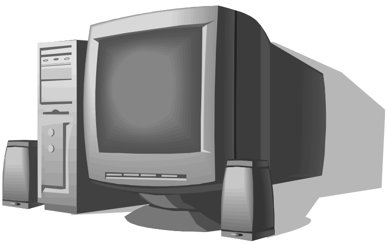
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = b_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Новомосковск 2007

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ

Артамонова Л.А., Мочалин В.П., Тивиков А.С.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ ПО КУРСАМ
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА», «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

НА ТЕМУ

«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Методические указания

Новомосковск 2007

УДК 681.3
ББК 32.97
А 864

Рецензенты
канд. техн. наук, доцент Новомосковского института
Российского химико-технологического университета им.
Д.И. Менделеева
В.Г. Лёвшин
канд. техн. наук, доцент Новомосковского института
Российского химико-технологического университета им.
Д.И. Менделеева
А.Г. Лопатин

А 864 Составители: **Артамонова Л.А., Мочалин В.П., Тивиков А.С., Решение систем линейных и нелинейных уравнений.** Методические указания/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т. Новомосковск, 2007, 23 с.

В методических указаниях рассмотрены основные методы решения систем линейных и нелинейных уравнений на ЭВМ. Приведены основы теории по различным методам решения систем линейных и нелинейных уравнений, особенности программирования и решения систем линейных и нелинейных уравнений на ЭВМ, а также контрольные вопросы и задания.

Методические указания могут быть рекомендованы для студентов всех специальностей заочной формы обучения, обучающихся по дисциплине «Вычислительная математика» и «Численные методы и программирование» и изучающих методы решения систем линейных и нелинейных уравнений. Методические указания могут быть использованы студентами дневной и вечерней формы обучения и другими категориями пользователей, изучающими методы решения систем линейных и нелинейных уравнений.

Ил. 5. Табл. 2. Библиогр.: 7 назв.

ББК 32.97
УДК 681.3

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

К численным методам алгебры традиционно относят численные методы решения систем линейных и нелинейных уравнений [1]. При решении систем линейных и нелинейных уравнений студент и инженер имеет дело с несколькими математическими зависимостями, в которых имеется несколько неизвестных величин, требующих определения. Часто приходится обращаться к численным методам решения систем линейных и нелинейных уравнений на ЭВМ. Трудности, с которыми сталкивается пользователь при отыскании решения систем линейных и нелинейных уравнений рассматриваются в данном пособии.

Методические указания состоят из двух глав, в которых рассмотрены основные теоретические положения, особенности решения систем линейных и нелинейных уравнений в математическом пакете MathCAD.

В первой главе рассмотрены основные понятия теории решения систем линейных уравнений. Приведены особенности метода простых итераций и метода итераций Зейделя [2,3] для решения систем линейных уравнений. Здесь же рассмотрены примеры программной реализации этих методов в MathCAD.

Во второй главе рассмотрены основные понятия теории решения систем нелинейных уравнений [4]. Приведены теоретические особенности решения методом итераций и методом Ньютона для системы нескольких нелинейных уравнений. Здесь же рассмотрены примеры программной реализации этих методов в MathCAD.

Методические указания позволят аспирантам, инженерам и студентам освоить и использовать на ЭВМ методы решения систем линейных и нелинейных уравнений.

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи решения системы линейных уравнений имеет вид. Задана система из k линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = b_k \end{cases} \qquad (1a)$$

где $a_{i,j}$ – коэффициенты при неизвестных x_i (i-номер строки, j-номер столбца); b_i – свободные члены системы.

Требуется найти совокупность значений x_i при которых система (1) обращается в тождество с точностью определения каждого неизвестного ε_{xi}=0.0001.

1.1. Итерационный метод решения системы линейных уравнений

Система линейных уравнений в матричном виде:

$$\mathbf{AX=b} \qquad (1b)$$

По методу итераций данная система преобразуется к виду:

$$\mathbf{X=MX+N} \qquad (2)$$

и находится предел её последовательности:

$$x^{\langle n+1\rangle} = Mx^{\langle n\rangle} + N \qquad (3)$$

где n – номер итерации.

В дальнейшем будем рассматривать случай системы линейных уравнений с тремя неизвестными.

1.2. Метод простых итераций

Пусть имеем систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\ a_{22}x_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\ x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \end{cases} \qquad (4)$$

Перейдём к матричному виду, вводя следующие обозначения:

$$d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (т.е.\ d_1 = \frac{b_1}{a_{11}};\ d_2 = \frac{b_2}{a_{22}};\ d_3 = \frac{b_3}{a_{33}})$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & если\ i = j \\ a_{ij}/a_{ii} & в\ остальных\ случаях \end{cases}$$

или

$$c = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда систему (4) можно записать в виде:

$$\mathbf{X=d-cx} \qquad (5)$$

или в итерационном виде:

$$x^{\langle n+1\rangle} = d - cx^{\langle n\rangle} \qquad (6).$$

За начальное приближение метода принимают обычно $\mathbf{x}^{\langle 0\rangle}=\mathbf{d}$.

Условием применимости метода итераций (6) или условием сходимости метода для системы уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} |a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| \end{cases} \qquad (7)$$

Таким образом, на первом этапе систему (1) приводят к такому виду, чтобы на главной диагонали матрицы системы стояли максимальные элементы и для них выполнялось условие (7).

1.3. Метод итераций Зейделя

Для использования метода итераций Зейделя используем алгоритм решения:

1. Преобразовать исходную систему (1) к виду, при котором выполняется условие (7).
2. Исходную матрицу A системы линейных уравнений на две треугольные матрицы B и C по принципу:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ясно, что **A=B+C**

3. Получим итерационную формулу из матричного уравнения системы **AX=b**

подставляя треугольные матрицы:

$$\mathbf{BX+CX=b}$$

и, всё умножив слева на B^{-1}, имеем:

$$\mathbf{B^{-1}BX+B^{-1}CX=B^{-1}b}$$

или

$$\mathbf{X=-B^{-1}CX+B^{-1}b}$$

или в итерационной форме формула Зейделя:

$$x^{\langle n+1\rangle} = -B^{-1}Cx^{\langle n\rangle} + B^{-1}b \qquad (8)$$

где n – номер итерации.

1.4. Решение системы линейных уравнений в MATHCAD

Программная реализация ***метода простых итераций*** представлена на рис.1. Здесь исходно дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6.3x_1 + 5.2x_2 - 0.6x_3 = 1.5 \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = 3.4 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$$

Для применимости метода простых итераций должно выполнятся условие (7), по которому модули диагональных коэффициентов данной строки должны быть больше суммы модулей других коэффициентов этой строки. Приведём данную систему к другому виду, чтобы выполнялось условие (7). Преобразованию подлежат первая и вторая строка, так как для третьей строки условие (7) выполняется.

Первая строка - сложим первую и вторую строку, тогда получим:

$$\begin{cases} 9.7x_1 + 2.9x_2 + 2.8x_3 = 4.9 \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = 3.4 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$$

Вторая строка - из третьей строки вычтем вторую и получим:

$$\begin{cases} 9.7x_1 + 2.9x_2 + 2.8x_3 = 4.9 \\ 2.6x_1 - 3.7x_2 - 0.1x_3 = 5.7 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$$

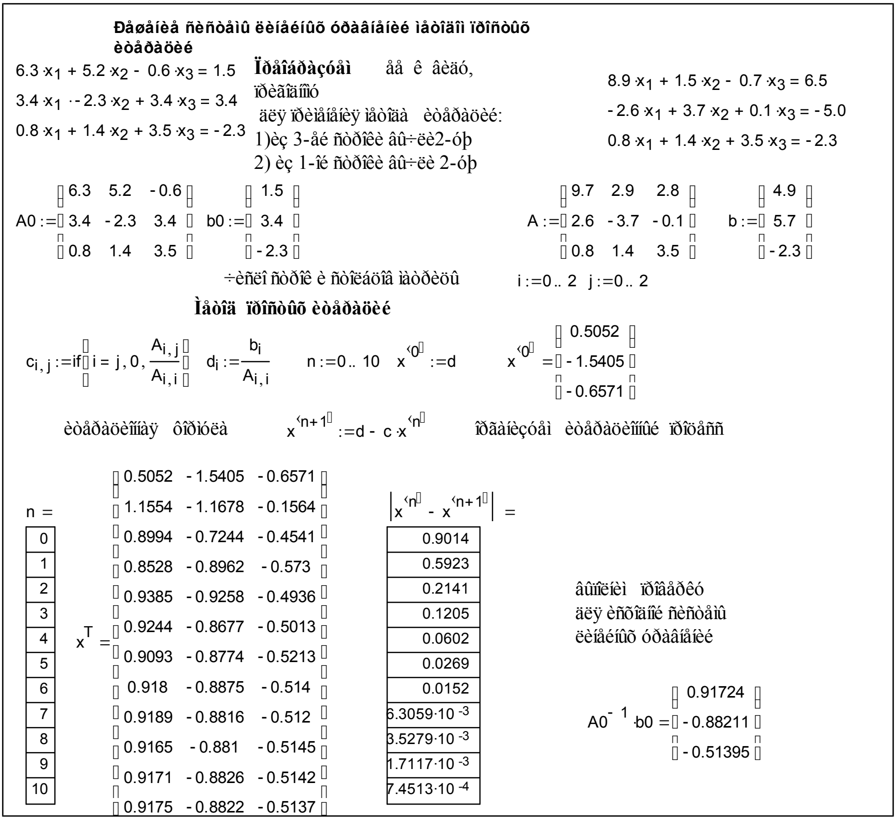


Рис.1. Метод простых итераций в MATHCAD.

Таким образом, получили на диагонали выполнение (7): модули диагональных коэффициентов данной строки больше суммы модулей других коэффициентов этой строки.

Далее применяем формулу метода простых итераций (6) и достигая погрешности, которая меньше 0.0001 прекращаем расчёт. Проверку выполняем именно для исходной матрицы по формуле **x=A0⁻¹b0**.

Ответ по численному методу и проверочный ответ должны совпасть (рис. 1).

Программная реализация ***метода Зейделя*** представлена на рис.2. Будем рассматривать ту же систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6.3x_1 + 5.2x_2 - 0.6x_3 = 1.5 \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = 3.4 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$$

Ìåòîä Çåéäåëÿ

$$A0 := \begin{pmatrix} 6.3 & 5.2 & -0.6 \\ 3.4 & -2.3 & 3.4 \\ 0.8 & 1.4 & 3.5 \end{pmatrix} \quad b0 := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.4 \\ -2.3 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 9.7 & 2.9 & 2.8 \\ 2.6 & -3.7 & -0.1 \\ 0.8 & 1.4 & 3.5 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 4.9 \\ 5.7 \\ -2.3 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 9.7 & 0 & 0 \\ 2.6 & -3.7 & 0 \\ 0.8 & 1.4 & 3.5 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 2.9 & 2.8 \\ 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x^{\langle 0 \rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$i := 0..4$ èòåðàöèîííàÿ ôîðìóëà $x^{\langle i+1 \rangle} := -B^{-1} \cdot C \cdot x^{\langle i \rangle} + B^{-1} \cdot b$ îðãàíèçóåì èòåðàöèè

$$x^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1.0928 & -0.7456 & -0.6087 \\ 0.9038 & -0.889 & -0.5081 \\ 0.9176 & -0.882 & -0.5141 \\ 0.9172 & -0.8821 & -0.514 \\ 0.9172 & -0.8821 & -0.514 \end{pmatrix}$$

$\left| x^{\langle i \rangle} - x^{\langle i+1 \rangle} \right| =$

0.4759
0.2577
0.0166
$4.0622 \cdot 10^{-4}$
$1.0795 \cdot 10^{-5}$

âûïîëíèì ïðîâåðêó

$$A0^{-1} \cdot b0 = \begin{pmatrix} 0.91724 \\ -0.88211 \\ -0.51395 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Метод Зейделя в MATHCAD.

Преобразованная система (см. ранее):

$$\begin{cases} 9.7x_1 + 2.9x_2 + 2.8x_3 = 4.9 \\ 2.6x_1 - 3.7x_2 - 0.1x_3 = 5.7 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$$

Для преобразованной матрицы применяем формулу Зейделя (8) до сходимости к корням с точностью менее 0.0001.

Проверку выполняем для исходной матрицы по формуле $\mathbf{x=A0^{-1}b0}$. Ответ по численному методу и проверочный ответ должны совпасть (рис. 2).

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи решения системы нелинейных уравнений имеет вид. Система из n нелинейных уравнений имеет вид (9):

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Необходимо найти x_1, $x_2, \ldots, x_n$ обращающие систему (9) в тождество с точностью определения каждого корня $\varepsilon_x = 0.0001$. Для системы более чем двух нелинейных уравнений процесс поиска корней усложнён. Поэтому будем рассматривать в дальнейшем численное решение системы из двух нелинейных уравнений.

2.1. Метод итераций для системы двух нелинейных уравнений

Пусть имеем систему из двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

которую преобразуем к виду (11):

$$\begin{cases} x = F(x, y) \\ y = \Phi(x, y) \end{cases} \tag{11}$$

и затем строим их графики на одном рисунке (рис. 3):

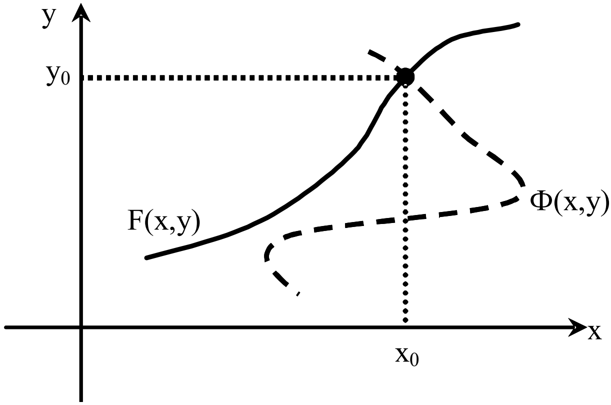


Рис. 3. Поиск начального приближения при решении системы нелинейных уравнений.

Точка пересечения есть начальное приближение x_0, y_0

Делаем итерации:

$$\begin{cases} x_1 = F(x_0, y_0) \\ y_1 = \Phi(x_0, y_0) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = F(x_1, y_1) \\ y_2 = \Phi(x_1, y_1) \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases} \qquad (12)$$

Перед всеми расчётами проверяют условие применимости метода итераций:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| < 1 \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| < 1 \qquad (13)$$

2.2. Метод Ньютона

По методу Ньютона итерационный процесс уточнения корня системы уравнений сводится к следующей рекуррентной зависимости (14):

$$x_{k+1} = x_k - \left[f^{/}(x_k)\right]^{-1} \cdot f(x_k) \qquad (14)$$

где $f^{/}(x_k)$ – матрица Якоби и обозначается J вычисляется по формуле (15). Определитель матрицы Якоби называется якобиан.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Таким образом, формула (14) с использованием обозначения (15) имеет вид, называемый формулой Ньютона для решения системы нелинейных уравнений:

$$x_{k+1} = x_k - J_k^{-1} \cdot f(x_k) \qquad (16)$$

Для одного уравнения формула Ньютона для решения системы нелинейных уравнений становится формулой метода касательных при решении нелинейного уравнения с одним неизвестным.

2.3. **Решение системы нелинейных уравнений в MATHCAD**

Метод простых итераций в MATHCAD представлен на рис.4. Здесь на первом этапе выделяются исходные итерационные функции и на области значений их аргументов строятся их графики на одном рисунке (рис.4). Выявляется точка пересечения графиков, которая примерно берётся за начальную точку для метода простых итераций. Затем осуществляется проверка условия применимости метода простых итераций (13) для обеих аргументов. Сумма модулей производных по каждому из аргументов должна быть меньше 1 при начальном приближении.

Если (13) выполняется, то применяем формулы метода простых итераций (12). Окончание расчётов при достижении итерации, при которой: $\max\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| \le \varepsilon_{xi}$. Проверку решения осуществляем с помощью встроенных в MATHCAD функций (рис.4).

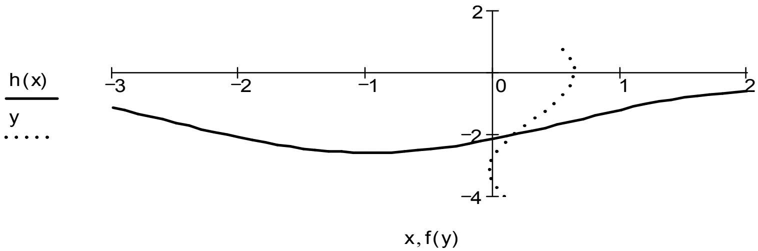
Ìåòîä ïðîñòûõ èòåðàöèé

Èñõîäíûå óðàâíåíèÿ èìåþò âèä

$3\cdot x - \cos(y) - 0.9 = 0 \qquad x = \frac{1}{3}\cdot\cos(y) + 0.3 \qquad f(y) := \frac{1}{3}\cdot\cos(y) + 0.3$

$\sin(x - 0.6) - y - 1.6 = 0 \qquad y = \sin(x - 0.6) - 1.6 \qquad h(x) := \sin(x - 0.6) - 1.6$

Ïîáèðàåì äèàïàçîí ïåðåñå÷åíèÿ $x := -3, -2.9 .. 2 \quad y := -4, -3.9 .. 1$



Çà íóëåâîå ïðèáëèæåíèå ïðèíèìàåì òî÷êó ïåðåñå÷åíèÿ x=0.15 y=-2

Ïðîâåðêà íà ñõîäèìîñòü $x := 0.15 \quad y := -2$

$f(x,y) := \frac{1}{3}\cdot\cos(y) + 0.3 \qquad h(x,y) := \sin(x - 0.6) - 1.6$

$\left|\frac{d}{dx}f(x,y)\right| + \left|\frac{d}{dx}h(x,y)\right| = 0.9 \qquad \left|\frac{d}{dy}f(x,y)\right| + \left|\frac{d}{dy}h(x,y)\right| = 0.303$

Äåëàåì èòåðàöèè $i := 0 .. 9 \quad x_0 := 0.15 \quad y_0 := -2$

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ x_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sin(x_i - 0.6) - 1.6 \\ \frac{1}{3}\cdot\cos(y_i) + 0.3 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_i := \left|\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ x_{i+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_i \\ x_i \end{pmatrix}\right|$$

$x_i =$	$y_i =$	$\varepsilon_i =$
0.15	-2	0.037
0.161	-2.035	0.015
0.151	-2.025	0.01
0.154	-2.034	0.004
0.151	-2.032	0.003
0.152	-2.034	0.001
0.151	-2.033	$7.22\cdot10^{-4}$
0.151	-2.034	$2.852\cdot10^{-4}$
0.151	-2.034	$1.94\cdot10^{-4}$
0.151	-2.034	$7.664\cdot10^{-5}$

Ïðîâåðêà ñ ïîìîùüþ âñòðîåííûõ ôóíêöèé

$x := 0.15 \quad y := -2$

Given

$3\cdot x - \cos(y) - 0.9 = 0$

$\sin(x - 0.6) - y - 1.6 = 0$

$\mathrm{Find}(x,y) = \begin{pmatrix} 0.151 \\ -2.034 \end{pmatrix}$

Рис. 4. Программная реализация метода простых итераций в MATHCAD.

Метод Ньютона в MATHCAD представлен на рис.5. Здесь также на первом этапе выделяются исходные итерационные функции и на области значений их аргументов строятся их графики на одном рисунке (рис.5).

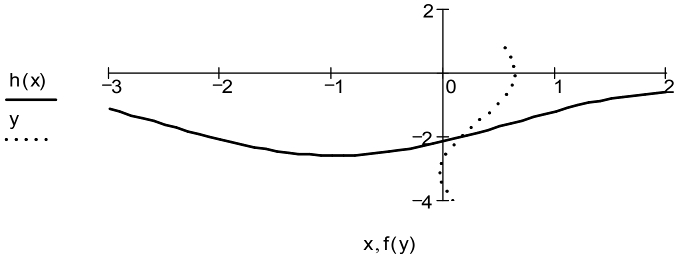
Ìåòîä Íüþòîíà

Èñõîäíûå óðàâíåíèÿ èìåþò âèä

$3\cdot x - \cos(y) - 0.9 = 0$ $\qquad x = \frac{1}{3}\cdot\cos(y) + 0.3 \qquad f(y) := \frac{1}{3}\cdot\cos(y) + 0.3$

$\sin(x - 0.6) - y - 1.6 = 0 \qquad y = \sin(x - 0.6) - 1.6 \qquad h(x) := \sin(x - 0.6) - 1.6$

Ïîäáèðàåì äèàïàçîí ïåðåñå÷åíèÿ $\qquad x := -3, -2.9 .. 2 \qquad y := -4, -3.9 .. 1$



Çà íóëåâîå ïðèáëèæåíèå ïðèíèìàåì òî÷êó ïåðåñå÷åíèÿ x=0.15 y=-2

Ïðèâîäèì ê íóëþ $\qquad f(x,y) := 3\cdot x - \cos(y) - 0.9 \qquad h(x,y) := \sin(x - 0.6) - y - 1.6$

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} f(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} \qquad I(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}f(x,y) & \frac{d}{dy}f(x,y) \\ \frac{d}{dx}h(x,y) & \frac{d}{dy}h(x,y) \end{pmatrix}$$

Äåëàåì èòåðàöèè $\qquad i := 0 .. 4 \qquad x_0 := 0.15 \qquad y_0 := -2$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - I(x_i, y_i)^{-1}\cdot F(x_i, y_i) \qquad \varepsilon_i := \left| \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \right|$$

$x_i =$	$y_i =$	$\varepsilon_i =$
0.15	-2	0.0341
0.1509	-2.0341	$1.5247\cdot 10^{-4}$
0.1511	-2.034	$5.2416\cdot 10^{-9}$
0.1511	-2.034	0
0.1511	-2.034	0

Ïðîâåðêà ñ ïîìîùüþ âñòðîåííûõ ôóíêöèé

$x := 0.15 \qquad y := -2$

Given

$3\cdot x - \cos(y) - 0.9 = 0$

$\sin(x - 0.6) - y - 1.6 = 0$

Find(x, y) =

	0
0	0.1511
1	-2.034

Рис.5. Программная реализация метода Ньютона в MATHCAD.

Выявляется точка пересечения графиков, которая примерно берётся за начальную точку для метода Ньютона. Затем итерационные функции приводятся к нулю и строится матрица Якоби. Приведённые к нулю функции и матрица Якоби подставляются в формулу Ньютона (рис.5.). Окончание расчётов при достижении итерации, при которой: $\max\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| \le \varepsilon_{xi}$. Проверку решения осуществляем с помощью встроенных в MATHCAD функций (рис.5).

3. ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Контрольные задания на тему "Решение системы линейных уравнений"

№ вар.	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	№ вар.	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	1	2,7	3,3	1,3	2,1	16	1	3,8	4,1	-2,3	4,8
	2	3,5	-1,7	2,8	1,7		2	-2,1	3,9	-5,8	3,3
	3	4,1	5,8	-1,7	0,8		3	1,8	1,1	-2,1	5,8
2	1	1,7	2,8	1,9	0,7	17	1	1,7	-2,2	3	1,8
	2	2,1	3,4	1,8	1,1		2	2,1	1,9	-2,3	2,8
	3	4,2	-1,7	1,3	2,8		3	4,2	3,9	-3,1	5,1
3	1	3,1	2,8	-1,9	0,2	18	1	2,8	3,8	-3,2	4,5
	2	1,9	3,1	2,1	2,1		2	2,5	-2,8	3,3	7,1
	3	7,5	3,8	4,8	5,6		3	6,5	-7,1	4,8	6,3
4	1	9,1	5,6	7,8	9,8	19	1	3,3	7,3	4,2	5,8
	2	3,8	5,1	2,8	6,7		2	2,7	2,3	-2,9	6,1
	3	4,1	5,7	1,2	5,8		3	4,1	4,8	-5	7
5	1	3,3	2,1	2,8	0,8	20	1	3,2	-11,5	3,8	2,8
	2	4,1	3,7	4,8	5,7		2	0,8	1,3	-6,4	-6,5
	3	2,7	1,8	1,1	3,2		3	2,4	7,2	-1,2	4,5
6	1	7,6	5,8	4,7	10,1	21	1	3,7	3,1	4	5
	2	3,8	4,1	2,7	9,7		2	4,1	4,5	-4,8	4,9
	3	2,9	2,1	3,8	7,8		3	-2,1	-3,7	1,8	2,7
7	1	3,2	-2,5	3,7	6,5	22	1	4,1	5,2	-5,8	7
	2	0,5	0,34	1,7	-0,24		2	3,8	-3,1	4	5,3
	3	1,6	2,3	-1,5	4,3		3	7,8	5,3	-6,3	5,8
8	1	5,4	-2,3	3,4	-3,5	23	1	3,7	-2,3	4,5	2,4
	2	4,2	1,7	-2,3	2,7		2	2,5	4,7	-7,8	3,5
	3	3,4	2,4	7,4	1,9		3	1,6	5,3	1,3	-2,4
9	1	3,6	1,8	-4,7	3,8	24	1	6,3	5,2	-0,6	1,5

	2	2,7	-3,6	1,9	0,4		2	3,4	-2,3	3,4	2,7
	3	1,5	4,5	3,3	-1,6		3	0,8	1,4	3,5	-2,3
10	1	5,6	2,7	-1,7	1,9	25	1	1,5	2,3	-3,7	4,5
	2	3,4	-3,6	-6,7	-2,4		2	2,8	3,4	5,8	-3,2
	3	0,8	1,3	3,7	1,2		3	1,2	7,3	-2,3	5,6
11	1	2,7	0,9	-1,5	3,5	26	1	0,9	2,7	-3,8	2,4
	2	4,5	-2,8	6,7	2,6		2	2,5	5,8	-0,5	3,5
	3	5,1	3,7	-1,4	-0,14		3	4,5	-2,1	3,2	-1,2
12	1	4,5	-3,5	7,4	2,5	27	1	2.4	2.5	-2.9	4.5
	2	3,1	-0,6	-2,3	-1,5		2	0.8	3.5	-1.4	3.2
	3	0,8	7,4	-0,5	6,4		3	1.5	-2.3	8.6	-5.5
13	1	3,8	6,7	-1,2	5,2	28	1	5.4	-2.4	3.8	5.5
	2	6,4	1,3	-2,7	3,8		2	2.5	6.8	-1.1	4.3
	3	2,4	-4,5	3,5	-0,6		3	2.7	-0.8	-1.5	-3.5
14	1	5,4	-6,2	-0,5	0,52	29	1	2.4	3.7	-8.3	2.3
	2	3,4	2,3	0,8	-0,8		2	1.8	4.3	1.2	-1.2
	3	2,4	-1,1	3,8	1,8		3	3.4	-2.3	5.2	3.5
15	1	7,8	5,3	-4,8	1,8	30	1	3.2	-11.5	3.8	2.8
	2	3,3	-1,1	-1,8	2,3		2	0.8	1.3	-6.4	-6.5
	3	4,5	3,3	2,8	3,4		3	2.4	7.2	-1.2	4.5

4. ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Контрольные задания на тему «Решение системы нелинейных уравнений»

Задана система нелинейных уравнений $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i=1,2,\ldots,n$.где f_i - некоторые нелинейные функции от аргументов x_i. Требуется найти такую совокупность значений x_i, которая удовлетворяет всем уравнениям системы с заданной точностью ε_i. Решить заданную систему нелинейных уравнений, выполнив вычисления:

-с использованием встроенных функций системы Mathcad.

-с записью в протоколе работы формул и результатов всей последовательности расчетов методами итераций и Ньютона с погрешностью $\varepsilon=0.0001$.

Индивидуальные задания на тему «Решение систем нелинейных уравнений»

1	$\sin(x+1)-y=1{,}2$ $2x+\cos y=2$	2.	$\cos(x-1)+y=0{,}5$ $x-\cos y=3$
3.	$\sin x+2y=2$ $\cos(y-1)+x=0{,}7$	4.	$\cos x+y=1{,}5$ $2x-\sin(y-0{,}5)=1$
5.	$\sin(x+0{,}5)-y=1$ $\cos(y-2)+x=0$	6.	$\cos(x+0{,}5)+y=0{,}8$ $\sin y-2x=1{,}6$
7.	$\sin(x-1)=1{,}3-y$ $x-\sin(y+1)=0{,}8$	8.	$2y-\cos(x+1)=0$ $x+\sin y=-0{,}4$
9.	$\cos(x+0{,}5)-y=2$ $\sin y-2x=1$	10.	$\sin(x+2)-y=1{,}5$ $x+\cos(y-2)=0{,}5$
11.	$\sin(y+1)-x=1{,}2$ $2y+\cos x=2$	12.	$\cos(y-1)+x=0{,}5$ $y-\cos x=3$
13.	$\sin y+2x=2$ $\cos(x-1)+y=0{,}7$	14.	$\cos y+x=1{,}5$ $2y-\cos(x-0{,}5)=1$
15.	$\sin(y+0{,}5)-x=1$ $\cos(x-2)+y=0$	16.	$\cos(y+0{,}5)+x=0{,}8$ $\sin x-2y=1{,}6$
17.	$\sin(y-1)+x=1{,}3$ $y-\sin(x+1)=0{,}8$	18.	$2x-\cos(y+1)=0$ $y+\sin x=-0{,}4$
19.	$\cos(y+0{,}5)-x=2$ $\sin x-2y=1$	20.	$\sin(y+2)-x=1{,}5$ $y+\cos(x-2)=0{,}5$

21.	$\sin(x+1) - y = 1$ $2x + \cos y = 2$	22.	$\cos(x-1) + y = 0{,}8$ $x - \cos y = 2$
23.	$\sin x + 2y = 1{,}6$ $\cos(y-1) + x = 1$	24.	$\cos x + y = 1{,}2$ $2x - \sin(y-0{,}5) = 2$
25.	$\sin(x+0{,}5) - y = 1{,}2$ $\cos(y-2) + x = 0$	26.	$\cos(x+0{,}5) + y = 1$ $\sin y - 2x = 2$
27.	$\sin(x-1) + y = 1{,}5$ $x - \sin(y+1) = 1$	28.	$\sin(y+1) - x = 1$ $2y + \cos x = 2$
29.	$\cos(y-1) + x = 0{,}8$ $y - \cos x = 2$	30.	$\cos(x-1) + y = 1$ $\sin y + 2x = 1{,}6$

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

на тему "Решение системы линейных уравнений "

1. Решение системы линейных уравнений методом простых итераций. Расчетные формулы, алгоритм.
2. Решение системы линейных уравнений методом Зейделя. Расчетные формулы, алгоритм.
3. Условие применимости метода простых итераций (пример приведения к виду, для которого метод итераций применим).
4. Условие применимости метода Зейделя.
5. Что такое треугольная матрица.
6. Как проверить правильность решения системы линейных уравнений с использованием встроенных функций.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

на тему "Решение системы нелинейных уравнений"

1. Решение системы нелинейных уравнений методом итераций. Расчетные формулы, алгоритм.
2. Решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона. Расчетные формулы, алгоритм.
3. Решение системы нелинейных уравнений модифицированными методами Ньютона. Расчетные формулы, алгоритм.
4. Условие применимости метода итераций для системы двух нелинейных уравнений.
5. Условие применимости метода Ньютона.
6. Какие сложности вызывает решение системы из трёх нелинейных уравнений.
7. Какие встроенные функции применяются для решения системы нелинейных уравнений.
8. Матрица Якоби. Что такое Якобиан.
9. Аналогия метода Ньютона с методом касательных.

6. **УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ**

Библиографический список

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970., 664 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. М. -: Наука, 1975. 443с.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов: Учеб. Пособие.-М.: Наука, 1987.-320с.
4. Воробьёва Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам.-М.: Высш.шк., 1979.-420с.
5. Курс лекций по вычислительной математике. Ч.2. /Емельянов В.И., Лёвшин В.Г., Артамонова Л.А.-Новомосковск: НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева. 1986.-100 с.
6. Курс лекций по вычислительной математике. Ч.I. Филатов В.П., Тюрин А.П., Мочалин В.П. НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева, Новомосковск, 1980. 110с.
7. Филатов В.П., Тюрин А.П. Методические указания и контрольные задания по курсу «Вычислительная математика». Учеб. Пособие. НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева, Новомосковск, 1982. 118с.

Учебное издание

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Составители: Артамонова Лидия Анатольевна,
Мочалин Владимир Петрович,
Тивиков Алексей Сергеевич,

Редактор Т.П. Бабокина

Лицензия ЛР N° 020714 от 02.02.98
Подписано в печать 28.12.2000. Формат 60x84 1/16. Бумага типографская №2. Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 1,80. Уч.-изд. л. 0,98. Тираж 100 экз. Заказ 172.

Российский химико-технологический университет им. Д.И Менделеева
Новомосковский институт. Издательский центр
Адрес университета: 125047 Москва, Миусская пл., 9
Адрес института: 301670 Новомосковск, ул. Дружбы, 8