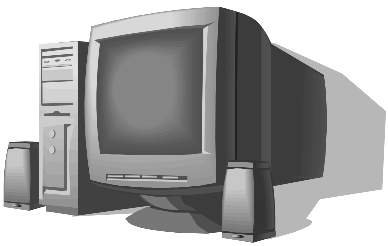
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

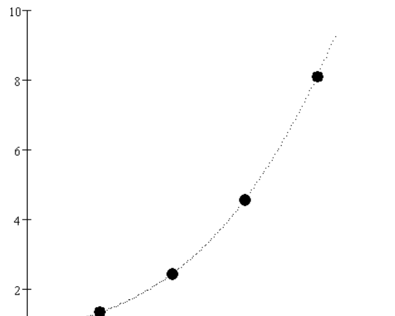
РОССИЙСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ЭВМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ





$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1$$
$$\ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots$$

Новомосковск 2007

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ

Артамонова Л.А., Мочалин В.П., Тивиков А.С.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ ПО КУРСАМ
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА», «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

НА ТЕМУ

«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ЭВМ»

Методические указания

Новомосковск 2007

УДК 681.3
ББК 32.97
А 864

Рецензенты
канд. техн. наук, доцент Новомосковского института
Российского химико-технологического университета им.
Д.И. Менделеева
В.Г. Лёвшин
канд. техн. наук, доцент Новомосковского института
Российского химико-технологического университета им.
Д.И. Менделеева
А.Г. Лопатин

А 864 Составители: **Артамонова Л.А., Мочалин В.П., Тивиков А.С. Численные методы интерполяции на ЭВМ.** Методические указания/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т. Новомосковск, 2007, 31 с.

В методических указаниях рассмотрены основные численные методы интерполяции. Приведены основы теории по различным методам интерполяции, особенности программирования и решения задач интерполяции на ЭВМ, а также контрольные вопросы и задания.

Методические указания могут быть рекомендованы для студентов всех специальностей заочной формы обучения, обучающихся по дисциплине «Вычислительная математика» и «Численные методы и программирование» и изучающих численные методы интерполяции. Методические указания могут быть использованы студентами дневной и вечерней формы обучения и другими категориями пользователей, интересующимися задачами интерполирования.

Ил. 7. Табл. 3. Библиогр.: 7 назв.

ББК 32.97
УДК 681.3

Оглавление

1. ВВЕДЕНИЕ

При проведении испытаний современных сложных технических систем приходится обрабатывать и анализировать очень большие объемы информации. В настоящее время качественная обработка информации невозможна без применения компьютерной техники. Современные математические методы интерполяции достаточно подробно изложены в ряде трудов отечественных и зарубежных авторов. Однако многие изложения носят чисто теоретический характер, где недостаточное внимание уделяется аспектам практического использования методов аппроксимации.

С появлением большого количества математических пакетов для современных компьютеров еще более увеличился разрыв между общей теорией интерполяции и уровнем практического использования инженерами методов интерполяции. Методики интерполяции могут быть легко реализованы с использованием средств пакета прикладных программ MathCAD. Выбор этого пакета обусловлен тем, что он позволяет в удобной форме представлять и просматривать информацию, а также создавать пользовательские функции и процедуры довольно сложной структуры. Вместе с тем запись этих программ производится в форме, удобной для понимания даже неискушенными пользователями. Рамки традиционных языков программирования не позволяют втиснуть богатый набор инструментария MathCAD, который реализован в виде функций в общепринятом математическом виде.

В первой главе рассмотрены теоретические основы интерполяции, различные численные методы интерполяции и особенности оценки правильности построения интерполяционных многочленов.

Во второй главе рассмотрены особенности программной реализации численных методов интерполирования в программной среде MathCAD.

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

1.1. Приближение функции одной переменной

В вычислительном анализе задачи приближения возникают часто:

- когда необходимо заменить сложную в вычислительном плане функцию более простой.
- Когда необходимо вычислить значение таблично заданной функции в точке, значение которой напрямую отсутствуют в этой таблице.
- Когда необходимо получить аналитическое выражение описывающее экспериментально полученные данные.
- Когда необходимо дифференцировать или интегрировать таблично заданную функцию или функцию, сложную в вычислительном плане и т.д.

На принципиальную возможность приближения функций указывает **теорема Вейерштрасса**:

Для любой непрерывной функции f(x) на каком-либо отрезке [a;b], имеющей непрерывные производные любого порядка, всегда можно подобрать такой многочлен степени «n» - $P_n(x)$, для которого $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ *, сколь мало бы «* ε *» не было.*

Эта теорема говорит о том, что любая непрерывная дифференцируемая функция может быть заменена на многочлен n-ой степени от x.

Все задачи приближения делятся на 2 части:

1) задачи интерполяции
2) задачи аппроксимации.

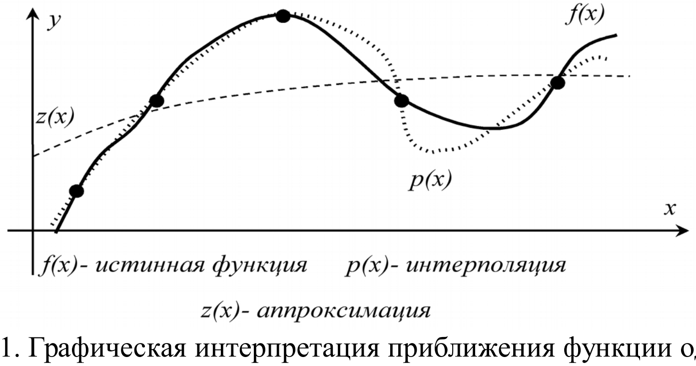


Рис. 1. Графическая интерпретация приближения функции одной переменной: интерполяция и аппроксимация.

В задачах интерполяции требуется совпадение значений функции f(x) и многочлена $P_n(x)$ в заданных точках.

В задачах аппроксимации точного совпадения не требуется, но зависимости должны быть близки друг к другу в смысле некоторого критерия.

Графики задач приближения представлены на рис. 1. В данном методическом пособии будем рассматривать только задачи интерполяции.

1.2. Постановка задачи интерполяции

Интерполяция – это замена исходной функции f(x) (которая задана таблично, сложно аналитически, кусочно и т.д.) многочленом n–го порядка так, чтобы значение функции f(x) и многочлена $P_n(x)$ точно совпадали в заданных точках (узлах интерполяции).

При выполнении интерполяции делаются следующие допущения:

1) Функция f(x) непрерывна
2) Функция f(x) имеет конечные производные до n+1 порядка включительно
3) Функция f(x) однозначна, т.е. одному значению x соответствует только один y
4) Узлы интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ значимо отличаются друг от друга.

В этом случае задача интерполирования может быть сформулирована следующим образом: задано n+1 точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ исходной функции f(x) и значения (табл.1.):

Таблица 1. Исходные данные для интерполяции.

x	**y**
x_0	$y_0=f(x_0)$
x_1	$y_1=f(x_1)$
x_2	$y_2=f(x_2)$
…….	………..
x_n	$y_n=f(x_n)$

Необходимо вычислить коэффициенты выбранного интерполяционного многочлена так, чтобы значения функций и значения многочлена совпадали.

Различают 2 типа задач интерполирования:

1) Интерполяция в широком смысле, когда необходимо построить аналитическую зависимость, заменяющую исходную функцию.

2) Интерполяция в узком смысле – когда необходимо вычислить значение функции в точке x, не являющейся узлом интерполяции.

Кроме того различают интерполяцию и экстраполяцию.

1) Интерполяция – замена функции и вычисление внутри отрезка $[x_0;x_n]$

2) Экстраполяция – замена функции и вычисление за пределами отрезка $[x_0;x_n]$. Экстраполирование вперед называется прогнозированием.

Методы интерполяции отличаются видами интерполяционных многочленов и методами расчета их коэффициентов: метод Вандермонда, Лагранжа, Ньютона, сплайны.

1.3. Метод Вандермонда

По этому методу в качестве интерполяционного многочлена выбирают степенной ряд вида:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n;$$

Этот ряд содержит n+1 неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$. Чтобы найти коэффициенты этого ряда используется сама постановка задачи интерполяции:

$$P_n(x_0)=y_0, \quad P_n(x_1)=y_1, \quad P_n(x_2)=y_2 \;\ldots.\; P_n(x_n)=y_n$$

Это позволяет построить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx^n{}_0=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx^n{}_1=y_1 \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\ldots+a_nx^n{}_2=y_n \end{cases}$$

где $a_0,a_1,a_2\ldots,a_n$ - ?

Решая эту систему методом Крамера, Гаусса, методом простых итераций, Зейделя определяют коэффициенты $a_0,a_1,a_2\ldots,a_n$

Достоинства:

1) простота многочлена и возможность дальнейшего использования

2) простота определения коэффициентов $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$

Недостатки:

1) низкая точность вычисления коэффициентов (при n>5 погрешности вычисления коэффициентов a_i превышают погрешность интерполирования.

2) При изменении узлов интерполяции решение задачи полностью повторяется от начала до конца и все коэффициенты меняются.

1.4. Многочлен Лагранжа

Для интерполяции часто используются дробно-рациональные функции. Ярким представлением таких функций является многочлен Лагранжа, в основу которого положена функция Кронекера. В расширенном виде этот многочлен имеет вид

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\cdot y_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\cdot y_n$$

Для удобства использования этот многочлен можно переписать в виде:

$$P_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{A_j y_j}{(x-x_j)}\right], \qquad где \quad A_j = \frac{1}{\prod\limits_{i=0;i\neq j}^{n}(x_j - x_i)}$$

A_j –коэффициенты многочлена Лагранжа.

Достоинства:

- удается использовать при интерполировании в узком смысле
- при использовании вычисления дробей по способу поочередной смены операции. Точность вычисления дробей достаточно высока.

Недостатки:

- при интерполировании в широком смысле требуется вычислить множество алгебраических преобразований.
- В результате алгебраических преобразований теряется точность вычисления коэффициентов преобразования многочлена.

1.5. Многочлены Ньютона

Два предыдущих многочлена имеют крупный недостаток: при изменении количества узлов приходилось перестраивать весь многочлен полностью. Этих недостатков лишены многочлены Ньютона. Их два, вид их одинаков. Они отличаются выбором опорной точки.

Если опорной является начальная точка таблицы $x_{0;}$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x$$

Если опорная точка последняя x_n:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_n) + b_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + b_n(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – разделенные разности для опорной точки x_0

$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ - разделенные разности для опорной точки x_n

$$\begin{cases} a_0 = \delta_0^{\,0} \\ a_1 = \delta_0^{\,1} \\ a_2 = \delta_0^{\,2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n = \delta_0^{\,n} \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_0 = \delta_n^{\,0} \\ b_1 = \delta_n^{\,1} \\ b_2 = \delta_n^{\,2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n = \delta_n^{\,n} \end{cases}$$

где $\delta_i^{\,j}$ - разделенная разность j-го порядка для I-той опорной точки.

В качестве опорной точки можно выбрать любую точку таблицы, но при этом количество узлов интерполяции уменьшится. Если опорной является первая точка таблицы, то такой интерполяционный многочлен называется многочленом для интерполирования вперед, а если за опорную точку выбирается последняя точка, то многочлен называется многочленом для интерполирования назад.

Недостаток: для упрощения требуется дополнительные аналитические преобразования.

1.6. Таблица конечных разностей и их свойства

Если узлы интерполяции представляют собой регулярную таблицу (расстояния между значениями x одинаковое), то свойства таких таблично заданных функций можно описать с помощью *таблицы конечных разностей*.

Конечную разность I-го порядка называют разность между двумя соседними значениями функции.

Обозначения:

$$\begin{cases} \Delta_i^0 = y_i \\ \Delta_i^1 = \Delta_i = y_{+i} - y_i \\ \Delta_i^2 = \Delta_{i+1}^1 - \Delta_i^1 \\ \Delta_i^k = \Delta_{i+1}^{k-1} - \Delta_i^{k-1} \end{cases}$$

В верхней части Δ_i^k указывается порядок разности ($к$), в нижней части – номер точки, к которой относится разность (i).

У конечных разностей I-го порядка цифра, обозначающая порядок разности может опускаться.

Конечные разности оформляют в виде диагональных или треугольных таблиц (табл.2.):

Таблица 2. Таблица конечных разностей.

x_i	y_i	Δ_i^1	Δ_i^2	…	Δ_i^n
x_0	y_0	$\Delta_0^1=y_1-y_0$	$\Delta_0^2=\Delta_1^1-\Delta_0^1$		$\Delta_n^n=\Delta_{n-1}^{n-1}-\Delta_n^{n-1}$
x_1	y_1	$\Delta_1^1=y_2-y_1$	$\Delta_1^2=\Delta_2^1-\Delta_1^1$		
x_2	y_2	$\Delta_2^1=y_1-y_0$	$\Delta_2^2=\Delta_3^1-\Delta_2^1$		
…	…	…			
x_n	y_n	$\Delta_n^1=0$			

В треугольных таблицах разности относящейся к i-ой точке записывается в i-ой строке.

В диагональных таблицах разности относящейся к i-ой точке записывается между i-ой и $i+1$-ой строчками.

Таблицы конечных разностей обладают следующими свойствами:

1. Сумма конечных разностей *к*-го порядка равна разности крайних конечных разностей *(к-1)* –го порядка, т.е.

$$\sum_{i=0}^{n} \Delta_i^k = \Delta_n^{k-1} - \Delta_0^{k-1}$$

Это свойство используется для проверки правильности составления таблицы конечных разностей.

2. Если исходную функцию *у* умножить на постоянный коэффициент, то и все конечные разности следует умножить на тот же коэффициент.
3. Если исходную функцию можно представить в виде суммы функций, конечные разности которых известны, то конечные разности исходной функции можно определить как суммы конечных разностей соответствующих порядков составляющих сумм функций.
4. Если функция представляет собой многочлен *к*-го порядка, то конечные разности *к*-го порядка для такой функции будут постоянны, а разности более высоких порядков равны нулю.
5. Если исходная функция определялась экспериментально или расчетным путем, то случайные ошибки измерений или вычислений можно определить по таблице конечных разностей следующим образом: ошибка находится в той строке таблицы, где для четных разностей находится самая большая величина (относительно всех прочих), а для нечетных разностей верхних и нижних соседних строках, причем сумма ошибок в столбце любой разности *к*-го порядка равна нулю, а сумма модулей ошибок равна 2^k .ε, где ε - величина ошибки.

1.7. Таблица разделенных разностей и их свойства

Если узлы интерполяции представляют собой нерегулярную таблицу, то свойства таких таблично заданных функций можно описать с помощью *таблицы разделенных разностей*.

Обозначение: $\delta_i^к$,

где *к* - порядок разделенной разности

i-номер точки.

Считается, что *разделенные разности нулевого порядка* равны значениям функции:

$$\delta_i^0 = y_i$$

Разделенными разностями I-го порядка называется отношение разности значений функции в 2-х точках к разности аргументов в этой точке.

$$\delta_i^1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Разделенными разностями к-го порядка называется отношение разности разделенных разностей *(к-1)*-го порядка в 2-х соседних точках к разности аргументов в крайних точках, которые используются для расчета этих разделенных разностей:

$$\delta_i^k = \frac{\delta_{i+1}^{k-1} - \delta_i^{k-1}}{x_{i+k} - x_i}$$

Таблицы разделенных разностей бывает треугольного и диагонального вида и обладает теми же свойствами, что и таблица конечных разностей, кроме первого свойства.

Если таблица регулярна, то для нее тоже можно построить таблицу разделенных разностей. При этом разделенные разности и конечные разности будут связаны соотношением:

$$\delta_i^k = \frac{\Delta_i^k}{k! \cdot h^k}$$

Пример: построить интерполяционный многочлен Вандермонда, Лагранжа и Ньютона для интерполяции в широком смысле для следующей табличной функции:

i	***x***	***y***
0	*0*	*5*
1	*1*	*6*
2	*2*	*13*
3	*5*	*132*

Решение:

1. Интерполяционный многочлен Вандермонда имеет вид:

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Для определения коэффициентов построим систему линейных уравнений относительно независимых коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3:

$a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0^2+a_3\cdot 0^3=5$ $\qquad$ $a_0=5$

$a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1^2+a_3\cdot 1^3=6$ $\qquad$ $a_1+a_2+a_3=6$

$a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+a_3\cdot 2^3=13$ $\qquad$ $2\cdot a_1+4\cdot a_2+4\cdot a_3=13$

$a_0+a_1\cdot 5+a_2\cdot 5^2+a_3\cdot 5^3=132$ $\qquad$ $5\cdot a_1+25\cdot a_2+125\cdot a_3=13$

Решим систему методом подстановки:

- вычтем из II-ой строки I-ую, умноженную на 2 (II′=II-2·I)
- вычтем из III-ей строки I-ую, умноженную на 5 (III′=III-5·I)

$a_1+a_2+a_3=6$

$2\cdot a+6\cdot a_3=6$

$20\cdot a_1+120\cdot a_3=122$

- вычтем из III-ей строки II-ую, умноженную на 10 (III″=III′-10·II)

$2\cdot a_2+6\cdot a_3=6$

$60\cdot a_3=62$

Отсюда $a_3=1{,}09$, $a_2=2{,}9$, $a_1=1{,}933$

Таким образом, интерполяционный многочлен Вандермонда примет вид:

$$P_3(x)=5+1{,}933\cdot x+2{,}9\cdot x^2+1{,}09\cdot x^3$$

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа для трёх точек:

$$L_3(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)}\cdot y_0+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}\cdot y_1+$$

$$+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}\cdot y_2+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}\cdot y_3$$

или

$$L_3(x)=\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)}{(0-1)\cdot(0-2)\cdot(0-5)}\cdot 5+\frac{(x-0)\cdot(x-2)\cdot(x-5)}{(1-0)\cdot(1-2)\cdot(1-5)}\cdot 6+$$

$$+\frac{(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-5)}{(2-0)\cdot(2-1)\cdot(2-5)}\cdot 13+\frac{(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{(5-0)\cdot(5-1)\cdot(5-2)}\cdot 132$$

Преобразуем уравнение

$$L_3(x)=x^3\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{13}{6}+\frac{66}{30}\right)+x^2\cdot\left(4-\frac{21}{2}-13-\frac{198}{30}\right)+x\cdot\left(-\frac{17}{2}+\frac{30}{2}-\frac{65}{6}\right)+5$$

$$=5+1.933\cdot x+2.9\cdot x^2+1.09\cdot x^3$$

3. Интерполяционный многочлен Ньютона

Построим таблицу разделенных разностей:

i	x_i	$y_i=\delta_i^0$	δ_i^1	δ_i^2	δ_i^3
0	0	5	(6-5)/(1-0)=1	(7-1)/(2-0)=3	(8,14-3)/(5-0)=1,09
1	1	6	(13-6)/(2-1)=7	(39,7-7)/(5-1)=8,14	
2	2	13	(132-13)/(5-1)=39,7		
3	5	132			

Из таблицы разделенных разностей найдем неизвестные коэффициенты : $a_0=y_0=\delta_0^0=5,\ a_1=\delta_0^1=1,\ a_2=\delta_0^2=3,\ a_3=\delta_0^3=1{,}09$

Многочлен Ньютона:

$N_3(x)=a_0+a_1\cdot(x-x_0)+a_2\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)+a_3\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=5+1\cdot(x-0)+3\cdot(x-0)\cdot(x-1)+1.09\cdot(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-2)=5+1.933\cdot x+2.9\cdot x^2+1.09\cdot x^3$

1.8. Единственность интерполяционного многочлена

Докажем, что для одной и той же таблицы через $(n+1)$ узел любым способом можно построить один единственный интерполяционный многочлен.

Доказательство от противного: предположим, что через $x_0, x_1 \ldots x_n$, $y_0, y_1 \ldots y_n$ было построено два многочлена вида:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

$$Z_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n.$$

Определим их разность, как многочлен n-ой степени.

$$P_n(x)-Z_n(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots+(a_n-b_n)x^n \quad (*)$$

В соответствии с ***теоремой Ролля****, любой многочлен n-го порядка обращается в ноль n раз в точках, которые являются корнями этого многочлена.*

Таким образом, $P_n(x)-Z_n(x)$ будет обращаться в ноль во всех заданных узлах интерполяции, так как $P_n(x_i)=y_i$ и $Z_n(x_i)=y_i$, по условию интерполяции.

То есть многочлен $P_n(x)-Z_n(x)$ будет обращаться в ноль в $(n+1)$-ой точке, что противоречит теореме Роля.

В виду того, что уравнение (*) обращается в ноль, если $x_i\neq 0$ только если:

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2, \ldots\ a_n=b_n,$$

тогда многочлены $P_n(x)$ и $Z_n(x)$ совпадают.

Теорема. *Для заданной таблицы, содержащей (n+1)-ую точку можно построить единственный интерполяционный многочлен n-го порядка, каким бы способом этот многочлен не строили.*

1.9. Погрешность интерполяции

При интерполяции следует различать расчетные точки. Если точка является узлом, то погрешность интерполяции в ней равна нулю, в соответствии с постановкой задачи интерполирования.

Во всех промежуточных точках погрешность будет зависеть от положения этих точек, и определяться разностью между истинным значением многочлена $P_n(x)$.

$$R(x)=|f(x)-P_n(x)|$$

Если это выражение продифференцировать $(n+1)$ раз, то все слагаемые от многочлена $P_n(x)$ кроме последнего слагаемого исчезнут. Применяя для вычисления производной от функции $f(x)$ на отрезке $(x_0;x_n)$ теорему о среднем можно получить оценку для погрешности интерполирования в виде:

$$R(x)=\frac{M^{(n+1)}}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

где $M^{(n+1)}$ – максимальное по модулю значение производной $(n+1)$-го порядка от исходной функции на отрезке $(x_0;x_n)$;

x – значение в точке, где оценивают погрешность;

n – порядок интерполяционного многочлена.

Если производную $(n+1)$-го порядка $M^{(n+1)}$ аналитически определить нельзя, то ее приближенно заменяют разделенной разностью $(n+1)$-го порядка: $M^{(n+1)}=\delta_{max}^{n+1}$

1.10. Сплайн

Если исходная функция $f(x)$ отличается высокой нелинейностью, то для описания этой функции приходится строить интерполяционные многочлены высокого порядка, что увеличивает погрешности оценки коэффициентов в многочлене $P_n(x)$ и снижает качество интерполяции.

В этом случае используется дробное интерполяция – кусочное интерполяция сплайнами.

Сплайн – кусочная функция, которая описывается разными зависимостями на разных отрезках.

Для интерполирования сплайн имеет вид:

$$S(x)=\begin{cases} P_1(x), если \quad x_0 \le x \le x_1; \\ P_2(x), если \quad x_1 \le x \le x_2; \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ P_n(x), если \quad x_{n-1} \le x \le x_n. \end{cases}$$

Функция *S(x)* обладает следующими свойствами:

1) Соседние интерполяционные многочлены имеют одинаковые значения на границах сплайна. Эти значения совпадают с узлами интерполяции.

2) Производные от кусочных функций $P_1, P_2, \dots, P_n$ I-го, II-го и т.д. порядков имеют одинаковые значения на границе сплайнов.

3) Максимально возможные отличия от нуля производные от I-го и последнего сплайнов на концах отрезка интерполирования $(x_0;x_n)$ стремятся к нулю.

Чаще всего для интерполяции выбирают сплайны не выше 3-го порядка.

В зависимости от выбора порядка сплайна различают дефекты интерполирования *дефекты сплайна.*

Дефект сплайна – количество нарушенных свойств сплайна.

Например, если выбраны линейные сплайны, то для них можно построить только производные II-го порядка зависимости от *x*, которые не могут быть равны нулю в точках x_0 и x_n , т.к. в этих случаях коэффициенты сплайна окажутся равны нулю (нарушается 3 свойство). Значение коэффициентов *S(x)* вычисляется из системы уравнений, которые строятся в соответствии со свойствами и решаются любыми численными методами.

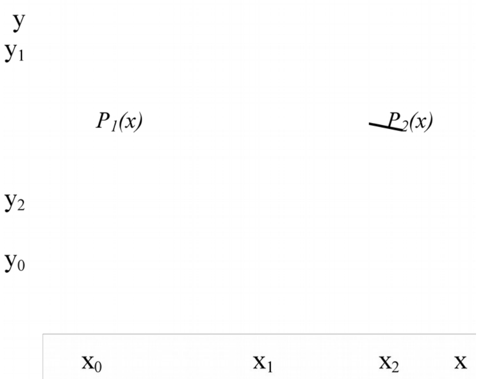


Рис.2. Интерполяция сплайнами.

Например, используем кубический сплайн - необходимо найти 8 коэффициентов (Рис.2)

$P_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+ a_3x^3$,

$P_2(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$

Используя свойства $S(x)$ составим систему из 8-и алгебраических уравнений (свойство 1):

$$\boldsymbol{a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3=y_0;}$$
$$\boldsymbol{a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3=y_1;}$$
$$\boldsymbol{b_0+b_1x_1+b_2x_1^2+b_3x_1^3=y_1;}$$
$$\boldsymbol{b_0+b_1x_2+b_2x_2^2+b_3x_2^3=y_2;}$$

Используя свойство 2 приравниваем в точках соприкосновения сплайнов I -ую и II-ую производные.

$P'_1(x)=a_1+2\cdot a_2\cdot x+3\cdot a_3x^2$ $\quad$ $P''_1(x)=2\cdot a_2+6\cdot a_3\cdot x$

$P'_2(x)=b_1+2\cdot b_2\cdot x+3\cdot b_3\cdot x^2$ $\quad$ $P''_2(x)=2\cdot b_2+6\cdot b_3\cdot x$

$$\boldsymbol{a_1+2\cdot a_2\cdot x+3\cdot a_3x^2=b_1+2\cdot b_2\cdot x+3\cdot b_3\cdot x^2} \qquad \boldsymbol{2\cdot a_2+6\cdot a_3\cdot x=2\cdot b_2+6\cdot b_3\cdot x}$$

Используя свойство 3 имеем: $P''_1(x_0)=0$ и $P''_2(x_2)=0$

$$\boldsymbol{2\cdot a_2+6\cdot a_3\cdot x_0=0} \qquad \boldsymbol{2\cdot b_2+6\cdot b_3\cdot x_2=0}$$

Имеем 8 уравнений и 8 неизвестных – совместно.

Погрешности интерполяции сплайнами определяются, как и погрешности прямого интерполирования.

2. Численные методы интерполяции в MATHCAD

2.1. Интерполяция в MATHCAD

Рассмотрим программную реализацию численных методов интерполяции в среде математического пакета MATHCAD. Начнём с метода Вандермонда (рис.3.). Имеем исходные данные для интерполяции - значения аргумента *x* и функции *y*. Находим значения аргумента в серединах соседних исходных точек *xt.* Именно в точках *xt* требуется, построив многочлен Вандермонда, найти значения функции *yt.* По методу Вандермонда строим матрицу системы линейных уравнений Вандермонда (рис.3.).

Èíòåðïîëÿöèÿ ìåòîäîì Âàíäåðìîíäà

Çàäàíà òàáëèöà ôóíêöèè

$$x := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 1.317 \\ 2.420 \\ 4.545 \\ 8.089 \end{pmatrix}$$

Ðàñ÷¸ò çíà÷åíèé àðãóìåíòà äëÿ êîòîðûõ òðåáóåòñÿ íàéòè çíà÷åíèå ôóíêöèè

$$k := 0..2 \qquad xt_k := \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \qquad xt = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

Ñîñòàâèì ìàòðèöó Âàíäåðìîíäà

$$i := 0..3 \qquad j := 0..3 \qquad A_{i,j} := \left(x_i\right)^j \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.16 & 0.064 \\ 1 & 0.8 & 0.64 & 0.512 \\ 1 & 1.2 & 1.44 & 1.728 \\ 1 & 1.6 & 2.56 & 4.096 \end{pmatrix}$$

Íàõîäèì íåèçâåñòíûå êîýôôèöèåíòû

$$a := A^{-1} \cdot y \qquad a^T = (0.839 \;\; 0.745 \;\; 0.713 \;\; 1.034)$$

Èíòåðïîëÿöèîííûé ìíîãî÷ëåí

$$V(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

Ðåçóëüòàò ðåøåíèÿ ïî Âàíäåðìîíäó

$xt_k =$	$V(xt_k) =$
0.6	1.766
1	3.33
1.4	6.115

Рис.3. Метод Вандермонда в MATHCAD.

Определяются неизвестные коэффициенты интерполяционного многочлена Вандермонда матричным способом. Затем строится интерполяционный многочлен, по которому значениям в серединах соседних исходных точек *xt* вычисляется значения функции *yt=V(xt).*

Программная реализация метода Лагранжа представлена на рис. 4. Имеем исходные данные для интерполяции - значения аргумента *x* и функции *y*. Находим значения аргумента в серединах соседних исходных точек *xt.* Именно в точках *xt* требуется, построив многочлен Лагранжа, найти значения функции *yt.*

Èíòåðïîëÿöèÿ ìåòîäîì Ëàãðàíæà

Çàäàíà òàáëèöà ôóíêöèè

$$x := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 1.317 \\ 2.420 \\ 4.545 \\ 8.089 \end{pmatrix}$$

Ðàñ÷¸ò çíà÷åíèé àðãóìåíòà äëÿ êîòîðûõ òðåáóåòñÿ íàéòè çíà÷åíèå ôóíêöèè

$$k := 0..2 \qquad xt_k := \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \qquad xt = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

Ñîñòàâèì èíòåðïîëÿöèîííûé ìíîãî÷ëåí

$$L(z) := y_0 \cdot \frac{(z-x_1)\cdot(z-x_2)\cdot(z-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)} + y_1 \cdot \frac{(z-x_0)\cdot(z-x_2)\cdot(z-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)} \ldots$$
$$+ y_2 \cdot \frac{(z-x_0)\cdot(z-x_1)\cdot(z-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)} + y_3 \cdot \frac{(z-x_0)\cdot(z-x_1)\cdot(z-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}$$

Ðåçóëüòàò ðåøåíèÿ ïî Ëàãðàíæó

$xt_k =$	$L(xt_k) =$
0.6	1.766
1	3.33
1.4	6.115

Ïðîâåðèì, ðàçëîæèâ íà ïðîñòîé ìíîãî÷ëåí è ñðàâíèâ ñ ôîðìîé Âàíäåðìîíäà

$$L(z) \text{ expand}, z \rightarrow 1.0338541666666666667 \cdot z^3 + .71249999999999999 \cdot z^2 + .74458333333333334 \cdot z + .83899999999999999$$

Рис.4. Метод Лагранжа в MATHCAD.

Строится многочлен Лагранжа для исходных точек $\cdot[x_0,y_0],[x_1,y_1],[x_2,y_2],[x_3,y_3]$ и вычисляются значения в серединах соседних исходных точек *xt* вычисляется значения функции *yt=L(xt).* Затем, исходя из теоремы единственности интерполяционного многочлена, проверяется правильность построения многочлена Лагранжа путём его сравнения с многочленом Вандермонда (рис.4.). Используем встроенную в математический пакет MATHCAD функцию разложения в степенной многочлен ***expand***. Коэффициенты многочлена Лагранжа (рис.4) и многочлена Вандермонда (рис.3.) совпадают. Следовательно, многочлен Лагранжа составлен верно, что подтверждает ещё и то, что значения вычисленные по обеим методам совпадают *yt=L(xt)=V(xt).*

Программная реализация метода Ньютона представлена на рис. 5. Имеем исходные данные для интерполяции - значения аргумента *x* и функции *y*. Находим значения аргумента в серединах соседних исходных точек *xt.* Именно в точках *xt* требуется, построив многочлен Ньютона, найти значения функции *yt.*

Далее, по соответствующей методике, строится таблица разделённых разностей. Имея разделённые разности строится многочлен Ньютона (рис.5.), основанный на первой интерполяционной формуле Ньютона (базовая – начальная точка).

Èíòåðïîëÿöèÿ ìåòîäîì Íüþòîíà

Çàäàíà òàáëèöà ôóíêöèè

$$x := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 1.317 \\ 2.420 \\ 4.545 \\ 8.089 \end{pmatrix}$$

Ðàñ÷¸ò çíà÷åíèé àðãóìåíòà äëÿ êîòîðûõ òðåáóåòñÿ íàéòè çíà÷åíèå ôóíêöèè

$$k := 0..2 \qquad xt_k := \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \qquad xt = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

Ðàññ÷èòàåì òàáëèöó ðàçäåëåííûõ ðàçíîñòåé

$$i0 := 0..3 \quad \delta0_{i0} := y_{i0} \qquad i1 := 0..2 \quad \delta1_{i1} := \frac{\delta0_{i1+1} - \delta0_{i1}}{x_{i1+1} - x_{i1}}$$

$$i2 := 0..1 \quad \delta2_{i2} := \frac{\delta1_{i2+1} - \delta1_{i2}}{x_{i2+2} - x_{i2}} \qquad i3 := 0 \quad \delta3_{i3} := \frac{\delta2_{i3+1} - \delta2_{i3}}{x_{i3+3} - x_{i3}}$$

Çíà÷åíèÿ ðàçäåëåííûõ ðàçíîñòåé

$$\delta0 = \begin{pmatrix} 1.317 \\ 2.42 \\ 4.545 \\ 8.089 \end{pmatrix} \quad \delta1 = \begin{pmatrix} 2.757 \\ 5.313 \\ 8.86 \end{pmatrix} \quad \delta2 = \begin{pmatrix} 3.194 \\ 4.434 \end{pmatrix} \quad \delta3 = (1.034)$$

Ïåðâàÿ èíòåðïîëÿöèîííàÿ ôîðìóëà Íüþòîíà

$$N(z) := \delta0_0 + \delta1_0 \cdot (z - x_0) + \delta2_0 \cdot (z - x_0) \cdot (z - x_1) + \delta3_0 \cdot (z - x_0) \cdot (z - x_1) \cdot (z - x_2)$$

Ðåçóëüòàò ðåøåíèÿ ïî Íüþòîíó

$xt_k =$	$N(xt_k) =$
0.6	1.766
1	3.33
1.4	6.115

Ïðîâåðèì, ðàçëîæèâ íà ïðîñòîé ìíîãî÷ëåí è ñðàâíèâ ñ ôîðìîé Âàíäåðìîíäà

$$N(z) := 1.317 + 2.757 \cdot (z - x_0) + 3.194 \cdot (z - x_0) \cdot (z - x_1) + 1.034 \cdot (z - x_0) \cdot (z - x_1) \cdot (z - x_2)$$

$$N(z) \text{ expand}, z \rightarrow .839224 + .74404 \cdot z + .7124 \cdot z^2 + 1.034 \cdot z^3$$

Рис. 5. Метод Ньютона в MATHCAD.

Затем, исходя из теоремы единственности интерполяционного многочлена, проверяется правильность построения многочлена Ньютона путём его сравнения с многочленом Вандермонда (рис.5.). Используем встроенную в математический пакет MATHCAD функцию разложения в степенной многочлен ***expand***. Коэффициенты многочлена Ньютона (рис.5) и многочлена Вандермонда (рис.3.) совпадают. Следовательно, многочлен Ньютона составлен верно, что подтверждает ещё и то, что значения вычисленные по обеим методам совпадают *yt=N(xt)=V(xt)*.

Программная реализация метода сплайнов представлена на рис. 6. Имеем исходные данные для интерполяции - значения аргумента *x* и функции *y*. Находим значения аргумента в серединах соседних исходных точек *xt*. Именно в точках *xt* требуется, построив сплайны, найти значения функции *yt*.

Èíòåðïîëÿöèÿ ñïëàéíàìè

Çàäàíà òàáëèöà ôóíêöèè $x := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{pmatrix}$ $y := \begin{pmatrix} 1.317 \\ 2.420 \\ 1.545 \end{pmatrix}$

Ðàñ÷¸ò çíà÷åíèé àðãóìåíòà äëÿ êîòîðûõ òðåáóåòñÿ íàéòè çíà÷åíèÿ ôóíêöèè $k := 0..1$ $xt_k := \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ $xt = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Äëÿ èíòåðïîëÿöèè âûáåðåì ñïëàéí, äëÿ êîòîðîãî âûáåðåì äâà ìíîãî÷ëåíà:ïåðâûé P1(x) íà îòðåçêå âîçðàñòàíèÿ ôóíêöèè y, ó÷àñòîê [0.4; 0.8] è âòîðîé P2(x) íà îòðåçêå óáûâàíèÿ ôóíêöèè y, ó÷àñòîê [0.8; 1.2]. Òî÷êà ñîïðèêîñíîâåíèÿ x1=0.8.

Íà÷àëüíûå ïðèáëèæåíèÿ $a0 := 1$ $a1 := 1$ $a2 := 1$ $a3 := 1$ $b0 := 1$ $b1 := 1$ $b2 := 1$ $b3 := 1$

Èñïîëüçóÿ ñâîéñòâà ñïëàéíà ñîñòàâèì ñèñòåìó èç 8 àëãåáðàè÷åñêèõ óðàâíåíèé:

Given

1. Ñîñåäíèå èíòåðïîëÿöèîííûå ìíîãî÷ëåíû èìåþò îäèíàêîâûå çíà÷åíèÿ íà ãðàíèöàõ ñïëàéíà. Ýòè çíà÷åíèÿ ñîâïàäàþò ñ óçëàìè èíòåðïîëÿöèè.

$$a0 + a1 \cdot x_0 + a2 \cdot (x_0)^2 + a3 \cdot (x_0)^3 = y_0 \qquad b0 + b1 \cdot x_1 + b2 \cdot (x_1)^2 + b3 \cdot (x_1)^3 = y_1$$

$$a0 + a1 \cdot x_1 + a2 \cdot (x_1)^2 + a3 \cdot (x_1)^3 = y_1 \qquad b0 + b1 \cdot x_2 + b2 \cdot (x_2)^2 + b3 \cdot (x_2)^3 = y_2$$

2.Ïðîèçâîäíûå òî êóñî÷íûõ ôóíêöèé *Ð1, Ð2* I-ãî ïîðÿäêà èìåþò îäèíàêîâûå çíà÷åíèÿ íà ãðàíèöå ñïëàéíîâ.

$$a1 + 2 \cdot a2 \cdot x_1 + 3 \cdot a3 \cdot (x_1)^2 = b1 + 2 \cdot b2 \cdot x_1 + 3 \cdot b3 \cdot (x_1)^2$$

3.Ïðîèçâîäíûå òî êóñî÷íûõ ôóíêöèé *Ð1, Ð2* II-ãî ïîðÿäêà èìåþò îäèíàêîâûå çíà÷åíèÿ íà ãðàíèöå ñïëàéíîâ.

$$2 \cdot a2 + 6 \cdot a3 \cdot x_1 = 2 \cdot b2 + 6 \cdot b3 \cdot x_1$$

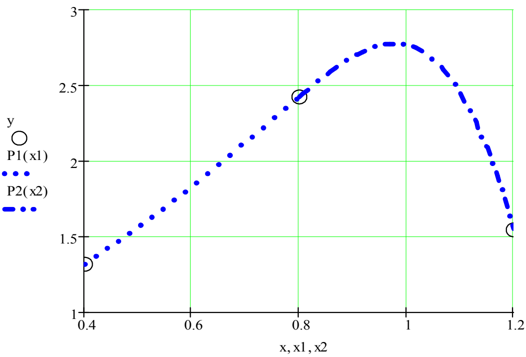
4.Ïðîèçâîäíûå òî êóñî÷íûõ ôóíêöèé *Ð1, Ð2* II-ãî ïîðÿäêà ñòðåìÿòñÿ ê íóëþ - òî÷êà ïåðåãèáà.

$$2 \cdot a2 + 6 \cdot a3 \cdot x_1 = 0 \qquad 2 \cdot b2 + 6 \cdot b3 \cdot x_1 = 0$$

$$\mathrm{Find}(a0, a1, a2, a3, b0, b1, b2, b3)^T = (0.816 \;\; 0 \;\; 3.76 \;\; -1.567 \;\; 16.64 \;\; -59.34 \;\; 77.935 \;\; -32.473)$$

$$P1(x) := 0.816 + 3.76 \cdot x^2 - 1.567 \cdot x^3 \qquad P2(x) := 16.64 - 59.34 \cdot x + 77.935 \cdot x^2 - 32.473 \cdot x^3$$

$$x1 := 0.4, 0.41 .. 0.8 \qquad x2 := 0.8, 0.81 .. 1.2$$



$xt_k =$

0.6
1

$P1(xt_0) = 1.831$

$P2(xt_1) = 2.762$

Рис. 6. Метод сплайнов.

Затем, делаются начальные приближения для решения системы линейных уравнений. Записывается система линейных уравнений, которые основаны на свойствах 1-3 сплайна (рис6.). Система решается с помощью встроенных функций ***Given-Find***. Для найденных коэффициентов по интерполяционным многочленам находятся в точках *xt* значения функции *yt*.

2.2. Использование встроенных функций в MATHCAD при интерполяции

Математический пакет MATHCAD содержит достаточное число встроенных функций для реализации численных методов интерполяции. Рассмотрим лишь некоторые из них.

1. Линейную интерполяцию в MATHCAD осуществляет встроенная функция ***linterp(x,y,xt),*** в которой x–исходные значения аргументов в узлах интерполяции, y-исходные значения функции в узлах интерполяции, xt-значения аргумента, при которых требуется найти значение функции yt. Линейной интерполяцией называется интерполяция многочленом первой степени $P(x)=a_0+a_1x$. Особенности программной реализации численного метода линейной интерполяции с использованием встроенной функции ***linterp(x,y,xt)***, иллюстрируются на рис.7.

2. Кубический сплайн в MATHCAD реализует встроенная функция ***cspline(x,y),*** в которой x–исходные значения аргументов в узлах интерполяции, y-исходные значения функции в узлах интерполяции. Функция ***cspline(x,y)*** возвращает вектор коэффициентов, используемый функцией ***interp*** для построения кубического сплайна $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ от точки к точке. Особенности программной реализации численного метода кубическим сплайном с использованием встроенной функции ***cspline(x,y)*** иллюстрируются на рис.7. В этой встроенной функции на границе сплайна никаких ограничений не накладывается.

3. Также сплайн в MATHCAD реализует встроенная функция ***pspline(x,y),*** в которой x–исходные значения аргументов в узлах интерполяции, y-исходные значения функции в узлах интерполяции. Однако, в отличии от встроенной функции ***cspline*** сплайн на границе области имеет равную нулю третью производную. Особенности программной реализации численного метода сплайном с использованием встроенной функции ***pspline(x,y)*** иллюстрируются на рис.7.

4. Традиционный сплайн в MATHCAD строит функция ***lspline(x,y),*** в которой x–исходные значения аргументов в узлах интерполяции, y-исходные значения функции в узлах интерполяции. В отличии от встроенной функции ***cspline*** сплайн на границе области имеет равную нулю вторую и третью производную. Особенности программной реализации численного метода сплайном с

использованием встроенной функции ***lspline(x,y),*** иллюстрируются на рис.7.

Çàäàíà òàáëèöà ôóíêöèè

$$x := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 2.0 \\ 2.4 \\ 2.8 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1.317 \\ 2.420 \\ 4.545 \\ 8.089 \\ 9.234 \\ 10.012 \\ 9.945 \end{pmatrix}$$

Ðàñ÷¸ò çíà÷åíèé àðãóìåíòà äëÿ êîòîðûõ òðåáóåòñÿ íàéòè çíà÷åíèå ôóíêöèè

$$k := 0..5 \qquad xt_k := \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \qquad xt = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 1.4 \\ 1.8 \\ 2.2 \\ 2.6 \end{pmatrix}$$

Èíòåðïîëÿöèÿ ñ ïîìîùüþ âñòðîåííûõ ôóíêöèé $\qquad yt_k := \mathrm{linterp}(x, y, xt_k)$

Èíòåðïîëÿöèÿ ñ ïîìîùüþ âñòðîåííûõ ôóíêöèé $\qquad xs1 := \mathrm{cspline}(x, y) \quad yt1_k := \mathrm{interp}(xs1, x, y, xt_k)$

Èíòåðïîëÿöèÿ ñ ïîìîùüþ âñòðîåííûõ ôóíêöèé $\qquad xs2 := \mathrm{pspline}(x, y) \quad yt2_k := \mathrm{interp}(xs2, x, y, xt_k)$

Èíòåðïîëÿöèÿ ñ ïîìîùüþ âñòðîåííûõ ôóíêöèé $\qquad xs3 := \mathrm{lspline}(x, y) \quad yt3_k := \mathrm{interp}(xs3, x, y, xt_k)$

Ðåçóëüòàò ðåøåíèÿ

$xt_k =$	$yt_k =$	$yt1_k =$	$yt2_k =$	$yt3_k =$
0.6	1.869	1.865	1.793	1.821
1	3.482	3.23	3.249	3.242
1.4	6.317	6.413	6.409	6.412
1.8	8.662	8.896	8.893	8.889
2.2	9.623	9.626	9.641	9.656
2.6	9.979	10.187	10.128	10.073

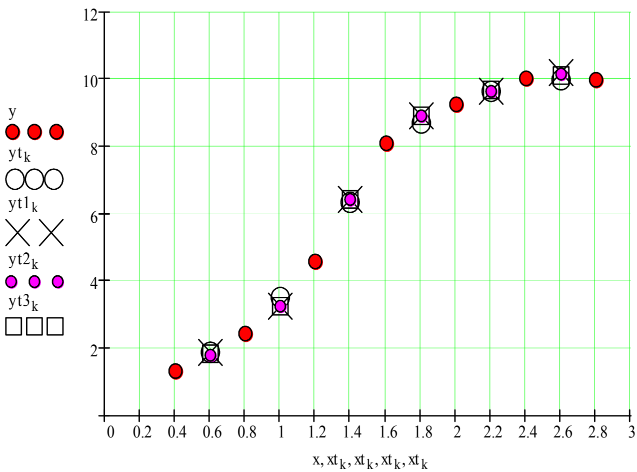


Рис. 7. Встроенные функции в MATHCAD.

5. Встроенная функция ***interp(a,x,y,xt)*** вычисляет интерполируемое значение в точке ***xt.*** Вектор ***a*** – вектор коэффициентов, есть результат одной из функций ***lspline(x,y), pspline(x,y), cspline(x,y).*** Особенности программной реализации численных методов с использованием встроенной функции ***interp(a,x,y,xt),*** иллюстрируются на рис.7.

Использование встроенных функций в MATHCAD значительно упрощает процесс численного решения задач интерполяции.

3. ПРИЛОЖЕНИЕ. Контрольные задания на тему “Численные методы интерполяции”

Для таблично заданной функции $y_i=f(x_i)$ вычислить ее значения для значений аргумента: $x=(x_i+x_{i+1})/2$, где $i = 0, 1, 2,\ldots,(n-1)$, используя метод Вандермонда, формулы Лагранжа и Ньютона.

Вычисления выполнить:

1. С записью в протоколе работы формул и результатов всей последовательности расчетов для одного значения аргумента по заданным формулам;
2. С помощью встроенных функций Mathcad для всех заданных значений аргумента;

В конце каждого пункта задания записывать ответ.

Таблица 3. Индивидуальные задания.

№	x_i	y_i	№	x_i	y_i	№	x_i	y_i
1	0,43	1,6360	11	0,210	4,832	21	0,4	1,497
	0,48	1,7323		0,215	4,723		0,8	2,962
	0,55	1,8769		0,220	4,619		1,1	5,687
	0,62	2,0335		0,225	4,519		1,6	10,092
	0,70	2,2285		0,230	4,424			
	0,75	2,3597		0,235	4,333			
2	0,02	1,0232	12	0,415	0,886	22	0,5	1,962
	0,08	1,0959		0,420	0,896		0,8	3,036
	0,12	1,1473		0,425	0,906		1,1	4,739
	0,17	1,2148		0,430	0,917		1,4	7,226
	0,23	1,3012		0,435	0,927			
	0,30	1,4098						
3	0,35	2,7395	13	0,4	1,823	23	0,5	2,076
	0,41	2,3008		0,7	2,778		0,9	3,607
	0,47	1,9686		1,0	4,245		1,3	6,260
	0,51	1,7878		1,3	6,364		1,7	10,409
	0,56	1,5950						
	0,64	1,3431						
4	0,41	2,5742	14	0,5	1,925	24	0,3	1,185
	0,46	2,3251		0,8	3,123		0,5	1,557
	0,52	2,0934		1,1	5,030		0,7	2,096
	0,60	1,8620		1,4	7,829		0,9	2,831
	0,65	1,7493						
	0,72	1,6210						

5	0,68	0,8087
	0,73	0,8949
	0,80	1,0296
	0,88	1,2097
	0,93	1,3409
	0,99	1,5237
6	0,11	9,0542
	0,15	6,6166
	0,21	4,6917
	0,29	3,3511
	0,35	2,7395
	0,40	2,3652
7	1,375	5,042
	1,380	5,177
	1,385	5,320
	1,390	5,471
	1,395	5,630
	1,400	5,798
8	0,115	8,657
	0,120	8,293
	0,125	7,958
	0,130	7,649
	0,135	7,362
	0,140	7,096
9	0,150	6,617
	0,155	6,400
	0,160	6,197
	0,165	6,006
	0,170	5,826
	0,175	5,656
10	0,180	5,615
	0,185	5,467
	0,190	5,326
	0,195	5,193
	0,200	5,066
	0,205	4,946

15	0,3	1,651
	0,5	2,160
	0,7	2,895
	0,9	3,913
16	0,5	1,622
	0,9	2,913
	1,3	5,126
	1,7	8,557
17	0,3	1,421
	0,6	2,116
	0,9	3,231
	1,2	4,896
18	0,3	1,671
	0,7	2,866
	1,1	5,000
	1,5	8,431
19	0,4	1,579
	0,6	2,037
	0,8	2,694
	1,0	3,594
20	0,5	1,887
	0,7	2,643
	0,9	3,693
	1,1	5,099

25	0,4	1,317
	0,8	2,420
	1,2	4,545
	1,6	8,089
26	0.2050	0.20791
	0.2052	0.208130
	0.2060	0.208964
	0.2065	0.209486
	0.2069	0.209904
	0.2075	0.210530
27	0.8902	1.23510
	0.8909	1.23687
	0.8919	1.23941
	0.8940	1.24475
	0.8944	1.24577
	0.8955	1.24858
28	0.6100	1.83781
	0.6104	1.83686
	0.6118	1.83354
	0.6139	1.82860
	0.6145	1.82720
	0.6158	1.82416
29	0.62	0.537944
	0.67	0.511709
	0.74	0.477114
	0.80	0.449329
	0.87	0.418952
	0.96	0.382893
30	1.03	2.80107
	1.08	2.94468
	1.16	3.18993
	1.23	3.42123
	1.26	3.52542
	1.33	3.78104

4. Контрольные вопросы на тему "Численные методы интерполяции"

1. Интерполяция. Постанова задачи интерполирования. Постановка задачи параболической интерполяции.
2. Графическая интерпретация задачи интерполирования. Алгоритмы решения задач интерполяции с помощью интерполяционных полиномов.
3. Интерполяция по методу Вандермонда. Расчетные формулы, алгоритм.
4. Интерполяционный полином Лагранжа. Алгоритм решения задачи интерполирования с помощью многочлена Лагранжа.
5. Конечные разности, разделенные разности. Их расчет и свойства.
6. Интерполяционные формулы Ньютона для регулярных таблиц. Алгоритм решения задачи интерполяции с помощью формул Ньютона.
7. Интерполяционные формулы Ньютона для нерегулярных таблиц. Алгоритм решения задачи интерполяции с помощью формул Ньютона.
8. Оценка погрешности интерполяционных полиномов. Расчетные формулы, графическая интерпретация.
9. Интерполяция сплайнами. Определение, расчетные формулы, алгоритм, графическая интерпретация.
10. Обратное интерполяция. Способы решения задачи обратного интерполирования, расчетные формулы.

6. **УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ**

Определение

Библиографический список

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970., 664 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. М. -: Наука, 1975. 443с.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов: Учеб. Пособие.-М.: Наука, 1987.-320с.
4. Воробьёва Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам.-М.: Высш.шк., 1979.-420с.
5. Курс лекций по вычислительной математике. Ч.2. /Емельянов В.И., Лёвшин В.Г., Артамонова Л.А.-Новомосковск: НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева. 1986.-100 с.
6. Курс лекций по вычислительной математике. Ч.I. Филатов В.П., Тюрин А.П., Мочалин В.П. НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева, Новомосковск, 1980. 110с.
7. Филатов В.П., Тюрин А.П. Методические указания и контрольные задания по курсу «Вычислительная математика». Учеб. Пособие. НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева, Новомосковск, 1982. 118с.

Учебное издание

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ЭВМ

Составители: Артамонова Лидия Анатольевна,
Мочалин Владимир Петрович,
Тивиков Алексей Сергеевич,

Редактор Т.П. Бабокина

Лицензия ЛР N° 020714 от 02.02.98
Подписано в печать 28.12.2000. Формат 60х84 1/16. Бумага типографская №2. Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 1,80. Уч.-изд. л. 0,98. Тираж 100 экз. Заказ 172.

Российский химико-технологический университет им. Д.И Менделеева
Новомосковский институт. Издательский центр
Адрес университета: 125047 Москва, Миусская пл., 9
Адрес института: 301670 Новомосковск, ул. Дружбы, 8