45	100	50	60	10	80	-
5*	5.5	π/3	12	60	55	36	23	22	19	19
6*	5.6	2π/3	15	135	50	15	40	54	17	40
7	5.1	π/4	20	45	40	20	35	-	5	-
8	5.2	π/6	100	30	120	120	160	40	-	-
9	5.3	π/6	60	30	120	40	100	-	50	-
10	5.4	π/3	30	60	150	75	90	15	120	-
11*	5.5	π/3	24	60	110	72	46	44	38	38
12*	5.6	2π/3	30	120	100	30	80	108	34	80
13	5.1	π/3	60	60	120	60	105	-	15	-
14	5.2	π/3	60	60	72	72	96	24	-	-
15	5.3	π/4	36	45	72	24	60	-	30	-
16	5.4	π/3	10	60	50	25	30	5	40	-
17*	5.5	π/3	18	60	82,5	54	34,5	33	28,5	28,5
18*	5.6	2π/3	7,5	120	25	7,5	20	27	8,5	20
19	5.1	π/6	30	30	60	30	52,5	-	7,5	-
20	5.2	2π/3	75	120	90	90	120	30	-	-
21	5.3	π/3	27	60	54	18	45	-	22,5	-
22	5.4	π/6	15	30	75	37,5	45	7,5	60	-
23*	5.5	π/3	36	60	165	108	69	66	57	57
24*	5.6	2π/3	22,5	120	75	22,5	60	81	22,5	60
25	5.1	π/4	10	45	20	20	18,5	-	2,5	-
26	5.2	3π/4	150	135	180	180	240	60	-	-
27	5.3	π/2	15	90	30	10	25	-	12,5	-

№ варианта	№ рис.	w_0 ($с^{-1}$)	*OA* (см)	*j* (град.)	*AB* (см)	*AC* (см)	*CD* (см)	*h* (см)	*l* (см)	O_1D (см)
28	5.4	π/2	40	90	200	100	120	20	160	-
29*	5.5	π/3	6	60	27,5	18	11,5	11	9,5	9,5
30*	5.6	2π/3	45	120	150	45	120	162	51	120

***Примечание**: в вариантах с рис. 5.5, 5.6 из двух возможных положений механизма выбрать для расчета такое, при котором шарнир D наиболее удален от ползуна B.

Пример выполнения задания К-5

Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 5.7). $j = 30°$; $OA = 30$ см ; AB = 70 см ; $BC = 35$ см ; $CD = 40$ см; $l = 90$ см ; $w_0 = \pi/6$ $с^{-1}$.

Определить:

1. скорости точек *A*, *B*, *C*, *D* механизма и угловые скорости всех его звеньев при помощи мгновенных центров скоростей;

2. скорости этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки;

3. ускорения точек *A*, *B*, *C*, а также угловое ускорение звена *AB* (аналитическим способом).

Решение: Построим механизм в выбранном масштабе $m_e = 1{:}10$ (рис.5.7).

При исследовании кинематики плоского механизма будем рассматривать последовательно движение каждого звена механизма, начиная с ведущего звена, угловая скорость которого задана.

<u>1. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма с помощью мгновенных центров скоростей.</u>

а) Звено *OA* совершает вращательное движение вокруг неподвижного центра *O*. Определим скорость точки *A* кривошипа, которая одновременно принадлежит следующему звену *AB*. Величина скорости точки *A* определяется по формуле

$$V_A = w_{OA} \cdot OA = \frac{p}{3} \cdot 30 \approx 16 \qquad \text{см/с.}$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ перпендикулярен прямой *OA* и направлен в сторону вращения кривошипа, указанную дуговой стрелкой w_0 (рис.5.7).

б) Звено *AB* совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Выше найдена скорость точки *A* этого звена и известна линия действия (направления) скорости точки *B* ($\vec{V}_B$ - вдоль прямой *OB*). Мгновенный центр скоростей звена *AB* (точка C_{V1}) находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных в точках *A* и *B* к направлениям их скоростей ($\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$). Точка *C* принадлежит звену *AB*. Соединим точку *C* с мгновенным центром

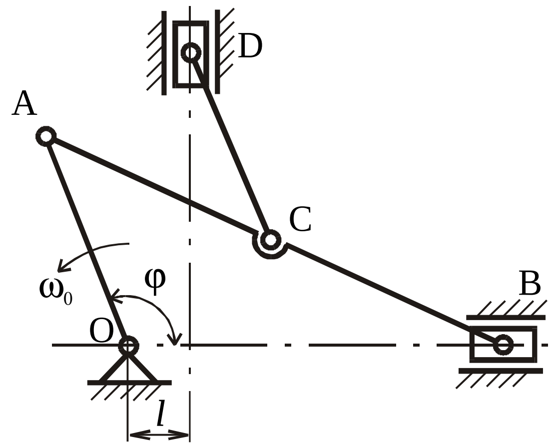

Рис. 5.1

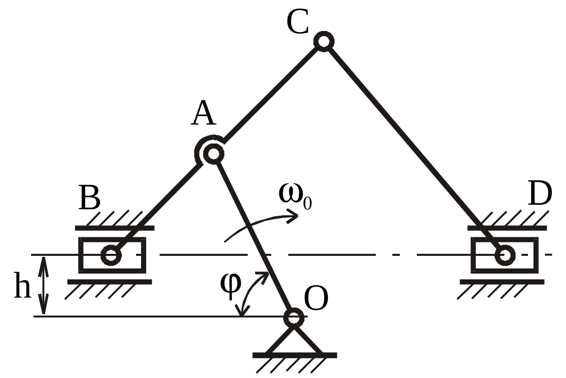

Рис. 5.2

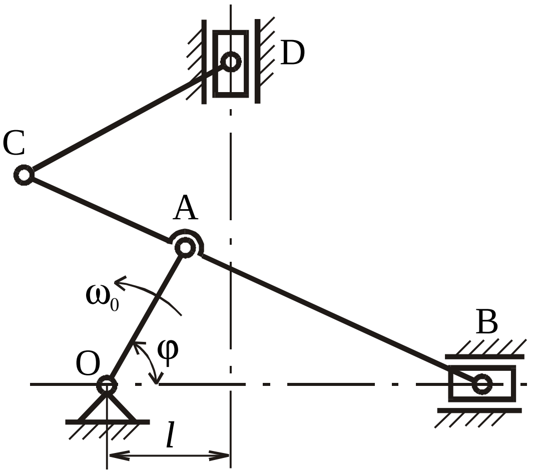

Рис. 5.3

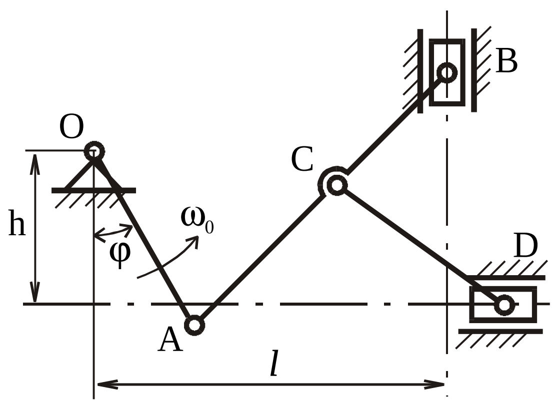

Рис. 5.4

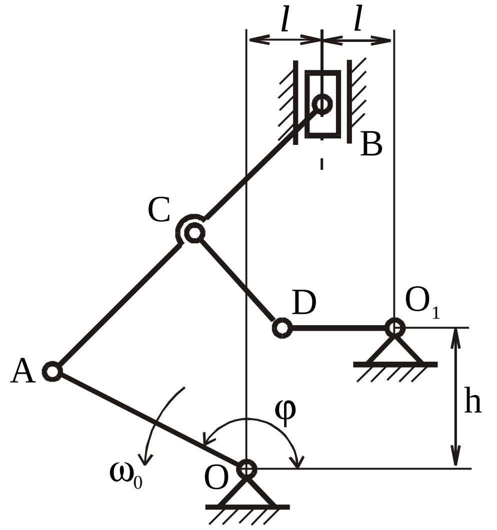

Рис. 5.5

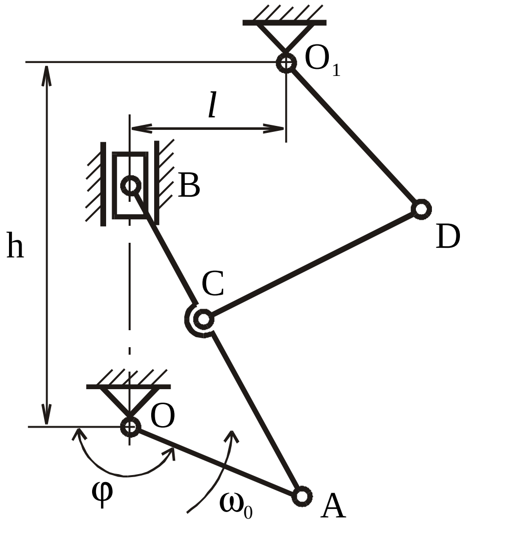

Рис. 5.6

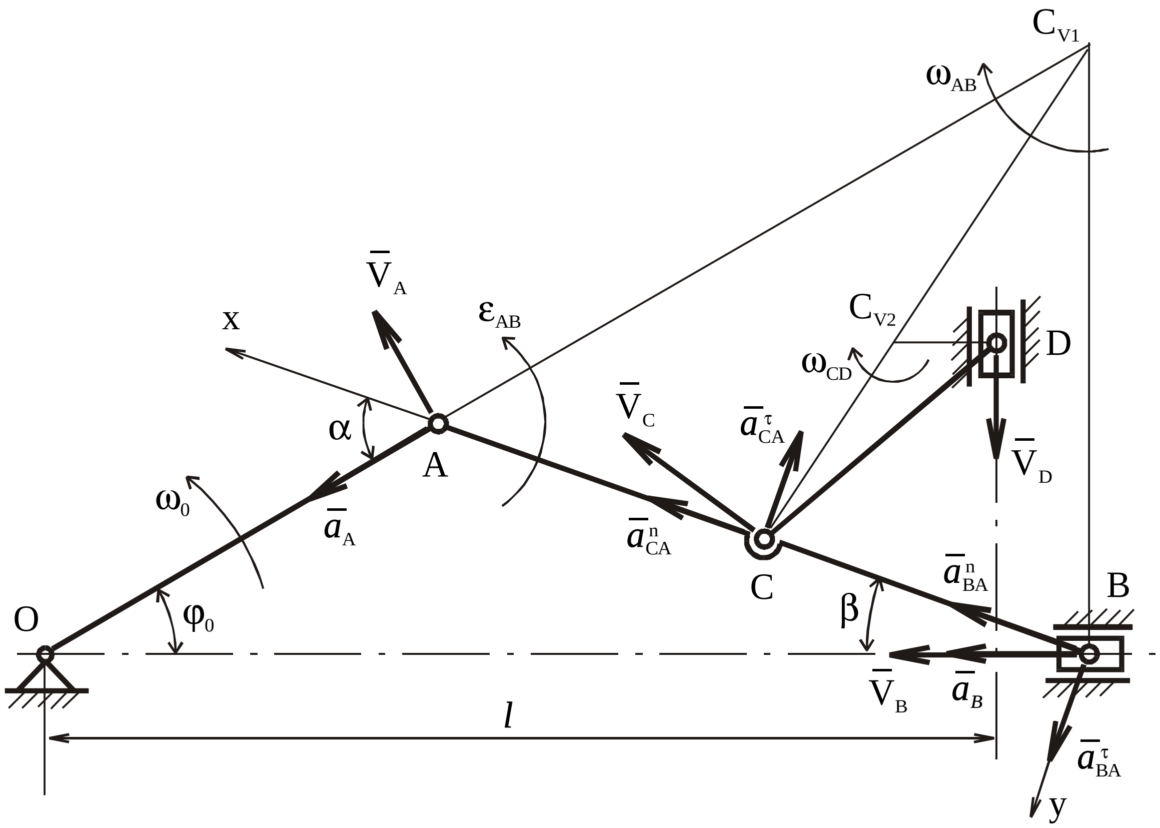

Рис. 5.7

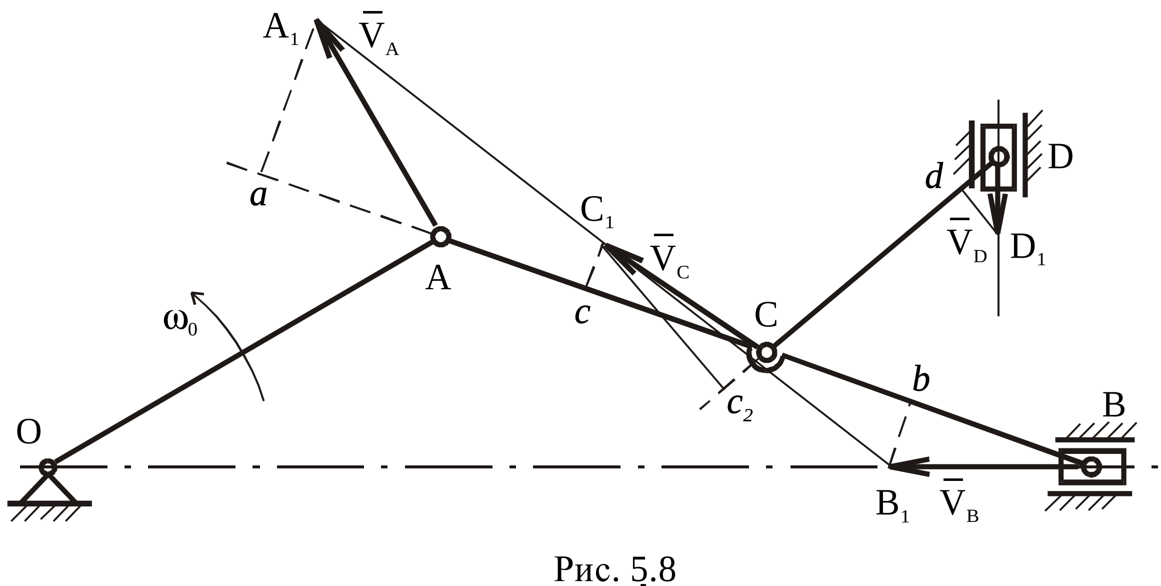

Рис. 5.8

скоростей C_{V1}. Вектор скорости точки C ($\bar{V}_C$) направлен перпендикулярно к прямой CC_{V1}.

Для звена CD мгновенный центр скоростей определяем аналогично. Известна линия действия скорости точки C ($\bar{V}_C$) и линия действия (направления) скорости в точке D (по вертикали). Восстанавливаем перпендикуляр в точке D к вертикали до пересечения с прямой CC_{V1} в точке C_{V2}. Точка C_{V2} и есть мгновенный центр скоростей звена CD.

Измеряем расстояния от точек A, B, C и D до соответствующих мгновенных центров скоростей

$|AC_{V1}|$ = 8 см , $|BC_{V1}|$=6см, $|CC_{V1}|$ = 6,1 см .

$|CC_{V2}|$ = 3 см . $|DC_{V2}|$ = 1,4 см .

Учитывая масштаб m_e, получаем

AC_{V1} = 80 см , BC_{V1} = 60 см , CC_{V1} = 61 см ,

CC_{V2} = 30 см , DC_{V2} = 74 см .

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям до мгновенных центров скоростей. Для звена AB имеем

$$\frac{V_A}{AC_{V1}} = \frac{V_B}{BC_{V1}} = \frac{V_C}{CC_{V1}} \quad .$$

Отсюда находим

$$V_B = V_A \frac{BC_{V1}}{AC_{V1}} = 12 \quad \text{см/с}, \qquad V_C = V_A \frac{CC_{V1}}{AC_{V1}} = 12{,}2 \ \text{см/с}.$$

Аналогично для звена CD получим

$$\frac{V_C}{CC_{V2}} = \frac{V_D}{DC_{V2}} \quad , \qquad V_D = V_C \frac{DC_{V2}}{CC_{V2}} = 5{,}6 \ \text{см/с}.$$

в) Определим величины угловых скоростей звеньев механизма. Скорость любой точки звена равна произведению угловой скорости этого звена на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей

$$V_A = w_{AB} \cdot AC_{V1} \quad , \qquad V_B = w_{AB} \cdot BC_{V1} \quad , \qquad V_C = w_{AB} \cdot CC_{V1} \quad ,$$

$$V_C = w_{CD} \cdot CC_{V2} \quad , \qquad V_D = w_{CD} \cdot DC_{V2} \quad .$$

Отсюда

$$w_{AB} = \frac{V_A}{AC_{V1}} = \frac{16}{80} = 0{,}2 \ \text{см/с},$$

$$w_{CD} = \frac{V_C}{CC_{V2}} = \frac{12{,}2}{30} \approx 0{,}41 \ \text{см/с}.$$

Из рис.5.7. следует, что вращения звеньев AB и CD вокруг мгновенных центров скоростей происходят по часовой стрелке.

<u>2. Определение скоростей этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки.</u>

Для определения скоростей точек методом проекций вновь строим механизм в заданном масштабе (m_e = 1:10) (рис.5.8). С помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, их соединяющую, и теоремы о геометрическом месте концов векторов скоростей точек прямой, определяем скорости точек B, C и D.

На рис.5.8 находим проекцию вектора скорости $\vec{V}_A$, который построен в масштабе (m_v=1:4), на прямую AB. Откладываем от точки B отрезок $Aa = Bb$ вдоль прямой AB. Восстанавливаем в точке b перпендикуляр к прямой AB до пересечения с прямой OB, по которой направлен вектор скорости в точке B ($\vec{V}_B$). Соединяем концы векторов скоростей точек A и B прямой A_1B_1. От точки C вдоль прямой AB откладываем отрезок $Cc = Aa$ и восстанавливаем из точки c перпендикуляр до пересечения с прямой A_1B_1 в точке C_1 . Отрезок

CC_1 определяет вектор скорости $\vec{V}_C$ в точке *C*.

Скорость точки *D* определяем аналогично. Находим проекцию скорости $\vec{V}_C$ на прямую *CD*. Откладываем от точки *D* отрезок $Dd = Cc_2$. Восстанавливаем перпендикуляр из точки *d* до пересечения в точке D_1 с вертикалью, по которой направлен вектор скорости в точке D ($\vec{V}_D$). Отрезок DD_1 изображает вектор скорости $\vec{V}_D$.

Измеряя длины отрезков BB_1, CC_1, и DD_1, и учитывая масштаб скорости m_v, найдем величины скоростей в точках *B*, *C* и *D*

$$V_B = 12 \text{ см/с}, \qquad V_C = 12{,}2 \text{ см/с}, \qquad V_D = 5{,}6 \text{ см/с}.$$

<u>3. Определение ускорений точек *A*, *B* и *C*, а также углового ускорения ε_{AB} звена *AB*.</u>

Так как кривошип *OA* вращается равномерно, ускорение точки *A* направлено к центру *O* и равно

$$a_A = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 8{,}215 \quad \text{см/с}^2 .$$

Для определения ускорения точки *B* звена *AB* воспользуемся теоремой об ускорениях точек плоской фигуры. Считая точку *A* полюсом, запишем

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau . \tag{1}$$

Нормальное ускорение точки *B* во вращательном движении вокруг полюса *A* направлено от точки *B* к точке *A* вдоль *AB* и равно

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2{,}8 \quad \text{см/с}^2 .$$

Что касается ускорений $\vec{a}_B$ точки *B* и $\vec{a}_{BA}^\tau$, то известны только линии действия этих векторов: $\vec{a}_B$ - по прямой *OB* вдоль направляющих ползуна, $\vec{a}_{BA}^\tau$ - перпендикулярно *AB*. Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис.5.7). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора расчетному. Выбрав направления осей *x* и *y* как показано на рис.5.7, получим

$$\begin{aligned} a_B \cdot \cos\beta &= a_A \cdot \cos\alpha + a_{BA}^n, \\ a_B \cdot \sin\beta &= a_A \cdot \sin\alpha + a_{BA}^\tau. \end{aligned} \tag{2}$$

Углы α и β измеряем на рис.5.7 с помощью транспортира. Из уравнений (2) получим

$$a_B = \frac{a_A \cdot \cos\alpha + a_{BA}^n}{\cos\beta} = 9 \quad \text{см/с}^2 ,$$

$$a_{BA}^\tau = a_B \cdot \sin\beta - a_A \cdot \sin\alpha = -4{,}15 \text{ см/с}^2 . \tag{3}$$

Поскольку a_{BA}^τ отрицательно, следовательно, направление вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ противоположно выбранному на рис.5.7.

Угловое ускорение шатуна *AB* с учетом того, что здесь a_{BA}^τ - алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\left|\varepsilon_{AB}\right| = \frac{\left|a_{BA}^{\tau}\right|}{AB} = 0{,}06 \quad \text{с}^{-1} . \tag{4}$$

Направление ускорения $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AB}, которое показано на рис 5.7 дуговой стрелкой.

Для определения ускорения точки C примем за полюс точку A и в соответствии с теоремой об ускорениях точек плоской фигуры запишем равенство

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^{n} + \vec{a}_{CA}^{\tau} \quad . \tag{5}$$

Направление вектора ускорения $\vec{a}_C$ точки C заранее неизвестно.

Нормальное и тангенциальное ускорения точки C во вращательном движении вокруг полюса A

$$a_{CA}^{n} = \omega_{AB}^{2} \cdot AC = 1{,}4 \quad \text{см/с}^2 \ ,$$

$$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 2{,}1 \ \text{см/с}^2 \ .$$

Вектор $\vec{a}_{CA}^{\tau}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_{CA}^{n}$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB} .

Ускорение точки C находим способом проекций

$$a_{Cx} = a_A \cdot \cos\alpha + a_{CA}^{n} = 7{,}5 \ \text{см/с}^2 \ ,$$

$$a_{Cy} = a_A \cdot \sin\alpha - a_{CA}^{\tau} = 3{,}39 \ \text{см/с}^2 \ .$$

Найдем величину вектора ускорения точки C по формуле

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 8{,}22 \ \text{см/с}^2 \quad .$$

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТ

1. Расчетно-графические работы выполняются на листах писчей или чертежной бумаги формата *А4* (210x297 мм). Текст и рисунки наносятся только на одну сторону листа. Выполнение рисунков "от руки" не допускается.

2. Первая страница представляет собой титульный лист, образец которого приведен на странице 37.

3. На второй странице записывается условие задания, вычерчивается заданная схема и выписываются из таблицы все данные (для соответствующего варианта).

4. Решение задачи начинается с третьей страницы, на которой вычерчивается расчетная схема механизма (конструкции). Схема выполняется аккуратно, четко и в таком масштабе, который позволит ясно изобразить все необходимые вектора скоростей, ускорений и т.д..

Образец титульного листа

КУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

по теоретической механике

Вариант № _____

Студент ____________________

Группа _____________________

Преподаватель ______________

КУРСК 2016