

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие предназначено для студентов, изучающих курс «Электротехника», который может быть успешно усвоен, если теоретические знания подкреплены соответствующими расчетными примерами.

Практика показывает, что самостоятельное решение задач по данному курсу не всегда доступно студентам. С учетом этого в пособии рассматриваются примеры решения типовых задач, выполняемых в рамках самостоятельной работы студентов. При этом в каждом примере приводятся основные положения и формулы, облегчающие проведение расчета, а следовательно, и изучение соответствующего раздела.

В пособии рассматриваются примеры решения задач по расчету:

- 1) разветвленных цепей синусоидального переменного тока;
- 2) трехфазных цепей.

Следует отметить, что примеры решения задач основываются на использовании метода комплексных чисел.

Сведения, приведенные в пособии, позволяют решать задачи без дополнительного справочного материала.

1. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА МЕТОДОМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1.1. Понятие о комплексных числах. Комплексная плоскость

Из курса высшей математики известно, что число вида

$$c = a + ib, \quad (1.1)$$

где a и b - любые действительные числа, i - мнимая единица, называется *комплексным числом в алгебраической форме*.

При этом a является *действительной (реальной) частью* комплексного числа c и обозначается $a = \operatorname{Re} c$, соответственно b является *мнимой частью* комплексного числа c и обозначается $b = \operatorname{Im} c$.

Мнимая единица удовлетворяет соотношению

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2 = -1. \quad (1.2)$$

Если $b = 0$, то очевидно, что комплексное число $c = a$ является действительным числом; и если $a = 0$, то комплексное число $c = ib$ является чисто мнимым числом.

Два комплексных числа $c = a + ib$ и $c = a - ib$, имеющих *одинаковые действительные и противоположные мнимые части*, называются *сопряженными* комплексными числами.

Модуль комплексного числа

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.3)$$

и его аргумент

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}. \quad (1.4)$$

Комплексное число $c = a + ib$ можно изобразить точкой $c \equiv (a, b)$ или радиус-вектором на комплексной плоскости (рис. 1.1). При этом длина радиус-вектора соответствует модулю комплексного числа, определяемого по формуле (1.3), а угол φ между действительной осью комплексной плоскости и радиус-вектором соответствует аргументу комплексного числа, определяемому по формуле (1.4).

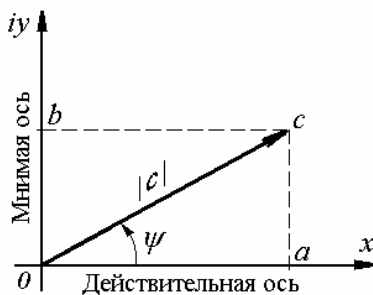


Рис.1.1

1.2. Формы записи комплексных чисел

Существуют три формы записи комплексных чисел.

Алгебраическая: $c = a + ib$.

Тригонометрическая:

$$\sin \psi = \frac{b}{|c|}; \quad \cos \psi = \frac{a}{|c|}; \quad c = |c|(\cos \psi + i \cdot \sin \psi). \quad (1.5)$$

Показательная:

Существует формула Эйлера:

$$(\cos \psi + i \cdot \sin \psi) = e^{i\psi}. \quad (1.6)$$

На основании (1.6) комплексное число в показательной форме записи имеет вид:

$$c = |c| \cdot e^{i\psi}, \quad (1.7)$$

где $e^{i\varphi}$ - поворотный множитель.

Поворотный множитель показывает, что вектор повернут относительно действительной оси на угол φ . Отсчет угла принято вести от действительной оси против хода часовой стрелки.

1.3. Действия над комплексными числами

Над комплексными числами можно производить следующие действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня.

При сложении и вычитании наиболее удобной является *алгебраическая* форма записи. Сложение комплексных чисел в алгебраической форме производится по формуле

$$c_1 + c_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \quad (1.8)$$

Аналогично производится вычитание комплексных чисел:

$$c_1 - c_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \quad (1.9)$$

Умножение и деление комплексных чисел можно осуществлять как в алгебраической, так и в показательной форме. Следует отметить, что при этом наиболее удобной является *показательная* форма.

Умножение комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется по формуле:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = \\ &= (a_1 \cdot a_2 + ib_1 \cdot ib_2 + ib_1 \cdot a_2 + ib_2 \cdot a_1) = \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + ib_1 \cdot a_2 + ib_2 \cdot a_1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Умножение комплексных чисел в показательной форме осуществляется по формуле:

$$c_1 \cdot c_2 = |c_1| e^{i\varphi_1} \cdot |c_2| e^{i\varphi_2} = |c_1| |c_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (1.11)$$

При делении комплексных чисел в алгебраической форме следует числитель и знаменатель умножить на комплексное число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)}. \quad (1.12)$$

Деление комплексных чисел в показательной форме производится в соответствии с формулой:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{|c_1| \cdot e^{i\varphi_1}}{|c_2| \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{|c_1|}{|c_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (1.13)$$

1.4. Способы изображения синусоидальных функций времени

Синусоидальные функции времени могут быть представлены тригонометрической формой записи, временными диаграммами, вращающимися векторами и комплексными числами.

Тригонометрическая форма записи тока, изменяющегося во времени по синусоидальному закону, может быть представлена выражением

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i), \quad (1.14)$$

где i - мгновенное значение тока; I_m - максимальное (амплитудное) значение тока; ω - угловая частота, характеризующая скорость изменения фазового угла; t - текущее значение времени; ψ - начальная фаза (начальный фазовый угол).

Геометрический смысл параметров, входящих в выражение (1.14), раскрывает *временная диаграмма*, представленная на рис.1.2 б.

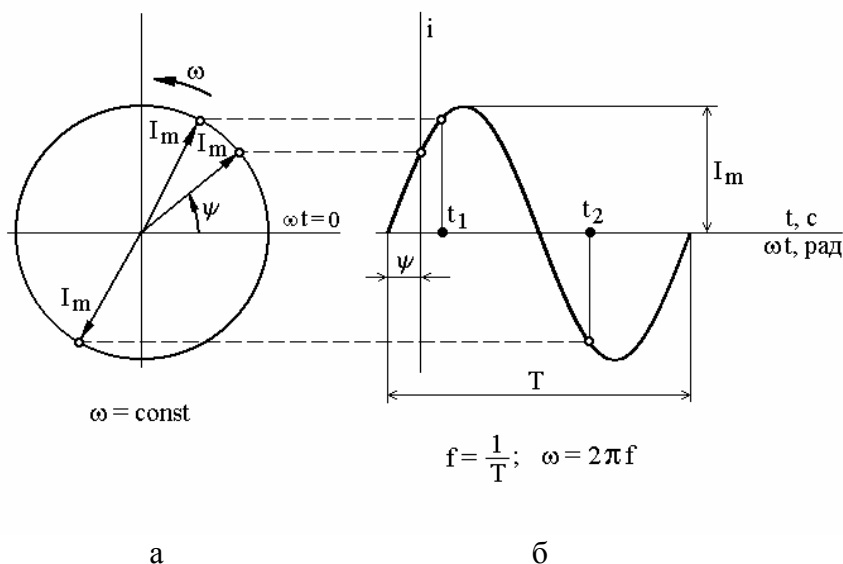


Рис. 1.2

Переход от временных диаграмм к *вращающимся векторам* для различных моментов времени показан на рис. 1.2 а, б. Очевидно, что вектор длиной I_m вращается с постоянной угловой частотой ω . При этом за положительное направление

вращения в электротехнике принимается направление против хода часовой стрелки. Проекция вращающегося вектора на ось ординат определяет мгновенное значение синусоидального тока.

В электротехнике, кроме мгновенных и максимальных значений синусоидальных величин, используются средние и действующие значения. Именно эти значения показывают большинство измерительных приборов, поэтому условимся, что далее в расчетах будут использоваться только *действующие значения* синусоидальных электродвижущих сил (ЭДС), напряжений и токов.

Действующие значения синусоидальных ЭДС, напряжений и токов могут быть определены на основании максимальных значений с помощью следующих выражений:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (1.15)$$

На рис.1.2 а показано, что длина вращающегося вектора равна амплитудному значению синусоидальной величины. Однако следует отметить, что вращающиеся векторы могут иметь длину, равную действующему значению.

1.5. Метод комплексных чисел. Законы электрических цепей в комплексной форме

Метод комплексных чисел нашел широкое применение в электротехнике при расчетах электрических цепей синусоидального переменного тока. При этом в качестве векторов на комплексной плоскости изображаются *синусоидальные функции времени (ЭДС, напряжения и токи)*.

Сущность расчета электрических цепей с помощью данного метода заключается в том, что *графические операции над*

векторами заменяют алгебраическими действиями над комплексными числами.

В электротехнике, чтобы избежать сходства мнимой единицы $\dot{\mathbf{i}}$ с силой тока, мнимую единицу обозначают буквой $\mathbf{j}$.

При использовании метода комплексных чисел уравнения электрических цепей записывают на основании законов Ома и Кирхгофа.

Математическое выражение закона Ома в комплексной форме имеет вид

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\bar{Z}}, \quad (1.16)$$

где $\dot{I}$ - комплекс действующего значения силы тока (комплекс тока); $\dot{U}$ - комплекс действующего значения напряжения, приложенного к цепи (комплекс напряжения); $\bar{Z}$ - полное комплексное сопротивление.

Отличие обозначения комплексного сопротивления $\bar{Z}$ от обозначения комплексных напряжения $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$ связано с тем, что комплексное сопротивление не является синусоидальной функцией времени.

Математическое выражение первого закона Кирхгофа в комплексной форме имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0, \quad (1.17)$$

где k - число комплексных токов, сходящихся в узле электрической цепи.

В соответствии с (1.17) сумма комплексных токов, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю.

Математическое выражение *второго закона Кирхгофа* в комплексной форме имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = 0, \quad (1.18)$$

где k – число комплексных напряжений вдоль замкнутого контура.

В соответствии с (1.18) сумма комплексных напряжений вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

1.6. Понятие о полном комплексном сопротивлении

Составными элементами цепей синусоидального тока являются активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C . Каждый из этих элементов оказывает *сопротивление* переменному току.

На активном сопротивлении R энергия электрического тока преобразуется в тепловую энергию. Такое преобразование является необратимым.

На индуктивности L происходит периодическое преобразование энергии электрического тока в энергию магнитного поля, накопление и обратное преобразование.

На емкости C происходит периодическое преобразование энергии электрического тока в энергию электрического заряда, накопление и обратное преобразование.

Поскольку процессы в индуктивности и емкости являются обратимыми, то эти элементы называют *реактивными*.

Индуктивность обладает реактивным сопротивлением, которое называют *индуктивным сопротивлением*

$$X_L = \omega L = 2\pi fL, \text{ Ом} \quad (1.19)$$

где f – частота переменного синусоидального напряжения, Гц; L – индуктивность, Гн.

Конденсатор обладает реактивным сопротивлением, которое называют *емкостным сопротивлением*

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}, \text{ Ом} \quad (1.20)$$

где C – емкость, Ф.

Если элементы R , L , C соединены последовательно, то полное комплексное сопротивление можем записать в виде

$$\bar{Z} = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C), \text{ Ом.} \quad (1.21)$$

В соответствии с (1.21) очевидно, что полное комплексное сопротивление имеет действительную и мнимую части:

$$\bar{Z} = R \pm jX, \text{ Ом} \quad (1.22)$$

где R – активное сопротивление; X – реактивное сопротивление.

В (1.22) знак «плюс» перед jX ставится, если $X_L > X_C$, в противном случае ставится знак «минус».

1.7. Угол сдвига фаз. Векторная диаграмма

Токи и напряжения на различных участках электрической цепи синусоидального тока могут не совпадать по фазе, например:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i); \quad (1.23)$$

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u), \quad (1.24)$$

где φ_i - начальная фаза тока; φ_u - начальная фаза напряжения.

Тогда угол сдвига фаз между током и напряжением определяют как разность их начальных фаз

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i. \quad (1.25)$$

Угол сдвига фаз между током и напряжением на некотором участке электрической цепи зависит от характера сопротивления данного участка и определяется по формуле:

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (1.26)$$

Наглядное представление о фазовом расположении различных векторов дает векторная диаграмма токов и напряжений.

Векторная диаграмма – это совокупность векторов на комплексной плоскости, изображающих синусоидальные функции времени одной и той же частоты и построенных с соблюдением их начальных фаз.

Поскольку расчет электрических цепей синусоидального переменного тока ведется, как правило, с использованием метода комплексных чисел, то и векторные диаграммы также строятся на комплексной плоскости.

Векторные диаграммы чаще всего выполняют совмещенными, то есть на одной комплексной плоскости откладывают векторы токов и напряжений для отдельных участков цепи. При этом необходимо выбрать масштабы для токов и напряжений. Следует отметить, что для токов может быть выбран один масштаб, а для напряжений – другой. Это никоим образом не искажает общей картины, поскольку векторная диаграмма дает представление о взаимном

расположении векторов и позволяет судить о наличии сдвига фаз между током и напряжением на отдельных участках электрической цепи.

Из курса высшей математики известно, что над векторами можно производить следующие действия: сложение, вычитание, умножение на число и деление на число.

В электротехнике принято с помощью векторной диаграммы складывать или вычитать векторы. Очевидно, что эти действия можно производить над векторами, имеющими одинаковую размерность.

На рис. 1.3 а показано сложение двух комплексных токов $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ по правилу параллелограмма. Результатом сложения является комплексный ток $\dot{I}_1$. На рис. 1.3 б показано вычитание комплексного напряжения $\dot{U}_B$ из комплексного напряжения $\dot{U}_A$, в результате чего получаем комплексное напряжение $\dot{U}_{AB}$.

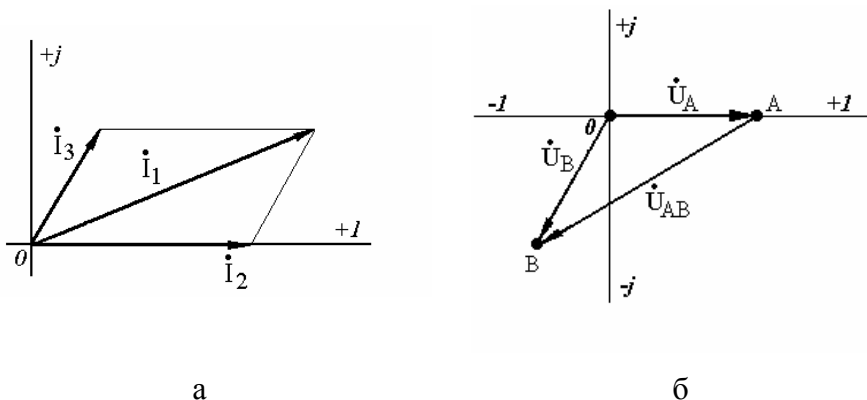


Рис. 1.3

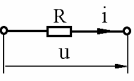
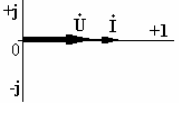
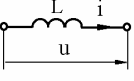
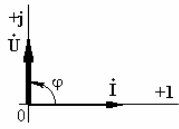
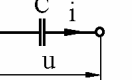
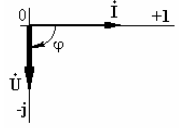
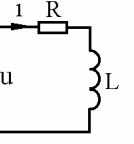
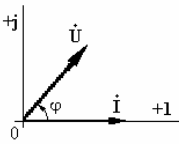
Цель построения векторной диаграммы заключается в том, чтобы иметь возможность качественно контролировать

аналитические расчеты электрических цепей синусоидального тока.

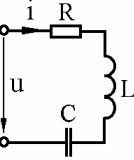
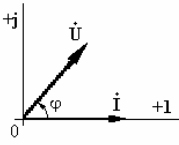
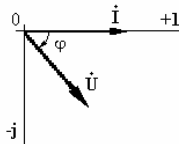
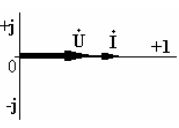
Например, на векторной диаграмме напряжение на индуктивности должно опережать протекающий через нее ток на 90° , а на емкости напряжение должно отставать от тока на 90° .

Эти и другие возможные варианты соединения элементов отдельных участков электрических цепей, их сопротивления и значения (пределы изменения) углов сдвига фаз приводятся в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Элементы	Сопротивление; полное комплексное сопротивление $\bar{Z}$	Угол сдвига фаз между током и Напряжением	Векторная диаграмма
1.Резистор 	R $\bar{Z} = R$	$\varphi = \arctg \frac{X}{R} =$ $= \arctg \frac{0}{R} = 0^\circ$	
2.Катушка индуктивности 	$X_L = \omega L$ $\bar{Z} = jX_L$	$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R} =$ $= \arctg \frac{X_L}{0} = 90^\circ$	
3.Конденсатор 	$X_C = \frac{1}{\omega C}$ $\bar{Z} = -jX_C$	$\varphi = \arctg \frac{-X_C}{R} =$ $= \arctg \frac{-X_C}{0} = -90^\circ$	
4.Резистор и катушка индуктивности 	$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ $\bar{Z} = R + jX_L$	$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R};$ $0^\circ < \varphi < 90^\circ$	

Окончание таблицы 1.2

Элементы	Сопротивление; полное комплексное сопротивление $\bar{Z}$	Угол сдвига фаз между током и Напряжением	Векторная диаграмма
7. Резистор, катушка индуктивности и конденсатор 	$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ $\bar{Z} = R + j(X_L - X_C)$	$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$	
		I. Если $X_L > X_C$, то $0^\circ < \varphi < 90^\circ$	
		II. Если $X_L < X_C$, то $0^\circ < \varphi < -90^\circ$	
		III. Если $X_L = X_C$, то $\varphi = 0^\circ$	

Примечание: в п. 6 табл. 1.1 не рассматривается ведущий к возникновению неопределенности случай, когда $X_L = X_C$.

Обратите внимание, что:

1) Отсчет угла сдвига фаз *всегда* ведется от вектора тока. Если расчет дает результаты, не совпадающие с положениями табл. 1.1, следовательно, в него вкралась ошибка.

2) Векторная диаграмма позволяет зафиксировать положение вращающихся векторов для определенного момента времени. В электротехнике принято, что векторная диаграмма строится для нулевого момента времени ($t = 0$). Построение векторной диаграммы для любого другого момента времени может привести к изменению положения векторов относительно осей комплексной плоскости, однако *взаимное расположение векторов останется неизменным*.

1.8. Полная комплексная мощность

Рассмотрим прием определения активной и реактивной мощностей через комплекс напряжения и сопряженный комплекс тока.

Выше было показано, что токи и напряжения на различных участках электрической цепи синусоидального тока могут не совпадать по фазе.

Пусть к некоторому участку цепи приложено напряжение $\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}$. Тогда ток, протекающий по этому же участку, $\dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$. Умножив комплекс напряжения на *сопряженный комплекс тока* $I^* = Ie^{-j\varphi_i}$, получим комплекс полной мощности (полную комплексную мощность)

$$\tilde{S} = \dot{U} I^* = UIe^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi \pm jUI \sin \varphi = P \pm jQ, (1.27)$$

где значок $\sim$ (тильда) над S означает комплекс полной мощности; P – активная мощность; Q – реактивная мощность.

При этом активная мощность P является действительной частью полной комплексной мощности S , а реактивная мощность Q – ее мнимой частью и обозначаются соответственно:

$$P = \operatorname{Re}(\dot{U} I^*), \quad (1.28)$$

$$Q = \operatorname{Im}(\dot{U} I^*). \quad (1.29)$$

В (1.27) знак перед jQ определяется характером сопротивления на данном участке цепи и зависит от угла φ . Очевидно, что знак «плюс» перед Q ставится, если $\varphi > 0^\circ$, что возможно при выполнении условия $X_L > X_C$; и знак «минус» – если $\varphi < 0^\circ$, что возможно при выполнении условия $X_L < X_C$.

Следует отметить, что единицей измерения активной мощности P является ватт (Вт); единицей измерения реактивной мощности Q – вольт-ампер реактивный (ВАр); единицей измерения полной мощности S – вольт-ампер (ВА).

2. РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА МЕТОДОМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

2.1. Условие расчетного задания №1. Варианты задания

В соответствии с вариантом задания (табл.2.2) выполнить преобразование разветвленной цепи переменного тока, схема которой представлена на рис. 2.1. Условно указать направления токов и напряжений.

Пользуясь комплексным методом, определить токи в ветвях; проверить соблюдение баланса активной, реактивной и

полной мощностей в цепи; определить коэффициент мощности цепи; построить совмещенную векторную диаграмму токов и напряжений на комплексной плоскости.

Параметры элементов цепи даны в табл. 2.1. Один из параметров электрической энергии, необходимый для расчета, задан в табл. 2.2.

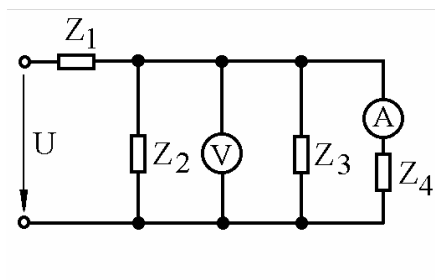


Рис. 2.1

На входе цепи (рис. 2.1) действует напряжение U . Приборы, показанные на рис. 2.1, измеряют следующие параметры: вольтметр – напряжение на разветвленном участке цепи, приложенное одновременно ко второй, третьей и четвертой ветвям (в табл. 2.2 это напряжение обозначено как U_2); амперметр – силу тока в четвертой ветви (в табл. 2.2 обозначен как ток I_4).

Таблица 2.1

Варианты	R , Ом	X_L , Ом	X_C , Ом
с 1 по 30	50	20	15
с 31 по 60	30	40	30
с 61 по 90	10	25	40
с 91 по 120	40	20	60
с 121 по 150	20	30	40

Таблица 2.2

Варианты	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	U , В	U_2 , В	I_4 , А	U_C , В
1,31,61,91,121					-	-	-	90
2,32,62,92,122			∞		-	-	2	-
3,33,63,93,123					-	-	-	50
4,34,64,94,124				∞	-	100	-	-
5,35,65,95,125					120	-	-	-
6,36,66,96,126		∞			-	-	-	40
7,37,67,97,127					220	-	-	-
8,38,68,98,128			∞		-	-	-	60
9,39,69,99,129		∞			-	-	1	-
10,40,70,100,130				∞	-	60	-	-
11,41,71,101,131				∞	-	-	-	30
12,42,72,102,132					100	-	-	-
13,43,73,103,133					-	-	3	-
14,44,74,104,134			∞		-	70	-	-
15,45,75,105,135				∞	150	-	-	-

Окончание табл. 2.2

Варианты	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	U , В	U_2 , В	I_4 , А	U_C , В
16,46,76,106,136		∞			-	40	-	-
17,47,77,107,137			∞		-	-	-	70
18,48,78,108,138				∞	-	80	-	-
19,49,79,109,139					130	-	-	-
20,50,80,110,140			∞		-	-	4	-
21,51,81,111,141					-	-	-	30
22,52,82,112,142					90	-	-	-
23,53,83,113,143				∞	-	120	-	-
24,54,84,114,144			∞		-	-	1,5	-
25,55,85,115,145				∞	180	-	-	-
26,56,86,116,146		∞			-	-	2,5	-
27,57,77,117,147				∞	-	-	-	60
28,58,88,118,148		∞			-	50	-	-
29,59,89,119,149					-	-	2	-
30,60,90,120,150			∞		-	50	-	-

Примечание: знак ∞ означает, что в данном варианте задания указанная ветвь отсутствует.

2.2. Пример решения расчетного задания №1. Методика расчета.

Алгоритмы решения

Выполнить преобразование разветвленной цепи переменного тока, схема которой представлена на рис. 2.1, в соответствии с рис. 2.2, условно указать направления токов и напряжений. Известными являются следующие параметры: активное сопротивление ($R = 2 \text{ Ом}$); индуктивное сопротивление ($X_L = 6 \text{ Ом}$); емкостное сопротивление ($X_C = 10 \text{ Ом}$); напряжение на разветвленном участке цепи ($U_2 = 60 \text{ В}$).

Пользуясь комплексным методом, определить токи в ветвях; проверить соблюдение баланса активной, реактивной и полной мощностей в цепи; определить коэффициент мощности схемы; построить совмещенную векторную диаграмму токов и напряжений на комплексной плоскости.

Дано:

$$R = 2 \text{ Ом};$$

$$X_L = 6 \text{ Ом};$$

$$X_C = 10 \text{ Ом};$$

$$U_2 = 60 \text{ В}$$

Найти: $I_1, I_2, I_3, P, Q, S, \cos \varphi$.

Решение:

1. Выполняем преобразование схемы, представленной на рис. 2.1, в соответствии с рис. 2.2. Четвертая ветвь на рис. 2.3 отсутствует, поскольку ее полное сопротивление равно бесконечности. Направления токов и напряжений условно указаны на рис. 2.3.

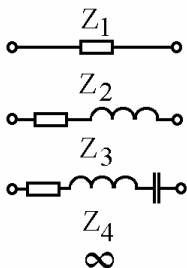


Рис. 2.2

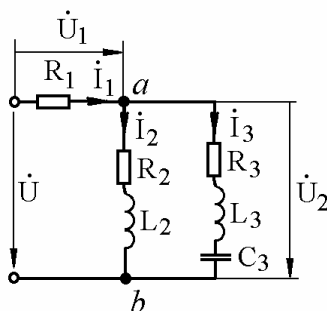


Рис. 2.3

2. На основании *законов Кирхгофа* записываем уравнения для цепи, схема которой представлена на рис. 2.3. Обозначим число узлов буквой **У**, число ветвей буквой **В**. Количество уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно **(У-1)**. Количество уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, равно числу ветвей **В**. Общее количество уравнений, составляемых по законам Кирхгофа, определяют по формуле:

$$В - (У - 1) = В - У + 1. \quad (2.1)$$

Схема, представленная на рис. 2.3, состоит из трех ветвей (**В = 3**) и имеет два узла (**а** и **б**), число узлов (**У=2**). Следовательно, по первому закону Кирхгофа необходимо записать одно уравнение, а по второму – три, тогда общее количество уравнений определяем по формуле (2.1):

$$В - У + 1 = 3 - 2 + 1 = 2. \quad (2.2)$$

На основании *первого закона Кирхгофа* для узла **а** (см. рис. 2.3) можем записать

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3, \quad (2.3)$$

где $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ - комплексные токи первой, второй и третьей ветвей соответственно.

Из рис. 2.3 видно, что вторая и третья ветви соединены параллельно, поэтому на основании *второго закона Кирхгофа* можем записать

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{ab}, \quad (2.4)$$

где $\dot{U}$ - комплексное напряжение, подводимое к цепи от источника; $\dot{U}_1$ - комплексное падение напряжения на первой ветви; $\dot{U}_{ab}$ - напряжение между узлами **a** и **b** (см. рис. 2.3).

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_2 = \dot{U}_3, \quad (2.5)$$

где $\dot{U}_2, \dot{U}_3$ - комплексные падения напряжения на второй и третьей ветвях соответственно.

3. На основании формулы (1.21) и рис. 2.3 запишем полные комплексные сопротивления ветвей:

$$\bar{Z}_1 = R = 2 \text{ Ом}; \quad (2.6)$$

$$\bar{Z}_2 = R + jX_L = 2 + j6 \text{ Ом}; \quad (2.7)$$

$$\bar{Z}_3 = R + jX_L - jX_C = 2 + j6 - j10 = 2 - j4 \text{ Ом}. \quad (2.8)$$

4. Определяем комплексные токи второй и третьей ветвей по закону Ома:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_2}; \quad (2.9)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{60}{(2 + j6)} = \frac{60(2 - j6)}{(2 + j6)(2 - j6)} = \frac{120 - j360}{40} = 3 - j9 \text{ A}; \quad (2.10)$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_3};$$

$$(2.11)$$

$$\dot{I}_3 = \frac{60}{(2 - j4)} = \frac{60(2 + j4)}{(2 - j4)(2 + j4)} = \frac{120 + j240}{20} = 6 + j12 \text{ A} . \quad (2.12)$$

5. На основании выражения (2.3), записанного по первому закону Кирхгофа для узла **a** (см. рис. 2.3), определяем комплексный ток первой ветви

$$\dot{I}_1 = 3 - j9 + 6 + j12 = 9 + j3 \text{ A} . \quad (2.13)$$

6. Определяем действующие значения токов, которые находим путем извлечения квадратного корня из суммы квадратов действительной и мнимой частей:

$$I_1 = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 9,486 \text{ A}; \quad (2.14)$$

$$I_2 = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 9,486 \text{ A}; \quad (2.15)$$

$$I_3 = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{180} = 13,416 \text{ A} . \quad (2.16)$$

7. Определяем комплексное падение напряжения на первой ветви:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \bar{Z}_1; \quad (2.17)$$

$$\dot{U}_1 = (9 + j3) \cdot 2 = 18 + j6 \text{ В.} \quad (2.18)$$

8. На основании выражения (2.4), записанного по второму закону Кирхгофа для схемы (см. рис. 2.3), определяем комплексное напряжение, подводимое к цепи:

$$\dot{U} = 60 + 18 + j6 = 78 + j6 \text{ В.} \quad (2.19)$$

9. Определяем полную комплексную мощность, потребляемую схемой от источника:

$$\tilde{S} = \dot{U} I_1^*; \quad (2.20)$$

$$\tilde{S} = (78 + j6)(9 - j3) = 702 + 18 + j234 - j180 \text{ ВА.} \quad (2.21)$$

10. Составляем баланс мощности. Считают, что баланс мощности сходится, если полная комплексная мощность, потребляемая от источника, равна сумме комплексных мощностей всех ветвей цепи:

Активные мощности ветвей определяем следующим образом:

$$P_1 = I_1^2 R; \quad (2.22)$$

$$P_1 = 9,486^2 \cdot 2 = 180 \text{ Вт}; \quad (2.23)$$

$$P_2 = I_2^2 R; \quad (2.24)$$

$$P_2 = 9,486^2 \cdot 2 = 180 \text{ Вт}; \quad (2.25)$$

$$P_3 = I_3^2 R; \quad (2.26)$$

$$P_3 = 13,416^2 \cdot 2 = 360 \text{ Вт.} \quad (2.27)$$

Определяем реактивные мощности ветвей. Реактивные элементы в первой ветви отсутствуют, поэтому можем записать

$$Q_1 = 0 \text{ ВАр} . \quad (2.28)$$

Для второй и третьей ветви получим

$$Q_2 = I_2^2 X_L ; \quad (2.29)$$

$$Q_2 = 9,486^2 \cdot 6 = 540 \text{ ВАр} ; \quad (2.30)$$

$$Q_3 = I_3^2 (X_L - X_C) ; \quad (2.31)$$

$$Q_3 = 13,416^2 (6 - 10) = -720 \text{ ВАр} . \quad (2.32)$$

Составляем баланс активной и реактивной мощностей:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 ; \quad (2.33)$$

$$P = 180 + 180 + 360 = 720 \text{ Вт} ; \quad (2.34)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 ; \quad (2.35)$$

$$Q = 0 + 540 + (-720) = -180 \text{ ВАр} . \quad (2.36)$$

Сравнив результат проведенного выше расчета с данными п.10, видим, что баланс мощностей сходится как по активной, так и по реактивной мощностям.

11. Определяем коэффициент мощности цепи:

$$\cos \varphi = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} ; \quad (2.37)$$

$$\cos \varphi = \frac{720}{\sqrt{720^2 + 180^2}} = \frac{720}{742,159} = 0,970 \Rightarrow \varphi = 14^\circ 04' . \quad (2.38)$$

12. Строим совмещенную векторную диаграмму токов и напряжений на комплексной плоскости (рис. 2.4). Масштабы: по току $M_I = 3 \text{ А / см}$; по напряжению $M_U = 10 \text{ В / см}$.

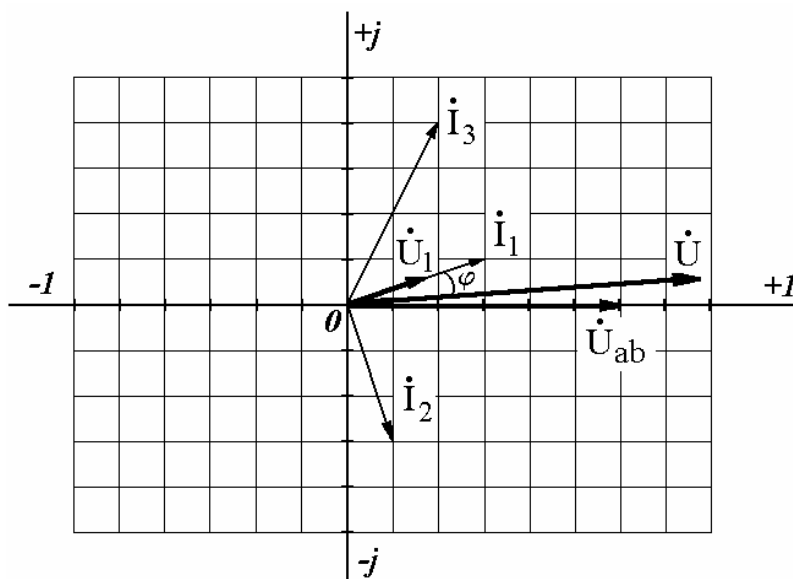


Рис. 2.4

Напомним, что в каждом отдельном варианте известен только один из параметров U , U_2 , I_4 , U_C . В п. 2.1 рассмотрены методика и алгоритм решения для случая, когда известным является напряжение U_2 . Алгоритмы решения для других возможных вариантов необходимо выбрать из табл. 2.3.

Таблица 2.3

U	I_4	U_C		
		Конденсато р уста- новлен в первой ветви	Конденсато р уста- новлен в первой ветви	Конденсато р уста- новлен в первой ветви
$\bar{Z}_{34} = \frac{\bar{Z}_3 \bar{Z}_4}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4}$	$\dot{U}_{ab} = \bar{Z}_4 \dot{I}_4$	$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{-jX_C}$		
$\bar{Z}_{234} = \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_{34}}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_{34}}$	$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_3}$	$\dot{I}_1 = \dot{I}_C$ $\dot{U}_1 = \bar{Z}_1 \dot{I}_1$	$\dot{I}_2 = \dot{I}_C$ $\dot{U}_{ab} = \bar{Z}_2 \dot{I}_2$	$\dot{I}_3 = \dot{I}_C$ $\dot{U}_{ab} = \bar{Z}_3 \dot{I}_3$
$\bar{Z}_9 = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{234}$	$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_2}$	$\bar{Z}_{34} = \frac{\bar{Z}_3 \bar{Z}_4}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4}$	$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_3}$	$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_2}$
$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\bar{Z}_9}$	$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$	$\dot{U}_{ab} = \bar{Z}_{34} \dot{I}_1$	$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_4}$	
$\dot{U}_1 = \bar{Z}_1 \dot{I}_1$		$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_3}$	$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4$	
$\dot{U}_{ab} = \dot{U} - \dot{U}_1$	$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{ab}$	$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_4}$	$\dot{U}_1 = \bar{Z}_1 \dot{I}_1$	
$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_2}$	-	$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{ab}$		
$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_3}$	-	-	-	-
$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_4}$	-	-	-	-

Примечание: $\bar{Z}_{34}$ - полное комплексное сопротивление параллельно соединенных третьей и четвертой ветвей; $\bar{Z}_{234}$ - полное комплексное сопротивление параллельно соединенных второй, третьей и четвертой ветвей; $\bar{Z}_\Sigma$ - эквивалентное полное комплексное сопротивление всей цепи.

Следует отметить, что методика расчета баланса мощностей, рассмотренная в п. 2.2, является общей для всех вариантов.

2.3. Примерный перечень контрольных вопросов при защите расчетного задания №1

1. Что такое комплексное число? В каких формах записи могут быть представлены комплексные числа?

2. Какие действия можно производить над комплексными числами? Какая форма записи комплексных чисел является более удобной для каждого из рассмотренных действий?

3. В чем заключается сущность расчета электрических цепей синусоидального переменного тока методом комплексных чисел?

4. Задавшись законом изменения тока $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$, изобразите его в виде вектора на комплексной плоскости. Чем определяется длина этого вектора?

5. Задавшись значениями активного сопротивления R , индуктивности L и емкости C , запишите комплексное сопротивление $\bar{Z}$ в алгебраической и показательной формах.

6. Что такое угол сдвига фаз между током и напряжением, от чего он зависит?

7. Что такое совмещенная векторная диаграмма на комплексной плоскости? Какова цель ее построения?

8. Почему при построении векторной диаграммы на комплексной плоскости откладывают токи и напряжения и не откладывают комплексные сопротивления?

9. Запишите и объясните выражение закона Ома в комплексной форме.

10. Запишите и объясните выражение первого закона Кирхгофа в комплексной форме.

11. Запишите и объясните выражение второго закона Кирхгофа в комплексной форме.

12. Запишите и объясните выражение для полной мощности в комплексной форме.

13. Объясните алгоритм решения расчетного задания №1 для своего варианта.

14. Объясните, как определяется количество уравнений, записываемых на основании законов Кирхгофа, для схемы своего варианта.

15. Объясните методику проверки баланса мощностей.

16. Объясните методику построения векторной диаграммы для своего варианта.

Библиографический список к первому и второму разделам

1. *Касаткин А.С., Немцов М.В.* Электротехника: Учебник для вузов. М.: Энергоатомиздат, 2000. С. 37-87.

2. *Рекус Г.Г., Белоусов А.И.* Сборник задач по электротехнике и основам электроники. М.: Высш. школа, 1991. С. 78-83, 89-98, 110-140.

5. ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ УКАЗАНИЯ. ОФОРМЛЕНИЕ И ЗАЩИТА РАСЧЕТНЫХ ЗАДАНИЙ

Руководство выполнением расчетных заданий осуществляет лектор потока или преподаватель, ведущий практические и лабораторные занятия в каждой учебной подгруппе. Расчетные задания выдаются по мере изучения тем курса, при этом каждому студенту указывается номер одного из вариантов, приведенных в табл. 2.1 и табл. 2.2 для расчетного задания №1 или в табл. 4.1 и табл. 4.2 для расчетного задания №2. Срок выполнения расчетных заданий определяет руководитель.

Для своевременного и качественного выполнения расчетных заданий студенты обязаны посещать консультации по самостоятельной работе, предусмотренные учебным расписанием, и могут использовать часы консультаций, проводимых лектором.

Оформлять расчетные задания следует на двойных тетрадных листах. Первым листом расчетного задания является титульный лист, образец оформления которого представлен в Приложении. Векторные диаграммы могут быть выполнены на миллиметровой бумаге.

К защите расчетного задания студент должен представить полностью заверченный и оформленный расчет с пояснением используемых формул и проводимых преобразований, содержащий исходные данные, схемы и совмещенные векторные диаграммы с указанием масштабов.

Выполненное и оформленное расчетное задание сдается на проверку руководителю. После проверки производится защита расчетных заданий, проводимая в форме собеседования. По результатам собеседования (с учетом срока сдачи расчетного задания на проверку) студенту выставляется оценка, которая фиксируется в журнале учебной группы и учитывается при подсчете рейтинга.

Приложение

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

*Казанский государственный технологический университет
Кафедра
электротехники и электропривода*

***РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО
ПЕРЕМЕННОГО ТОКА МЕТОДОМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ***

*Расчетное задание №1 по курсу
Электротехника*

Вариант №19

*Выполнил студент гр. 89-22
Принял*

*Д.А. Богатырев
доц. Ю.Г. Соколов*

2011

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Расчет электрических цепей синусоидального переменного тока методом комплексных чисел	3
1.1. Понятие о комплексных числах. Комплексная плоскость	3
1.2. Формы записи комплексных чисел	4
1.3. Действия над комплексными числами	5
1.4. Способы изображения синусоидальных функций времени	6
1.5. Метод комплексных чисел. Законы электрических цепей в комплексной форме	8
1.6. Понятие о полном комплексном сопротивлении	9
1.7. Угол сдвига фаз. Векторная диаграмма	10
1.8. Полная комплексная мощность	15
2. Расчет разветвленной цепи переменного тока методом комплексных чисел	17
2.1. Условие расчетного задания №1. Варианты заданий	17
2.2. Пример решения расчетного задания №1. Методика расчета. Алгоритмы решения	20
2.3. Примерный перечень контрольных вопросов при защите расчетного задания №1	28
Библиографический список к первому и второму разделам	29
3. Трехфазные электрические цепи	30
3.1. Трехфазная система питания потребителей электроэнергии. Расширение понятия «фаза». Расчет трехфазных цепей	30
3.2. Трехфазные трехпроводные цепи при соединении фаз нагрузки «звездой»	33

3.3. Трехфазные четырехпроводные цепи при соединении фаз нагрузки «звездой»	36
3.4. Трехфазные электрические цепи при соединении фаз нагрузки «треугольником»	38
3.5. Активная, реактивная и полная мощности трехфазной цепи	40
3.6. Измерение активной мощности в трехфазных цепях	41
4. Расчет трехфазных цепей методом комплексных чисел	44
4.1. Условие расчетного задания №2. Варианты задания	44
4.2. Пример решения расчетного задания №2	47
4.3. Примерный перечень контрольных вопросов при защите расчетного задания №2	58
Библиографический список к третьему и четвертому разделам	59
5. Организационные указания. Оформление и защита расчетных заданий	60
Приложение. Образец оформления титульного листа	61

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА МЕТОДОМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

*Макаров Валерий Геннадьевич
Цвенгер Игорь Геннадьевич
Запускалова Татьяна Александровна
Желонкин Антон Владиславович*

Редактор Л. Г. Шевчук
Корректор Ю. Е. Стрыхарь

Лицензия № 020404 от 6.03.97 г.

Подписано в печать 5.09.2001	Формат
60x84 1/16	
Бумага писчая	Печать <i>RISO</i>
усл. печ. л.	3,72
4,0 уч. изд.л.	Тираж 100 экз.
241 «С» 165	Заказ

Издательство Казанского государственного
технологического университета
Офсетная лаборатория Казанского государственного
технологического университета
420015, Казань, К. Маркса, 68