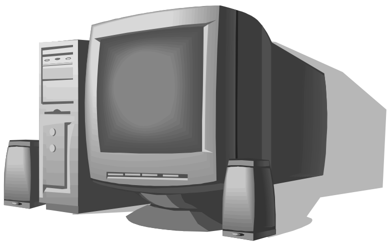
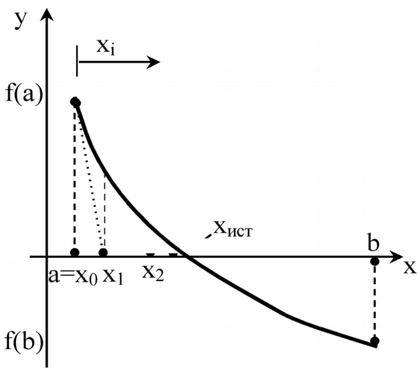
Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации
ГОУ ВПО «Российский химико-технологический
университет им. Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт (филиал)

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Методические указания





$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Новомосковск
2009

Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации
ГОУ ВПО «Российский химико-технологический
университет им. Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт (филиал)

«РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ»

Методические указания

Новомосковск
2009

УДК 681.3
ББК 32.97
А 864

Рецензенты
канд. техн. наук, доцент Новомосковского института Российского химико-технологического университета им. Д.И. Менделеева
И.Д. Моисеева
докт. техн. наук, профессор Новомосковского института Российского химико-технологического университета им. Д.И. Менделеева
Ю.И. Беляев

А 864 Составители: **Артамонова Л.А., Мочалин В.П., Тивиков А.С., Гербер Ю.В. Решение нелинейных уравнений с одним неизвестным.** Методические указания/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт; Новомосковск, 2009,- 48 с.

В методических указаниях рассмотрены основные методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным на ЭВМ. Приведены основы теории по различным методам решения нелинейных уравнений, особенности программирования и решения нелинейных уравнений на ЭВМ, а также контрольные вопросы и задания.

Методические указания могут быть рекомендованы для студентов всех специальностей заочной формы обучения, обучающихся по дисциплине «Вычислительная математика» и «Численные методы и программирование» и изучающих методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным. Методические указания могут быть использованы студентами дневной и вечерней формы обучения и другими категориями пользователей, изучающими методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.

Ил. 49. Табл. 2. Библиогр.: 7 назв.

ББК 32.97
УДК 681.3

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

При проведении химических, технических и инженерных расчётов студент и инженер имеет дело с различными математическими зависимостями, в которых имеется неизвестная величина, требующая определения. Часто эту неизвестную величину не удаётся аналитически выразить и отыскать, или процесс аналитического поиска очень длителен. Тогда приходится обращаться к численным методам решения нелинейного уравнения на ЭВМ. Трудности, с которыми сталкивается студент и инженер при отыскании решения нелинейного уравнения с одним неизвестным, и послужили поводом при написании данного пособия.

Методические указания состоят из трёх глав, в которых рассмотрены основные теоретические положения, особенности решения нелинейных уравнений с одним неизвестным в математическом пакете MathCAD и электронной таблице Excel.

В первой главе рассмотрены основные понятия теории решения нелинейного уравнения с одним неизвестным. Приведены особенности методов отделения и уточнения корней. Здесь же рассмотрены некоторые итерационные простые и комбинированные методы уточнения корней с теоретической точки зрения.

Во второй главе рассмотрены прикладные особенности решения нелинейных уравнений в математическом пакете MathCAD без программирования и с программированием процесса решения.

В третьей главе рассмотрены прикладные особенности решения задачи поиска корней нелинейных уравнений с одним неизвестным с использованием табличного процессора Microsoft Excel.

Каждый из разделов содержит примеры решения задач и подробные объяснения при отделении корней нелинейного уравнения, объяснения при использовании данного метода уточнения корней нелинейного уравнения, а также оценки точности полученных результатов.

Методические указания позволят аспирантам, инженерам и студентам освоить и использовать на ЭВМ методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Основные понятия

Нелинейным уравнением называется зависимость вида f(x)=0 или $f_1(x)=f_2(x)$, где функции f(x), $f_1(x)$, $f_2(x)$ нелинейные относительно переменной x (x в первой степени – линейны). Переменная x называется независимой переменной.

Корнем нелинейного уравнения называется такое значение независимой переменной x, при подстановке которого исходное уравнение обращается в тождество.

Решить нелинейное уравнение, значит, найти действительные значения корней в заданной области или в области определения функции.

Задача определения корней нелинейного уравнения может быть решена в 2 этапа:

1. Отделение корней, т.е. определения таких участков (отрезков) изменения независимой переменной x в пределах которых существует единственный корень заданного уравнения.
2. Уточнение корней, т.е. вычисление значения корня на выделенном ранее отрезке с заданной точностью.

1.2. Методы отделения корней

Существует 3 метода отделения корней: графический метод, аналитический метод и численный метод.

Чтобы ***графически*** отделить корни уравнения необходимо в декартовой системе координат XOY построить заданную функцию y=f(x), если решается уравнение вида f(x)=0, и найти отрезки, в пределах которых эта функция пересекает ось x (Рис.1.). Функция, изображенная на рисунке 1 пересекает ось три раза, т.е. уравнение f(x)=0 имеет 3 корня.

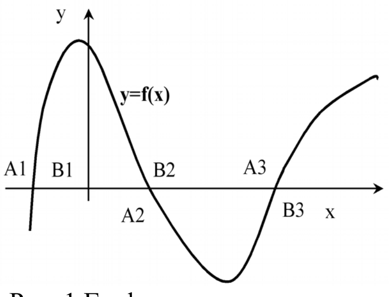


Рис. 1 Графическое отделение корней для уравнения вида f(x)=0

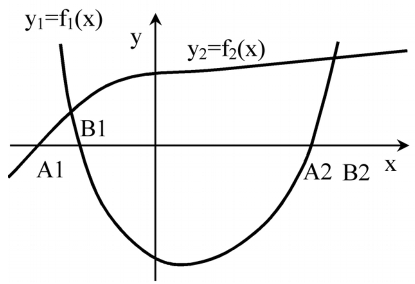


Рис. 2 Графическое отделение корней для уравнения вида $f_1(x)=f_2(x)$

Если функция задана в виде $f_1(x)=f_2(x)$, то в декартовой системе строят две функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ и определяют точки пересечения этих функций (рис.2.). Отрезки выделяют на оси х в окрестности абсцисс точек пересечения.

Достоинства метода графического метода: простота, наглядность.

Недостатки метода: графическое отделение используется для построения простых функций, поведение которых известно.

При ***аналитическом*** отделении корней используются 2 теоремы:

1. Если функция на рассматриваемом отрезке [a,b] непрерывна и на концах этого отрезка имеет разные знаки, то на данном отрезке эта функция имеет нечетное число корней, а если знаки на концах одинаковы – на этом отрезке имеется четное число корней или их нет вообще. Математически теорему I можно записать в виде:

$$\begin{cases} f(a)\cdot f(b)<0 & \text{нечётное число корней на отрезке } [a;b] \\ f(a)\cdot f(b)>0 & \text{чётное число корней на отрезке } [a;b] \end{cases} \qquad (1)$$

2. Если на рассматриваемом отрезке [a,b] функция монотонна (или возрастая или убывая) и не имеет точек перегиба, то функция имеет на данном отрезке единственный корень, если на концах этого отрезка [a,b] знаки функции разные, и функция не имеет корней, если знаки функции одинаковые. Математически теорему II можно записать в виде:

Условие монотонности функции на отрезке [a;b] имеет вид:

$$\frac{d}{da}f(a)\cdot\frac{d}{db}f(b)>0 \qquad (2)$$

Условие того, что функция не имеет точек перегиба на отрезке [a;b] имеет вид:

$$\frac{d^2}{da^2}f(a)\cdot\frac{d^2}{db^2}f(b)>0 \qquad (3)$$

Алгоритм отделения корней аналитическим способом сводится к следующему:

1. Определяется область допустимых значений аргумента.
2. Этот диапазон разбивается на отрезки, в пределах которых функция монотонна. Для этого записывается выражение для 1-ой производной от заданной функции f(x) и определяется значение, при котором эта производная равна нулю f ’(x) = 0.
3. Определяются значения функции на концах всех выделенных отрезков.
4. Проверяется выполнимость теорем I,II на каждом из отрезков. При этом отрезки необходимо сузить так, чтобы теорема II выполнялась всегда.

Пример 1. Для функции x^2-5x+1=0 аналитически отделить корни.

Решение.

1. Определяем область допустимых значений аргумента $-\infty<x<\infty$

2. В этой области для $f(x)=x^2-5x+1$ находим её производную $f1(x)=df(x)/dx=2x-5=0$ и корень производной $x^*=2.5$. Строим участки возрастания - убывания функции f(x) в диапазоне (-∞ ;2.5] и [2.5; ∞) (рис.3).

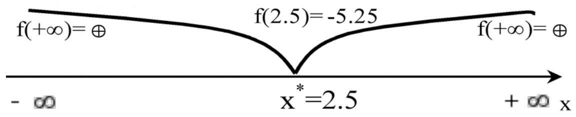


Рис. 3 Аналитическое отделение корней

3. Значения функции $f(x)=x^2-5x+1$ в точках: f(-∞)=∞>0; f(2.5)=6.25-12.5+1<0; f(∞)=∞>0. Имеем 2 перехода (+,-) и (-,+), т.е.2 корня.

4. Проверяем выполнимость теорем I, II на каждом участке:

Сузим левую границу от -∞ до 0 (т.к. f(-∞)>0 и f(0)>0) и правую границу с +∞ до 5 (т.к. f(+∞)>0 и f(5)>0) – имеем отрезки [0;2.5] и [2.5;5].

<u>Участок [0;2.5]:</u> (обозначим $f2(x)=d^2f(x)/dx^2=2$)

f(0) f(2.5)<0 – нечётное число корней на отрезке [0;2.5];
f1(0) f1(2.5)>0 – функция монотонна на отрезке [0;2.5];
f2(0) f2(2.5)>0 – функция не имеет точек перегиба.

На отрезке <u>[0;2.5]</u> уравнение $x^2-5x+1 = 0$ имеет единственный корень.

<u>Участок [2.5;5]:</u>

f(2.5) f(5)<0 – нечётное число корней на отрезке [2.5;5];
f1(2.5) f1(5)>0 – функция монотонна на отрезке [2.5;5];
f2(2.5)f2(5)>0 – функция не имеет точек перегиба.

На отрезке [2.5;5] уравнение $x^2-5x+1 = 0$ имеет единственный корень.

<u>Ответ</u>: Корни отделены на отрезках [0;2.5] и [2.5;5].

Достоинства аналитического метода: этот метод позволяет выделить все действительные корни заданного уравнения.

Недостатки: можно применять для некоторых функций, у которых 1-я производная имеет простой вид, т.е. уравнение, полученное из первой производной, может быть решено аналитически.

Для ***численного*** отделения корней выполняется табуляция заданной функции в области изменения аргумента X с крупным шагом. Выделяются отрезки, на которых функция меняет свой знак и при необходимости выполняется табуляция выделенного отрезка с более мелким шагом (построение таблицы). По окончании процесса табуляции выделенные отре5зки необходимо проверить на наличие единственного корня по аналитическим теоремам единственности корня.

Достоинства: простота метода.

Недостатки:

1. можно пропустить корни при табуляции с большим шагом.
2. если функция сложная, то имеем много сложных вычислений.

Пример 2: Численно отделить корни для функции x^2-5x+0,5=0.

Решение. Проведём табуляцию функции:

x	$-\infty$	-1000	-100	-10	-1	0	1	10	100
y	+	+	+	+	+	+	-	+	+

Переход знака: [0;1] и[1;10] – необходимо повторное табулирование с более мелким шагом.

Участок [0;1]: (обозначим f1(x)=df(x)/dx= 2x-5 и f2(x)=$d^2f(x)/dx^2$=2)

f(0) f(1)<0 – нечётное число корней на отрезке [0;1];

f1(0) f1(1)>0 – функция монотонна на отрезке [0;1];

f2(0) f2(1)>0 – функция не имеет точек перегиба.

На отрезке [0;1] уравнение x^2-5x+0.5 = 0 имеет единственный корень.

Участок [1;10]:

f(1) f(10)<0 – нечётное число корней на отрезке [1;10];

f1(1) f1(10)<0 – функция немонотонна на отрезке [1;10]; необходимо сузить этот отрезок.

x	1	2	3	5	10
y	–	–	–	+	+

f1(3) f1(5)>0 – функция монотонна на отрезке [1;10];

f2(3)f2(5)>0 – функция не имеет точек перегиба.

На отрезке [3;5] уравнение x^2-5x+0.5 = 0 имеет единственный корень.

Ответ: Корни отделены на отрезках [0;1], [3;5].

1.3. Основные понятия итерационных методов уточнения корней

Все численные методы уточнения корней итерационные (пошаговые).

Итерацией называется каждый отдельный вычисленный шаг, в результате которого получается значение корня. Сам процесс таких вычислений называется *итерационным процессом*.

Различают сходящийся итерационный процесс, когда в результате последовательности шагов мы приближаемся к одному значению и расходящийся итерационный процесс, когда последующие значения x сильно отличаются друг от друга.

Кроме того, итерационный процесс бывает монотонным, если приближение или удаление осуществляется в одну сторону и колебательным, если приближение или удаление происходит с разных сторон от истинной величины корня.

Для выполнения любого итерационного процесса выводится итерационная формула, которая позволяет вычислить следующее значение переменной x через какое-либо известное значение этой величины x, т.е.:

$$x_{i+1}=\varphi(x_i) \qquad (4)$$

где i- номер итерации; φ- итерационная формула.

Итерационный процесс происходит до тех пор, пока не достигается заданная точность, т.е. пока не выполнятся условия:

$$|x_{i+1}-x_i|\le\varepsilon_x \qquad (5)$$

$$|f(x_{i+1})|\le\varepsilon_y \qquad (6)$$

где x_{i+1} и x_i два соседних приближения к корню;
$f(x_{i+1})$ – значение функции в точке, которую считают корнем;
ε_x, ε_y - заданная точность по аргументу x и по функции y.

Часто точность задается одинаковая $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon$

Алгоритм уточнения корня на выделенном отрезке сводится к следующему:

1. Проверить условие применимости итерационных методов (I, II теоремы)
2. Выбрать начальные приближения к корню
3. Выполнить итерационный процесс, проверяя на каждой итерации условия его окончания.
4. Записать результат вычисления по правилам записи приближенных чисел.

В зависимости от вывода итерационной формулы φ(x) различается несколько методов уточнения корней: метод простых итераций, метод половинного деления, метод касательных, метод хорд, метод секущих и т.д.

1.4. Метод простых итераций

По методу простых итераций итерационная формула получается из заданного уравнения, если выразить из него одно из наименований аргумента x, т.е. имеем f(x)=0 выражаем x= φ(x) - итерационная формула (4).

Пример 3: Найти возможные итерационные формулы метода простых итераций для решения уравнения $x^3=\ln(x)$.

Решение. Для функции $\underline{x}^3=\ln(x)$ можно x выразить по разному:

а)первая итерационная формула получается путем выражения из заданного уравнения $\underline{x}^3$, $x=\sqrt[3]{\ln(x)}$

b) итерационные формулы можно получим представив заданное уравнение в виде $\underline{x}^2\cdot x=\ln(x)$, тогда вторую итерационную формулу получим выразив $\underline{x}^2$: $x^2=\ln(x)/x$, следовательно, $x=\pm\sqrt{\dfrac{\ln(x)}{x}}$

c) третью итерационную формулу получим выразив x: $x^2\cdot x=\ln(x)$, следовательно, $x=\ln(x)/x^2$

d) четвертую итерационную формулу получаем путем логарифмирования обеих частей заданного уравнения $\ln(x)=x^3$, тогда $\exp(\ln(x))=\exp(x^3)$, следовательно, $x=\exp(x^3)$

Но не всякая итерационная формула дает сходимость.

Чтобы итерационный процесс был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы модуль производной от итерационной функции в любой точке выделенного отрезка уточнения корня был меньше единицы:

$$0<|d\varphi(x)/dx|\leq 1 \qquad (7)$$

или

$$0<|\varphi'(a)|\leq 1 \qquad 0<|\varphi'(b)|\leq 1 \qquad (8)$$

Может оказаться, что не существует прямых итерационных формул, которые бы давали сходящийся итерационный процесс.

Тогда выводят **универсальную формулу** исходя из условия сходимости итерационного процесса, определяемого итерационной формулой. Для этого исходное уравнение $f(x)=0$ домножается на корректирующий коэффициент и к обеим частям этого уравнения добавляется величина x, т.е. $x+K\,f(x)=x=\varphi(x)$ или:

$$\varphi(x) = x + Kf(x) \qquad (9)$$

Взяв производную от (9) имеем:

$$\varphi'(x) = 1 + Kf'(x) \qquad (10)$$

Из (7) для идеальной сходимости процесса $\varphi'(x)$ =0 или:

$$|1 + Kf'(x)| = 0 \qquad (11)$$

Откуда $K = \dfrac{-1}{\max|f'(x)| \cdot sign[f'(x)]}$

Пример 4: Графически отделить корни для функции $x^3=\ln(x)+1.7$ и найти итерационную формулу на одном из отрезков, которая даёт сходимость.

Решение. Выделим функции $f_1(x)=x^3$ и $f_2(x)= \ln(x)+1.7$.

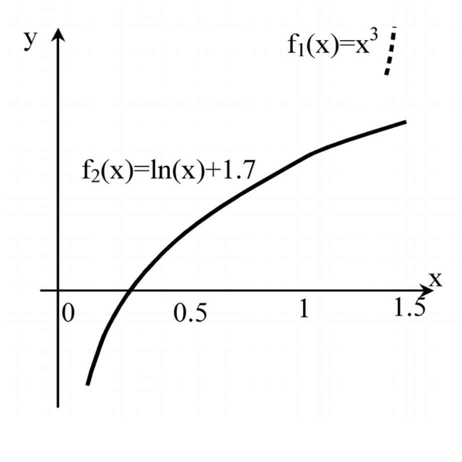


Рис. 4 Графическое отделение корней в итерационном методе

1. Графически отделяем корни (рис.4) – отрезки [0;0.5] [1;1.5].
2. Уравнение f(x)=0, где функция: $f(x)=x^3-\ln(x)-1.7$

Проверим выполнимость двух теорем для отрезка [1;1.5]:

а) $f(1)=1^3-\ln(1)-1.7= -0.7<0$
$f(1.5)=1.5^3-\ln(1.5)-1.7=1.27>0$,
т.е. f(1) f(1.5) <0

по условию (1) корень на отрезке [1;1.5]существует.

б) $f1(x)=df(x)/dx=3x^2-1/x$;
$f1(1)=3-1=2>0$
$f1(1.5)=3(1.5)^2-1/1.5= 6.083>0$,
т.е. f1(1) f1(1.5) >0

по условию (2) функция монотонна.

в) $f2(x)=d^2f(x)/dx^2=6x+1/x^2$;
$f2(1.5)=6(1.5)+1/1.5^2=9.444>0$;
$f2(1)=6+1=7>0$

т.е. f2(1) f2(1.5) >0, по условию (3) точек перегиба нет.

Вывод: На отрезке [1;1.5] существует единственный корень уравнения $x^3=\ln(x)+1.7$.

3. Выведем итерационные формулы и проверим их на сходимость. Из исходной функции $f(x) = x^3-\ln(x)-1.7 = 0$ получим различные итерационные формулы:

а) Первая итерационная формула $\varphi_1(x)=\frac{\ln(x)+1.7}{x^2}$;

Производная от неё:

$$\varphi_1'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(\ln x+1.7)}{x^4}=\frac{x-2x\ln x-3.4x}{x^4}=\frac{1-2\ln x-2.4x}{x^3}$$

Проверка сходимости по (8): $|\varphi_1'(1)|=2{,}4>1; |\varphi_2'(x)|=0{,}951<1$

Формула не дает сходимости итерационного процесса (7).

б) Вторая итерационная формула $\varphi_2(x)=\sqrt[3]{\ln(x)+1.7}$

Производная от неё:

$$\varphi_2'(x)=\frac{1}{3}(\ln(x)+1.7)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(\ln(x)+1.7)^2}}$$

Проверка сходимости по (8):

$\varphi_2'(1)=0{,}234<1$ $\qquad$ $\varphi_2'(1.5)=0.135<1$

Итерационный процесс – сходится по условию (8).

Ответ. Итерационная формула $\varphi_2(x) = \sqrt[3]{\ln(x) + 1.7}$ даёт сходимость итерационного процесса на отрезке [1;1.5].

Чем дальше модуль производной φ'(x) от 1 и чем ближе к 0, тем лучше сходимость итерационного процесса, т.е. тем меньше шагов потребуется для вычисления корня.

Считается, что если: |φ'(x)|<0.3-очень хорошая сходимость; |φ'(x)|<0.5 - хорошая сходимость; |φ'(x)|<0.7 – удовлетворительная сходимость; |φ'(x)|<0,9- плохая сходимость.

Пример 5: Для функции x^3-ln(x)-1,7=0 (пример 4) на отрезке [1;1.5] найти выражение для универсальной итерационной формулы.

Решение. Универсальная формула: x=x+K(x^3-ln(x)-1.7)

f1(1)=2; f1(1.5)=6.083; max|f1(x)|=6.083 на отрезке [1;1.5]

Знак первой производной sign(f1(x))=+1 на отрезке [1;1.5].

Таким образом: $K = -\frac{1}{6}$

Ответ: Универсальная формула $x = x - \frac{1}{6}(x^3 - \ln(x) - 1.7);$

В зависимости от вида функции φ(x) получают различные итерационные процессы: сходящиеся или расходящиеся. Графическая интерпретация метода простых итераций заключается в построении биссектрисы y_1=x и y_2=φ(x) (Рис. 5, 6, 7, 8):

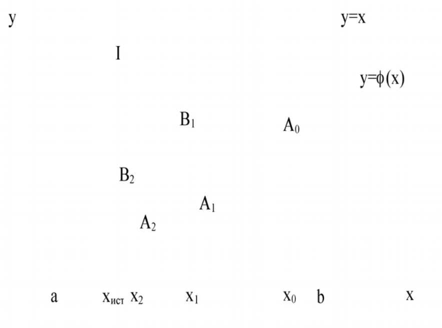


Рис. 5. I-корректный случай- монотонно-сходящийся итерационный процесс.

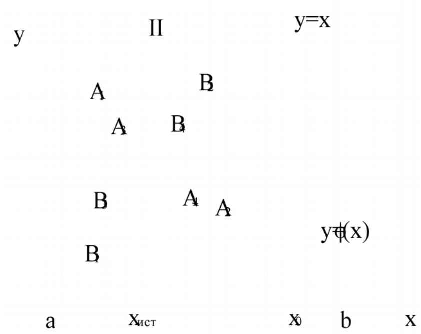


Рис. 6. II-корректный случай – колебательный сходящийся итерационный процесс.

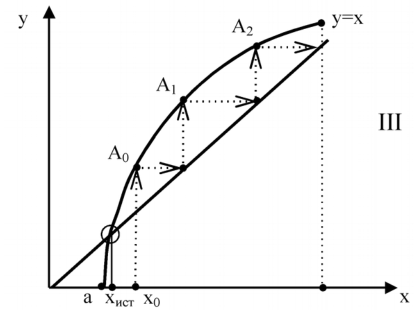


Рис. 7 III- некорректный случай (уходим от корня $x_{ист)}$ $|\varphi'(x)|>1$ т.е. наклон больше чем у биссектрисы

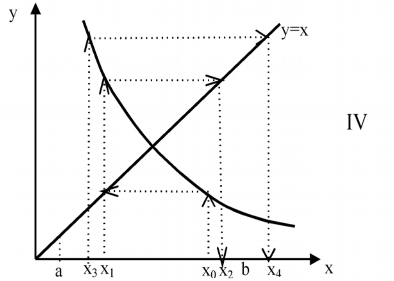


Рис. 8 IV - Некорректный случай (уходим от корня $x_{ист}$) $|\varphi'(x)|>1$ т.е. отрицательный наклон больше

Итерационный процесс выполняется по формуле (9). За начальное приближение x_0 принимают любую точку отрезка отделения корня [a;b]. Обычно выбирают или середину отрезка $x_0=(a+b)/2$, либо тот конец, на котором сходимость выше:

$$x_0 = \begin{cases} a, если \left|\varphi'(a)\right| < \left|\varphi'(b)\right|; \\ b, если \left|\varphi'(b)\right| < \left|\varphi'(a)\right|; \end{cases} \qquad (12)$$

Итерационные расчеты заканчиваются когда будут выполнены оба условия окончания расчёта (5) и (6).

Достоинство метода простых итераций: простота итерационной формулы.

Недостаток метода простых итераций: для сложных функций сложно добиться сходимости итерационного процесса.

1.5. Метод касательных (Ньютона)

Сущность метода состоит в том, что на отрезке [a;b] исходное уравнение f(x) заменяется касательной к этой функции, проведенной на одном из концов отрезка. За приближение к корню принимается точка пересечения касательной с осью x (рис. 9, 10.):

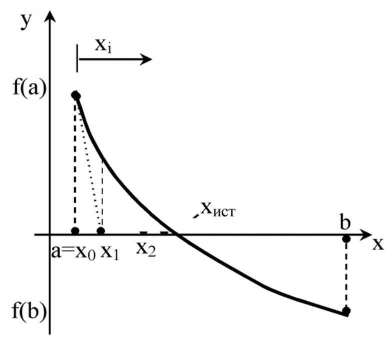


Рис. 9 Метод касательных для монотонно убывающей функции

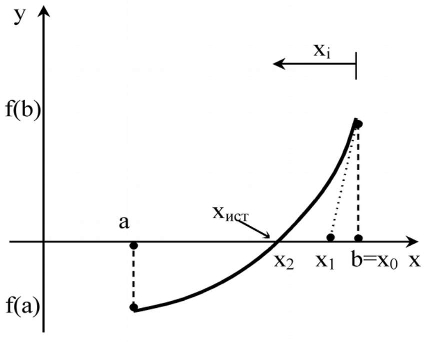


Рис. 10 Метод касательных для монотонно возрастающей функции

Известно, что тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс в точке x_i равен производной в этой точке : $tg\alpha_i = f'(x_i)$.

Тангенс угла в треугольнике есть отношение противолежащего катета к прилежащему катету, т.е. из графика имеем: $tg\alpha_i = \frac{-f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$. Приравнивая, получим: $-\frac{f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(x_i)$.

Откуда, выражая x_{i+1}, получим итерационную формулу метода касательных:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}; \qquad (13)$$

Важно правильно выбрать начальное приближение, которое определяется из условий сходимости итерационной формулы (13). Чтобы формула давала сходящийся процесс необходимо, чтобы:

$$f(x) \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0 \qquad (14)$$

Отсюда начальное приближение x_0 находят по формуле:

$$x_0 = \begin{cases} a, если\ f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ b, если\ f(b) f''(b) > 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Условие (15) выполняется либо в точке a, либо в точке b.

Условия окончания расчёта (5) и (6).

Достоинство метода касательных: хорошая сходимость итерационного процесса к корню.

Недостаток: этот метод нельзя использовать в том случае, если на границах отрезка производные к функции f(x) асимптотически приближаются к прямым параллельным осям координат, т.е. производные близки к бесконечности или 0.

1.6. Метод хорд

Сущность метода заключается в том, что на отрезке [a,b] заданная функция f(x) заменяется хордой, которая стягивает значения функции на концах отрезка существования корня (рис.11, 12).

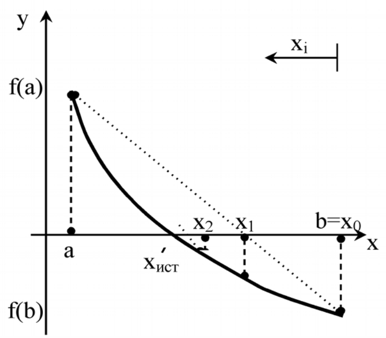


Рис. 11 Метод хорд для монотонно убывающей функции

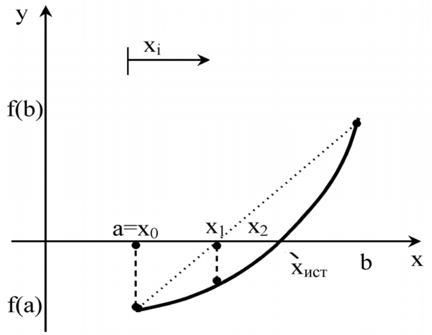


Рис. 12 Метод хорд для монотонно возрастающей функции

Точку пересечения хорды и оси абсцисс принимаем за следующее приближение к корню. Один конец отрезка неподвижен, второй участвует в сходящемся итерационном процессе. Обозначим неподвижную точку «c». Из геометрии известно, что уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (16)$$

Рассмотрим хорду, проходящую через точки с координатами $[x_i;f(x_i)]$ и $[c;f(c)]$. Тогда из (16) имеем:

$$\frac{y-f(x_i)}{f(c)-f(x_i)}=\frac{x-x_i}{c-x_i} \qquad (17)$$

В точке пересечения линии с осью абсцисс y=0, тогда из (17) имеем:

$$\frac{-f(x_i)}{f(c)-f(x_i)}=\frac{x_{i+1}-x}{c-x_i} \qquad (18)$$

Выражая из (18) x_{i+1} имеем уравнение метода хорд:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)(c-x_i)}{f(c)-f(x_i)} \qquad (19)$$

За начальное приближение (подвижную точку) для метода хорд принимаем такую точку x_0, для которой:

$$x_0 = \begin{cases} a, если\ f(a)\cdot f''(a) < 0 \\ b, если\ f(b)\cdot f''(b) < 0 \end{cases} \qquad (20)$$

Условия окончания расчёта (5) и (6).

Достоинства: высокая скорость сходимости к корню.

Недостатки: четкое выполнение правил единственного корня (1) - (3).

1.7. Метод половинного деления

Сущность метода состоит в том, что на отрезке [a,b] за следующее приближение к корню принимается середина выделенного отрезка c=(a+b)/2.

Если середина не является корнем, то она принимается за точку, которая делит отрезок на 2 равные части - корень лежит на одной из этих частей и середина становится одной из границ нового выделенного отрезка.

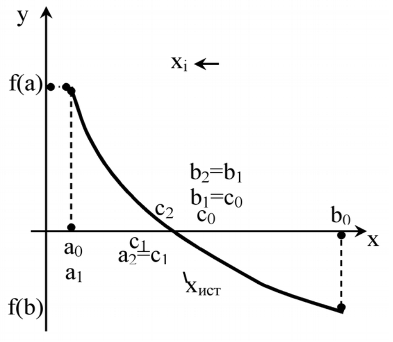


Рис. 13 Метод половинного деления для монотонно убывающей функции

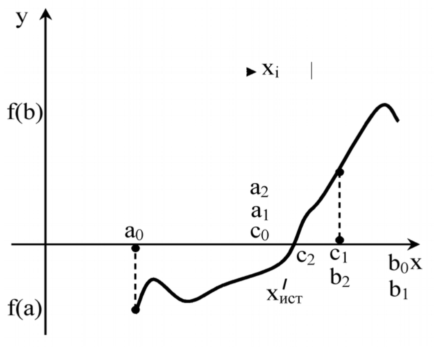


Рис. 14 Метод половинного деления для немонотонной функции, имеющей точки перегиба

На 0-м шаге деление пополам исходного отрезка $[a_0;b_0]$ (рис. 13) приводит к появлению двух половинок – отрезков $[a_0;(a_0+b_0)/2]$ и $[(a_0+b_0)/2;b_0]$. Корень есть на том из отрезков, на котором функция на концах отрезка имеет разные знаки. Для рис. 13. имеем $f(a_0)>0$ и $f(c_0=(a_0+b_0)/2)<0$ – разные знаки; и $f(c_0=(a_0+b_0)/2)<0$ и $f(b_0)<0$ – одинаковые знаки. Вывод – корень есть на отрезке $[a_0;(a_0+b_0)/2]$.

На следующем 1-м шаге (рис. 13) рассматривается отрезок $[a_1=a_0;b_1=(a_0+b_0)/2]$, на котором есть корень. Отрезок $[a_1;b_1]$ делится пополам – имеем отрезки $[a_1;(a_1+b_1)/2]$ и $[(a_1+b_1)/2;b_1]$. Корень есть на том из отрезков, на котором функция на концах отрезка имеет разные знаки. Для рис. 13. имеем

$f(a_1)>0$ и $f(c_1=(a_1+b_1)/2)>0$ – одинаковые знаки; и $f(c_1=(a_1+b_1)/2)>0$ и $f(b_1)<0$ – разные знаки. Вывод – корень есть на отрезке $[(a_1+b_1)/2;b_1]$.

На следующем 2-м шаге (рис. 13) рассматривается отрезок $[a_2=(a_1+b_1)/2;b_2=b_1]$, на котором есть корень. И так далее, до тех пор пока:

$$\left|\frac{a_i - b_i}{2}\right| \le \varepsilon_x \text{ и } \left|f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)\right| \le \varepsilon_y$$

За решение принимается величина: $x = \dfrac{a_i + b_i}{2} \pm \left|\dfrac{a_i - b_i}{2}\right|$

Итак, сделаем два вывода к методу половинного деления:

- корня на отрезке нет, если функции на концах отрезка одного знака.
- если корня на отрезке нет, то один из его краев становится подвижным.

Исходя из этого, имеем формулы для метода половинного деления:

$$a_{i+1} = \begin{cases} \dfrac{a_i + b_i}{2}; если\ f(a_i)\cdot f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) > 0 \\ a_i; если\ f(a_i)\cdot f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) < 0 \end{cases} \qquad b_{i+1} = \begin{cases} \dfrac{a_i + b_i}{2}; если\ f(b_i)\cdot f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) > 0 \\ b_i; если\ f(b_i)\cdot f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

(21)

Для этого метода начальное приближение задавать не надо.

Достоинства: единственный метод, который не требует выполнения I-ой теоремы (функция может быть немонотонной на [a;b] (рис.14) и иметь точки перегиба).

Недостатки: достаточно низкая скорость сходимости, зная ширину отрезка можно предсказать количество шагов, которое надо выполнить для вычисления корня с заданной точностью (оно кратно $2^{(b-a)}$).

1.8. МОДИФИКАЦИИ МЕТОДОВ

Основное применение находят методы хорд, касательных, простых итераций, половинного деления или их модификации, которые вводятся для тех случаев, когда точность высока, а выражение для исходной функции достаточно сложно. Наибольшее распространение метода касательных получили следующие методы: модификация Ньютона – Эйлера, метод секущих, комбинированный метод хорд и касательных, метод Векстейна.

1.8.1. Модификация Ньютона-Эйлера

Модификация Ньютона-Эйлера – модификация метода касательных и используется, когда выражение для производной df(x)/dx в несколько раз сложнее выражения исходной функции f(x).

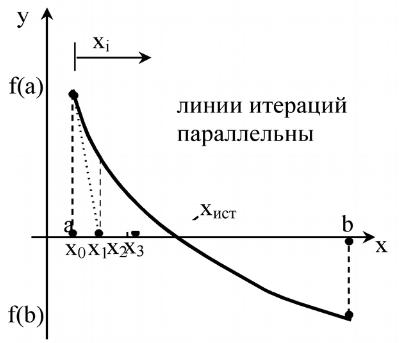


Рис. 15 Модификация Ньютона-Эйлера для убывающей функции

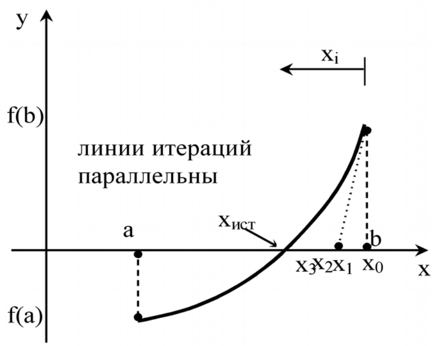


Рис. 16 Модификация Ньютона-Эйлера для возрастающей функции

В этом модифицированном методе производятся вычисления производной только один раз в начальной точке $df(x_0)/dx$. Графически (рис.15, 16) это обозначает, что проводится лишь одна касательная на 0-й итерации, а остальные линии итераций графически проводятся параллельно этой касательной.

Итерационная формула метода Ньютона-Эйлера примет вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)} \qquad (22)$$

Метод обладает основными достоинствами метода касательных, но сходимость к корню ниже, т.к. неточно вычисляем производную.

1.8.2. Метод секущих

Метод секущих используется когда, когда выражение для производной df(x)/dx в методе касательных очень сложное. Это выражение заменяется по определению производной своим приближением:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \qquad (23)$$

Тогда имеем формулу метода касательных для метода секущих в виде:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \qquad (24)$$

Уравнение метода секущих похоже на уравнение метода хорд, но здесь оба конца подвижны.

Для метода секущих нужно задать две начальные точки: x_0 и x_1. Начальная точка x_0 выбирается по правилам метода касательных (15). Для нахождения другой начальной точки вводят точку с индексом x_{-1} - другой конец отрезка [a;b]. Тогда, вторую начальную точку x_1 находят, как точку пересечения стягивающей хорды $f(x_0)$-$f(x_{-1})$ с осью абсцисс (рис. 18, 19).

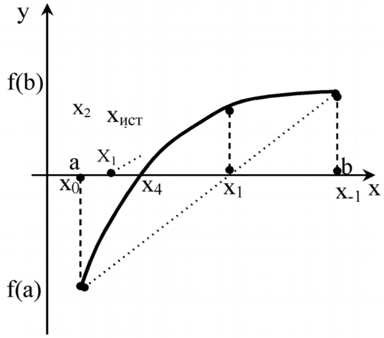


Рис. 17 Метод секущих для монотонно возрастающей функции

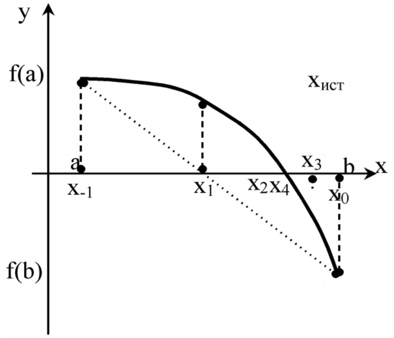


Рис. 18 Метод секущих для монотонно убывающей функции

Имея две начальные точки x_0 и x_1, проводят секущую $f(x_0)$-$f(x_1)$, находя точку пересечения с осью абсцисс x_2. Затем проводят следующую секущую $f(x_1)$-$f(x_2)$, находя точку пересечения с осью абсцисс x_3. Затем проводят следующую секущую $f(x_2)$-$f(x_3)$, находя точку пересечения с осью абсцисс x_4. Процесс проведения секущих продолжают до достижения требуемой точности по ε уравнения (2) и (3) (рис. 17, 18).

В отличие от метода хорд и касательных, когда приближение ведется с одной стороны, итерационный процесс ведется с двух сторон, и он колебательный, поэтому приближения к корню по скорости снижается.

1.8.3. Комбинированный метод хорд и касательных

По этому методу приближение к корню ведется с двух сторон отрезка. По уравнению (15) выбирается начальная точки для метода касательных, а по уравнению (20) – для метода хорд. С одного конца отрезка следуют по методу касательных (15), с другого - по методу хорд (19). Это позволяет сузить отрезок и увеличить скорость сходимости (рис. 19, 20).

Формулы комбинированного метода хорд и касательных для случая, когда левая граница изменяется по методу касательных, а правая по методу хорд (рис. 19) имеют вид:

$$\begin{cases} a_{i+1} = a_i - \dfrac{f(a_i)}{f'(a_i)} \\ b_{i+1} = b_i - \dfrac{f(b_i)(a_i - b_i)}{f(a_i) - f(b_i)} \end{cases} \qquad (25)$$

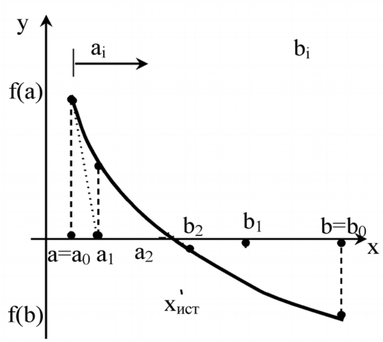


Рис. 19 Комбинированный метод хорд и касательных для монотонно убывающей функции

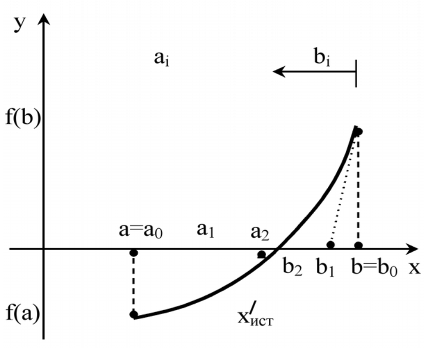


Рис. 20 Комбинированный метод хорд и касательных для монотонно возрастающей функции

Формулы комбинированного метода хорд и касательных для случая, когда левая граница изменяется по методу хорд, а правая по методу касательных (рис. 20) имеют вид:

$$\begin{cases} a_{i+1} = a_i - \dfrac{f(a_i)(b_i - a_i)}{f(b_i) - f(a_i)} \\ b_{i+1} = b_i - \dfrac{f(b_i)}{f'(b_i)} \end{cases} \qquad (26)$$

И так далее, до тех пор пока:

$$\left|\frac{a_i - b_i}{2}\right| \le \varepsilon_x \text{ и } \left|f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)\right| \le \varepsilon_y$$

За решение принимается величина: $x = \dfrac{a_i + b_i}{2} \pm \left|\dfrac{a_i - b_i}{2}\right|$

Сходимость метода выше, чем у метода хорд и касательных взятых по отдельности.

1.8.4. Метод Векстейна

Метод Векстейна - комбинированный метод хорд и итераций, причем хорда используется для замены φ(x), а не исходной функции f(x).

Графическая интерпретация метода представлена на рис. 21.

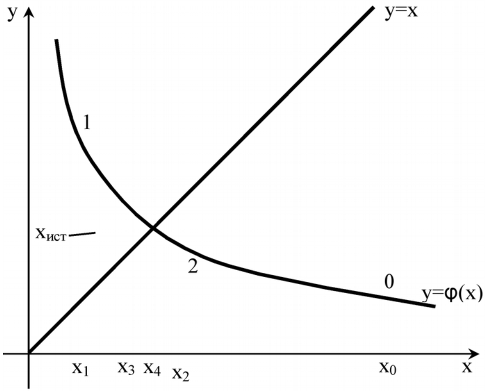


Рис. 21 Метод Векстейна

Имея начальное приближение точку x_0 Итерация $x_0 \rightarrow$ $x_1 \rightarrow$ хорда Итерация $x_2 \rightarrow$ $x_3 \rightarrow$ хорда

Точка пересечения хорды с биссектрисой y_1=к даёт следующее приближение к корню x_{i+1} т.е. заменяем x и y в уравнении прямой (биссектриса $\Rightarrow$ $y = x_{i+1} и x = x_{i+1}$)

Выведем уравнение метода хорд. Уравнение прямой (16), проходящей через две точки x_{i-1} и x_i (где i=1,2…n (рис. 21.)) имеет вид:

$$\frac{y - \varphi(x_i)}{\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)} = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \qquad (27)$$

Искомая точка x_{i+1} лежит на биссектрисе y=x. Полагая $y=x=x_{i+1}$ имеем:

$$\frac{x_{i+1} - \varphi(x_i)}{\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)} = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i-1} - x_i} \qquad (28)$$

Выразим из (28) x_{i+1}, получим формулу метода Векстейна (где $x_i=\varphi(x_{i-1})$):

$$x_{i+1} = \frac{\varphi(x_i)\, x_{i-1} - x_i^2}{x_{i-1} - 2x_i + \varphi(x_i)} \qquad (29)$$

Часто за начальное приближение в методе Векстейна $x_0=(a+b)/2$.

Итерации продолжают до достижения требуемой точности по ε уравнения (2) и (3).

Достоинства: если итерационная формула обладает плохой сходимостью или имеет немного расходящийся процесс (т.е. $|\varphi'(x)| \approx 1$), то метод Векстейна даёт быстро сходящийся итерационный процесс.

Недостаток: нельзя использовать если $|\varphi'(x)| >> 1$.

1.8.5. Метод золотого сечения

Метод золотого сечения - модификация метода половинного деления. Сущность метода заключается в то, что отрезок уточнения корня [a;b] делится не пополам, а на три равные части $[a_i;x_i]$, $[x_i;z_i]$ и $[z_i;b_i]$. При этом возможны три случая расположения корня (рис. 22).

Рис. 22 К методу золотого сечения

По методу золотого сечения имеем два приближения к корню:

$$x_{i+1} = \frac{2a_i + b_i}{3} \qquad z_{i+1} = \frac{a_i + 2b_i}{3} \qquad (30)$$

Если корень находится на одном из трёх выделенных золотым сечением отрезке, то на следующей итерации рассматривают уже этот отрезок.

Для рис. 22а имеем: $a_{i+1} = a_i \quad b_{i+1} = x_i \quad т.к.\ f(a_i) \cdot f(x_i) < 0$

Для рис. 22б имеем: $a_{i+1} = x_i \quad b_{i+1} = z_i \quad т.к.\ f(x_i) \cdot f(z_i) < 0$

Для рис. 22в имеем: $a_{i+1} = z_i \quad b_{i+1} = b_i \quad т.к.\ f(z_i) \cdot f(b_i) < 0$

Таким образом, формулы метода золотого сечения:

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i \text{ если } f(a_i) \cdot f\left(\dfrac{2a_i + b_i}{3}\right) < 0 \\ \dfrac{2a_i + b_i}{3} \text{ если } f\left(\dfrac{2a_i + b_i}{3}\right) \cdot f\left(\dfrac{a_i + 2b_i}{3}\right) < 0 \\ \dfrac{a_i + 2b_i}{3} \text{ если } f\left(\dfrac{a_i + 2b_i}{3}\right) \cdot f(b_i) < 0 \end{cases} \tag{31}$$

$$b_{i+1} = \begin{cases} \dfrac{2a_i + b_i}{3} \text{ если } f(a_i) \cdot f\left(\dfrac{2a_i + b_i}{3}\right) < 0 \\ \dfrac{a_i + 2b_i}{3} \text{ если } f\left(\dfrac{2a_i + b_i}{3}\right) \cdot f\left(\dfrac{a_i + 2b_i}{3}\right) < 0 \\ b_i \text{ если } f\left(\dfrac{a_i + 2b_i}{3}\right) \cdot f(b_i) < 0 \end{cases} \tag{32}$$

И так далее, до тех пор пока:

$$\left|\frac{a_i - b_i}{3}\right| \le \varepsilon_x \text{ и } \left|f\left(\frac{a_i + b_i}{3}\right)\right| \le \varepsilon_y$$

За решение принимается величина: $x = \dfrac{a_i + b_i}{2} \pm \left|\dfrac{a_i - b_i}{3}\right|$

Графическая интерпретация метода представлена на рис. 23.

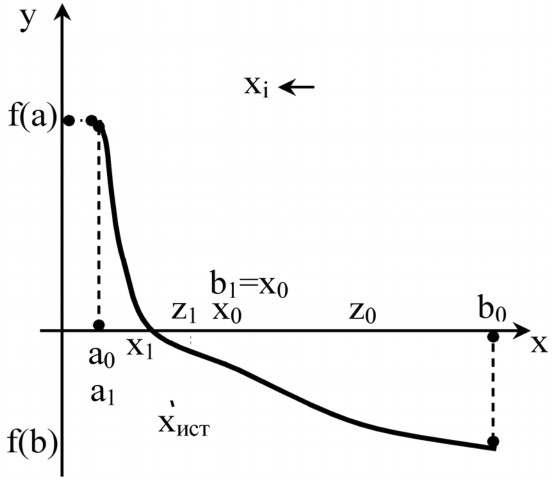


Рис. 23 Метод золотого сечения

Достоинство: позволяет увеличить сходимость к корню по сравнению с методом половинного деления.

Недостаток: усложнение итерационной формулы.

2. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В MATHCAD

Численное решение нелинейного уравнения с одним неизвестным на ЭВМ возможно с использованием различных пакетов и программ. В этой главе рассмотрим особенности решения нелинейного уравнения с одним неизвестным с использованием математического пакета MathCAD. MathCAD позволяет найти решение уравнений в символьном или численном виде. Символьное решение дает точное значение корня. Однако не все уравнения могут быть решены символьно. Численные методы могут применяться практически для любых типов уравнений, но имеют ряд недостатков: при их использование трудно определить, откуда начать поиск решения, сколько всего решений существует решение получается с определенной точностью. Во всех встроенных функциях по умолчанию MathCAD принимает точность равную 0,001. Если требуется получить результат с другой точностью, то следует задать точность, описав параметр TOL:=точность. Например, TOL:=0,0001. Этапы решения нелинейного уравнения те же: 1. Отделение корней одним из методов; 2. Уточнение корней нелинейного уравнения.

2.1. Отделение корней нелинейных уравнений в MathCAD

При отделении корней нелинейного уравнения с одним неизвестным используют графический, аналитический либо численный методы отделения (рис. 24-27). Часто здесь же проверяют исходное уравнение на наличие корня на выделенном отрезке, монотонность функции на выделенном отрезке и отсутствие точек перегиба (теоремы I, II).

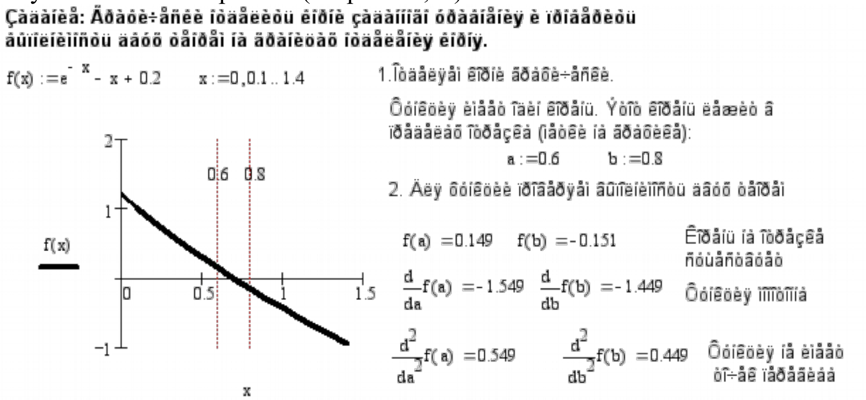


Рис. 24 Графический способ отделения корней в MathCAD

Графический способ решения нелинейного параметрического уравнения f(x)=g(x,a) с одним неизвестным путем построения графиков для левой и правой частей уравнения с заданным значением параметра а

$x := -1, -0.9 .. 1$

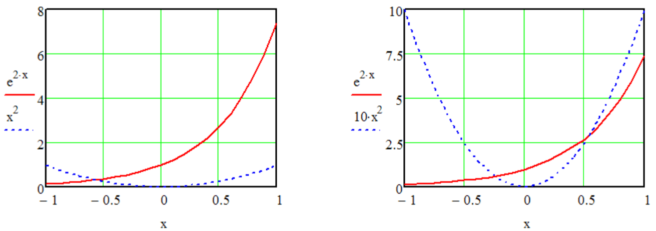


Рис. 25 Решение параметрического нелинейного уравнения графическим способом

Çàäàíèå: Àíàëèòè÷åñêè îòäåëèòü êîðíè çàäàííîãî óðàâíåíèÿ è ïðîâåðèòü âûïîëíèìîñòü äâóõ òåîðåì.

1) Îòäåëÿåì êîðíè àíàëèòè÷åñêè $\quad f(x) := e^{-x} - x + 0.2$

Ïðîèçâîäíàÿ: $\quad g(x) := \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow -\exp(-x) - 1 \quad x1 = 1$ $\quad$ Ñîñòàâèì òàáëèöó:

$f(-100) = 2.688 \times 10^{43} \quad f(0) = 1.2 \quad f(1) = -0.432 \quad f(2) = -1.665 \quad f(100) = -99.8$

Èìååì îäèí äåéñòâèòåëüíûé êîðåíü, ëåæàùèé â ïðîìåæóòêå [0,1]

Ïîïðîáóåì óìåíüøèòü äèàïàçîí: $\quad f(0.5) = 0.307 \quad f(0.75) = -0.078$

Ëåâàÿ è ïðàâàÿ ãðàíèöà ïîèñêà êîðíÿ: $\quad a := 0.5 \quad b := 0.75$

2. Äëÿ ôóíêöèè ïðîâåðÿåì âûïîëíèìîñòü äâóõ òåîðåì $\quad f(a) = 0.307 \quad f(b) = -0.078$ $\quad$ Êîðåíü íà îòðåçêå ñóùåñòâóåò

$\frac{d}{da}f(a) = -1.607 \quad \frac{d}{db}f(b) = -1.472 \qquad \frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.607 \quad \frac{d^2}{db^2}f(b) = 0.472$

Ôóíêöèÿ ìîíîòîííà $\qquad$ Ôóíêöèÿ íå èìååò òî÷åê ïåðåãèáà

Рис. 26 Аналитический способ отделения корней в MathCAD

Çàäàíèå. ×èñëåííûì ìåòîäîì îòäåëèòü êîðíè è ïðîâåðèòü âûïîëíèìîñòü äâóõ òåîðåì íà êîíöàõ îòðåçêà.

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ $\quad$ Ìåòîäîì ïîäáîðà äîïóñòèìûõ çíà÷åíèé Î.Ä.Ç $\quad x := 0, 0.2 .. 1$

1. Êîðíè îòäåëèì ÷èñëåííûì ìåòîäîì. $\quad$ Äèàïàçîí îò 0,6 äî 0,8 èìååò ïåðåìåíó çíàêà ôóíêöèè

x =	f(x) =
0	1.2
0.2	0.819
0.4	0.47
0.6	0.149
0.8	-0.151
1	-0.432

$a := 0.6 \quad b := 0.8$

2. Ïðîâåðÿåì âûïîëíèìîñòü äâóõ òåîðåì

$f(a) = 0.149 \quad f(b) = -0.151$ $\quad$ Êîðåíü íà îòðåçêå ñóùåñòâóåò

$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \quad f1(a) = -1.549 \quad f1(b) = -1.449$ $\quad$ Ôóíêöèÿ ìîíîòîííà

$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) \quad f2(a) = 0.549 \quad f2(b) = 0.449$ $\quad$ Ôóíêöèÿ íå èìååò òî÷åê ïåðåãèáà

Рис. 27 Численное отделение корней в MathCAD

2.2. Уточнение решения в MathCAD с помощью встроенных функций

MathCADобладает очень богатыми возможностями для решения уравнений. Если какое-либо уравнение не удается сразу решить с помощью MathCADcad, это может объясняться тем, что:

- MathCAD не может справиться с трудностями, возникшими при решении уравнения, содержащего необратимые функции. Точно так же это может произойти с любым, кто попытался бы решать это уравнение "вручную";
- MathCAD не в состоянии найти область определения для уравнения, поскольку ему неизвестно, какое базовое множество вы имеете в виду. В таком случае можно воспользоваться возможностями MathCAD для решения уравнений и неравенств с тем, чтобы задать область определения.

Мы уже говорили, что множество решений уравнения вида $l(x)=r(x)$ совпадает с множеством нулей функции $f(x)=l(x)-r(x)$ и наоборот.

Знак равенства для уравнений (булевское равенство) вводится при помощи комбинации [Ctrl=] или соответствующей кнопки панели **Equation** (Вычисления).

MathCAD позволяет решать уравнения как символьно, так и численно.

2.2.1. Символьное решение уравнений

Перед тем как приступить к рассмотрению символьного решения уравнений, необходимо научиться различать разные типы уравнений (алгебраические уравнения, дробно-рациональные уравнения, экспоненциальные уравнения и т.д.), поскольку от типа уравнения зависит, какой метод следует применять для решения данного уравнения. Этот аспект не представляет особого интереса при решении уравнений с помощью MathCAD, поскольку само решение как таковое MathCAD берет на себя.

При использовании MathCAD для решения уравнений типизация важна по следующим причинам:

- Способность MathCAD решать те или иные уравнения зависит от типа уравнений (например, алгебраическое уравнение может быть решено символьно, если его порядок не превышает 4; тригонометрическое уравнение MathCAD решит скорее, чем уравнение аналогичной структуры с гиперболическими функциями и т.д.).
- Область определения уравнения зависит от типа уравнения (областью определения для экспоненциальных уравнений является вся числовая прямая, для логарифмических уравнений это, в общем случае, не так).
- Интерпретация возвращаемого MathCAD решения или сообщения также во многом зависит от типа уравнения. Например, сообщение "Решение не найдено" может для уравнений одного типа означать, что

решения не существует, а для другого — что MathCAD не в состоянии найти это решение.

Чтобы решить уравнение символьно, необходимо выделить курсором переменную, относительно которой должно быть решено уравнение (рис. 28). После этого следует выбрать команду **Solve** (Вычислить) из подменю **Variable** (Переменные) меню **Symbolics** (Символы), в результате на экране должно появиться либо решение уравнения, либо сообщение MathCAD, которое позволяет сделать вывод о неоднозначности решения. В некоторых случаях, если уравнение является слишком сложным, MathCAD может не справиться с поставленной задачей.

Второй метод символьного решения уравнений требует использования панели **Symbolic** (Символы). В ней вы найдете кнопку с ключевым словом *solve*. Теперь вы можете либо сначала ввести уравнение, а затем ключевое слово, либо сначала воспользоваться кнопкой с ключевым словом *solve,* а затем в первой ячейке ввести уравнение. Вторая ячейка должна содержать переменную, относительно которой решается уравнение. После щелчка на свободном участке документа на экран будет выведено решение уравнения.

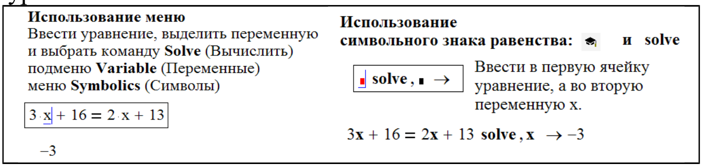


Рис. 28 Символьное решение уравнений

2.2.2. Символьное решение линейных уравнений

При решении линейных уравнений или дробных уравнений, которые сводятся к линейным, MathCAD находит все существующие решения. Однако при этом следует правильно интерпретировать сообщения, выдаваемые MathCAD.

В случае нормального решения MathCAD выдает число — это означает, что уравнение однозначно разрешимо.

Этапы решения:

- Ввести уравнение (знак "=" вводится при помощи комбинации [Ctrl=]).
- Выделить курсором переменную, относительно которой должно быть решено уравнение.
- Выбрать команду Solve (Вычислить) подменю Variable (Переменные) меню Symbolics (Символы).

Например:

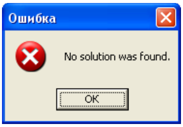
$$6x + 2 - (3 - x - 4 - (5 - x - (1 - x - 1) + 4) - (2 - x + 5)) = 2(x - 5) + 23$$

-3 — найденное MathCAD решение, таким образом, множество решений L={-3}

Если MathCAD выдает сообщение "Решение не найдено" — это означает, что множество решений является пустым. MathCAD выдаст такое сообщение, даже если уравнение имеет "формальное решение", которое не принадлежит области определения:

$$6\text{-}x + 2 - (3\text{-}x - 4 - (5\text{-}x - (7\text{-}x - 1) + 4) -(2\text{-}x + 5)) = 3\,(x - 5) +23$$

После выполнения описанных выше действий для нахождения решения MathCAD выдает сообщение:



Проанализировав данное уравнение, приходим к выводу, что выданное MathCAD сообщение означает, что решений нет L={}.

Используем команду Simplify, чтобы упростить выражение

$$6x+2-(3x-4-(5x-(7x-1)+4)-(2x+5)) = 3(x-5)+23$$

Выделив левую часть уравнения получим

$3\text{-}x + 16 = 3\,(x - 5) + 23$ Выделим правую часть уравнения и используем команду Simplify (Упростить) меню Symbolics получим

$$3\,x + 16 = 3\text{-}x + 8$$

Теперь мы видим, что ни одно значение x из базового множества не удовлетворяет данному уравнению: L={}.

Если в качестве решения MathCAD выдает имя переменной, это означает, что множество решений уравнения совпадает с областью определения. Однако такие понятия, как множество решений уравнения и область определения, отсутствуют в MathCAD.

Например, $6\,x + 2 - (3\text{-}x - 4 - (5\text{-}x - (7\text{-}x - 1) + 4) - (2\text{-}x + 5)) = 3\,(x - 5) +31$

x - такой результат, выданный MathCAD после выполнения действий по решению уравнения, означает, что любое значение x из базового множества удовлетворяет этому уравнению, т.е. L=R.

Анализ:

$6\text{-}x + 2 - (3\text{-}x - 4 - (5\text{-}x - (7\text{-}x - 1) + 4) - (2\text{-}x + 5)) = 3\,(x - 5) +3$

Преобразуем исходное уравнение, используя команду Simplify для обеих частей уравнений по очереди

$$3x + 16=3\,x + 16$$

Соотношение, выполняющееся для всех значений x: L=R.

2.2.3. Символьное решение алгебраических уравнений высших порядков

Действия, которые необходимо выполнить для решения алгебраического уравнения порядка больше двух, те же, что и при решении линейных уравнений.

Часто требуется разложить характеристическое уравнение на множители, при этом ряд корней будет представлен действительными значениями, а другой ряд - комплексными. Подобные задачи встречаются в теории автоматического управления, логистических исследованиях, при моделиронии сложных объектов.

При решении дробных уравнений, строго говоря, необходимо сначала найти область определения. При этом для решения вспомогательных уравнений можно воспользоваться возможностями MathCAD. В случае уравнений высших порядков, в том числе и с комплексными коэффициентами, MathCAD позволяет находить символьные решения для порядков не выше 4-го. Однако для уравнений 4-го порядка эти символьные решения очень громоздки. С задачей нахождения корней алгебраического уравнения тесно связана задача разложения полинома на множители в соответствии с теоремой Виета. Если MathCAD может справиться с символьным решением данного уравнения, на экране появляется сообщение, которое может содержать частные решения. Если же символьное решение получить не удается, остается прибегнуть к численным методам.

Рассмотрим пример определения условия касания окружности и прямой. Как правило, прямая либо пересекает окружность в двух точках, либо не пересекается с ней. Для того чтобы прямая касалась окружности, должно выполняться соотношение, связывающее параметры, которые описывают прямую и окружность. Это условие касания мы попытаемся определить и проверить на примере.

Представим себе прямую и окружность в декартовой системе координат (рис. 29). Уравнения, описывающие эти геометрические фигуры, имеют вид: прямая : $y=k \cdot x+d$; окружность: $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

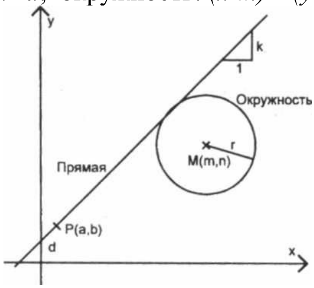


Рис.29 Взаимное расположение прямой и окружности – условие касания

Идея, которую мы хотим использовать, чтобы определить условие касания, очень проста. Мы пересекаем окружность прямой, т.е. подставляем значение ***y*** для прямой в уравнение окружности. Получившееся квадратное уравнение позволяет определить абсциссы точек пересечения прямой и окружности. Если мы теперь потребуем, чтобы дискриминант этого квадратного уравнения был равен нулю, мы получим условие касания прямой и окружности, поскольку в этом случае квадратное уравнение будет иметь только один корень. Условие, которое мы получили таким образом, имеет вид:

$$r^2(l+k^2)=(km-n+d)^2$$

Используя это условие и зная координаты точки касания, можно легко определить уравнение касательной, проходящей через эту точку. Для простоты рассмотрим конкретный пример. Определим точку касания прямой, проходящей через точку P(1;3), и окружности радиуса 3 с центром в точке (6;3). Прямая проходит через точку P, т.е. $k\cdot 1+d=3$. Выразим $d=3-k$. Условия касания примут вид $3^2(l+k^2)=(k-6+d-3)^2$. Подставим выражение для d и получим: $3^2(1+k^2)=(6k+3-k-3)^2$ или $9+9k^2=(5k)^2$ или $16k^2-9=0$

Для решения уравнения используем команду **Factor** из меню **Symbolics** (Символы) для разложения полинома на множители в соответствии с теоремой Виета: $(4\cdot k-3)\cdot(4\cdot k+3)=0$

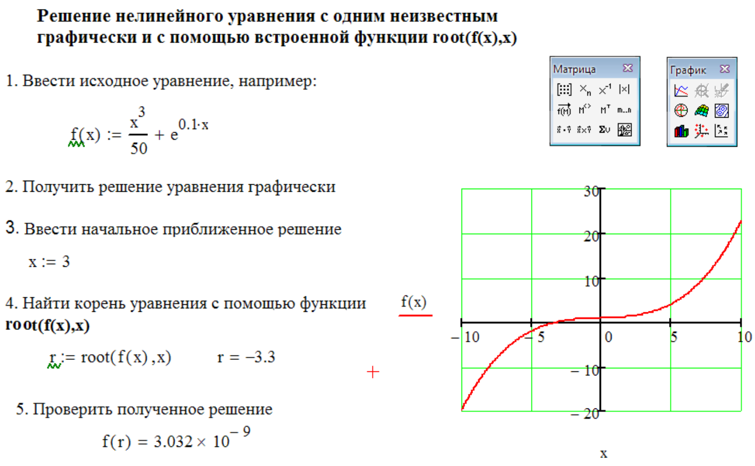
2.2.4. Функции root и polyroot

Для численного решения нелинейных уравнений с одним неизвестным, имеющим корень на заданном отрезке, можно использовать функции **root** и **polyroot**.

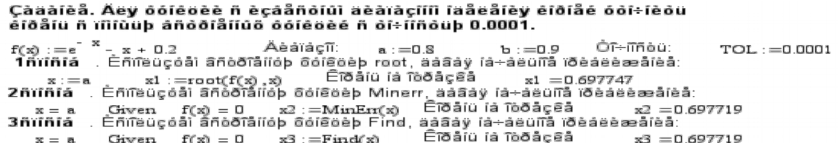
Функция **root(f(x),x)** находит корень уравнения с одним неизвестным. Возвращает значение x, при котором функция f(x) равна нулю. Использование функции root требует предварительного задания начального приближения. Если исследуемая функция имеет много корней, то найденный корень будет зависеть от начального приближения. Если оно расположено близко к локальному экстремуму функции f(x), то root может не найти корня, либо он будет далеко от начального приближения. Если уравнение с одной неизвестной выглядит следующим образом: f(x) - g(x), то его надо преобразовать так, чтобы получилось равенство с нулем в правой части:

f(x)-g(x) = 0.

На рис. 30 дано решение нелинейного уравнения с одним неизвестным графически и с использованием встроенной функции root(f(x),x).



а)



б)

Рис. 30 Нахождение корня нелинейного уравнения с одним неизвестным графически и с использованием встроенной функции root(f(x),x)

Рассмотрим теперь решение параметрического нелинейного уравнения с одним неизвестным, где используется встроенная функция **root.** Вначале уравнение f(x) = g(x,a) представляется в таком виде:

F(x,a) = f(x) - g(x,a).

А затем с помощью встроенной функции **root(F(x,a),x)** осуществляется решение. Для получения численных результатов решения нелинейного параметрического уравнения необходимо задать дискретные значения параметра **a** и начальное приближенное решение. На рис. 31 дано решение параметрического нелинейного уравнения с использованием встроенной функции **root.**

Рассмотрим теперь решение параметрического нелинейного уравнения с одним неизвестным **f(x) = g(x,a)** графическим способом. Для этого в одной системе координат построим графики **f(x)** и **g(x,a)** для конкретного значения параметра **a.** В нашем примере значения **a** приняты равными 1 и 10. На рис. 32 приведено решение параметрического нелинейного уравнения графическим способом.

Можно графически представить целое семейство решений параметрического нелинейного уравнения с одним неизвестным на одном графике с различными значениями параметра **а.** На рис. 33 дано решение такого уравнения при различных значениях параметра **а** графическим способом с различными диапазонами измениея независимой переменной-аргумента функции.

Численный способ решения нелинейного параметрического уравнения f(x)=g(x,a) с одним неизвестным посредством встроенной функции root(F(x),x)

1.Запись исходного параметрического нелинейного уравнения

$f(x) := e^{2\cdot x}$ $\quad g(x,a) := a\cdot x^2$ $\quad F(x,a) := f(x) - g(x,a)$ $\quad R(a,x) := \mathrm{root}(F(x,a),x)$

2.Определение дискретных значений параметра a, начального приближенного решения и решение уравнения для различных значений параметра a численным способом

$a := 1..5$ $\quad x_0 := -1$ $\quad x_a := R(a, x_{a-1})$

$a =$	$x_a =$	$f(x_a) =$	$g(x_a, a) =$	$F(x_a, a) =$
1	-0.567	0.322	0.322	$-1.775\cdot 10^{-12}$
2	-0.451	0.406	0.406	$-3.414\cdot 10^{-10}$
3	-0.391	0.458	0.458	$-2.046\cdot 10^{-11}$
4	-0.352	0.495	0.495	$-3.349\cdot 10^{-12}$
5	-0.324	0.524	0.524	$-8.457\cdot 10^{-13}$

Рис. 31 Решение параметрического нелинейного уравнения с использованием встроенной функции **root**

Графический способ решения нелинейного параметрического уравнения f(x)=g(x,a) с одним неизвестным путем построения графиков для левой и правой частей уравнения с заданным значением параметра a

$x := -1, -0.9 .. 1$

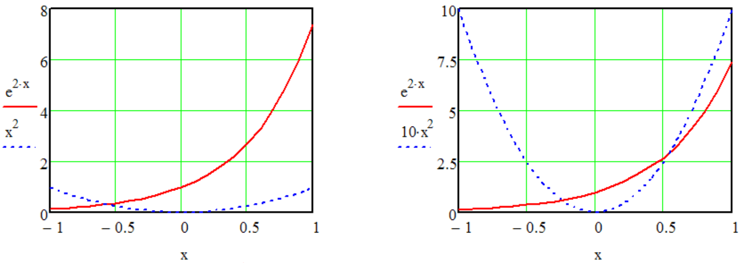


Рис. 32 Решение параметрического нелинейного уравнения

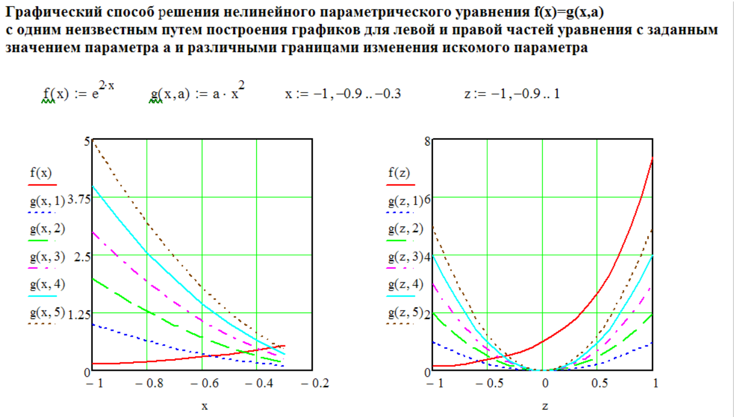


Рис. 33 Решение параметрического нелинейного уравнения

Функция **polyroots(v)** находит корни полинома и возвращает вектор, содержащий все его корни, коэффициенты которого находятся в векторе v. Предварительно коэффициенты полинома, записанного по возрастанию степени неизвестного, должны быть представлены в виде вектора. На рис. 34 приведен пример решения квадратного уравнения с помощью встроенной функции polyroots**.**

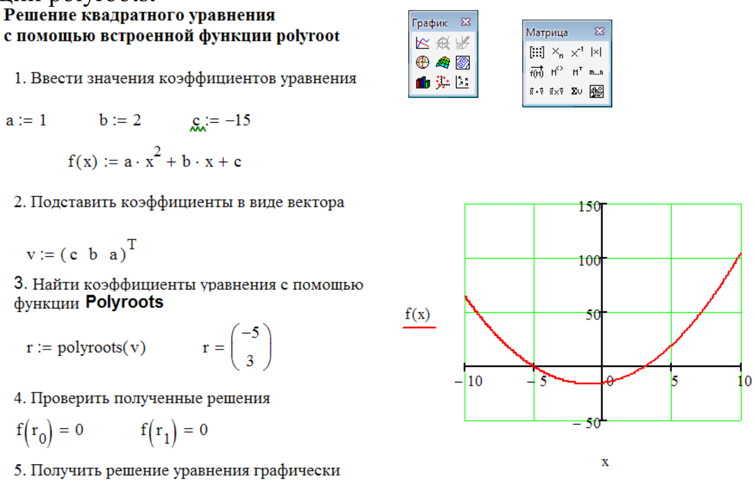


Рис. 34 Нахождение корней полинома с помощью функции polyroots(v)

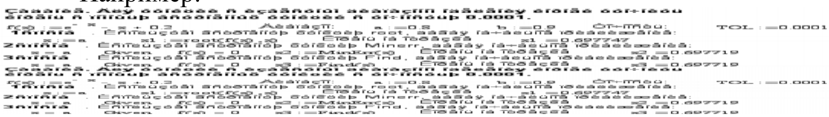
2.2.5. Функции определения корней нелинейных уравнений

Для определения корней нелинейных уравнений можно использовать функции **find** и **Minerr.**

find(x,y,...) - возвращает значения x, y, удовлетворяющие ограничениям: равенствам и неравенствам, которые определены в блоке решения уравнений. Число уравнений должно равняться числу неизвестных x, y,... Когда блок решения уравнений ищет одну неизвестную, функция Find возвращает скаляр. В остальных случаях она возвращает вектор, первым элементом которого является искомое значение x, вторым - y и т.д. Перед использованием этой функции необходимо задать начальное приближение для каждой неизвестной. Если система имеет несколько решений, то найденное решение определяется заданным начальным приближением.

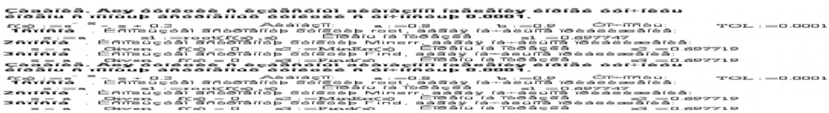
Рассмотрим теперь решение нелинейного уравнения с помощью блока встроенных функций Given - Find. Перед использованием этого блока необходимо сперва задать начальные приближения решения, пусть и далекое от оптимального. Затем с помощью функции Given надо ввести решаемое нелинейное уравнение и на заключительном этапе использовать функцию Find для его решения.

Например:



Minerr(x,y,...) - возвращает значения x и y, наиболее близкие к решению системы уравнений, x, y, есть скалярные переменные, значения которых ищутся в системе уравнений. Если ищется одна неизвестная, то функция **Minerr** возвращает скаляр. В остальных случаях она возвращает вектор, первым элементом которого является искомое значение неизвестной x, вторым - y и т.д. Перед использованием этой функции необходимо задать начальное приближение для каждой неизвестной и ключевое слово **Given.** Если система имеет несколько решений, то найденное решение определяется заданным начальным приближением.

Например:



2.3. Уточнение решения в MathCAD по итерационным формулам

Çàäàíèå:Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü îäèí èç êîðíåé ìåòîäîì ïðîñòûõ èòåðàöèé ñ òî÷íîñòüþ 0.0001.

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ Îòðåçîê $a := 0.6$ $b := 0.8$

Âûðàçèì x äëÿ ïðèìåíåíèÿ ìåòîäà èòåðàöèé $\varphi 1(x) := -\ln(x - 0.2)$

Ïðîâåðÿåì íà ñõîäèìîñòü $\frac{d}{da}\varphi 1(a) = -2.5$ $\frac{d}{db}\varphi 1(b) = -1.667$ Ñõîäèìîñòè íåò

Âûðàçèì ïî èíîìó $\varphi 2(x) := e^{-x} + 0.2$ $\frac{d}{da}\varphi 2(a) = -0.549$ $\frac{d}{db}\varphi 2(b) = -0.449$ Ïðîöåññ ñõîäèòñÿ

$i := 0..7$ $x_0 := \frac{a+b}{2}$ $x_{i+1} := \varphi 2(x_i)$

$i =$	$x_i =$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert =$	$f(x_i) =$
0	0.7	$3.415 \cdot 10^{-3}$	$-3.415 \cdot 10^{-3}$
1	0.6966	$1.699 \cdot 10^{-3}$	$1.699 \cdot 10^{-3}$
2	0.6983	$8.457 \cdot 10^{-4}$	$-8.457 \cdot 10^{-4}$
3	0.6974	$4.208 \cdot 10^{-4}$	$4.208 \cdot 10^{-4}$
4	0.6979	$2.095 \cdot 10^{-4}$	$-2.095 \cdot 10^{-4}$
5	0.6976	$1.043 \cdot 10^{-4}$	$1.043 \cdot 10^{-4}$
6	0.6978	$5.189 \cdot 10^{-5}$	$-5.189 \cdot 10^{-5}$
7	0.6977	$2.583 \cdot 10^{-5}$	$2.583 \cdot 10^{-5}$

Îòâåò: x=0.6977+-0.0001

Рис. 35 Метод простых итераций в MathCAD

Çàäàíèå. Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü êîðåíü ìåòîäîì êàñàòåëüíûõ ñ òî÷íîñòüþ 0.0001

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ $a := 0.6$ $b := 0.8$ Óòî÷íèì êîðåíü ìåòîäîì êàñàòåëüíûõ

Óñëîâèå ïîäâèæíîñòè ãðàíèö îòðåçêà $f(a) \cdot \frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.082$ $f(b) \cdot \frac{d^2}{db^2}f(b) = -0.068$

Ò.ê. sign(f(b)f''(b))=1 ñëåäîâàòåëüíî b-èçìåíÿåòñÿ, à-íåïîäâèæíî

$i := 0..2$ $x_0 := b$ $f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$ $x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f1(x_i)}$ $\varepsilon_i := \left| \frac{f(x_i)}{f1(x_i)} \right|$

$i =$	$x_i =$	$f(x_i) =$	$\varepsilon_i =$
0	0.8	-0.151	0.104
1	0.696	$2.514 \cdot 10^{-3}$	$1.678 \cdot 10^{-3}$
2	0.6977	$7.014 \cdot 10^{-7}$	$4.683 \cdot 10^{-7}$

Îòâåò: x=0.6977+- 0.0001

Рис. 36 Метод касательных в MathCAD

Çàäàíèå: Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü îäèí èç êîðíåé ìåòîäîì õîðä ñ òî÷íîñòüþ 0.0001.

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ $\quad a := 0.5 \quad b := 0.75$ $\quad$ Ìåòîä õîðä :

Óñëîâèå ïîäâèæíîñòè ãðàíèöû îòðåçêà $\quad f(a)\,\frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.186 \quad f(b)\,\frac{d^2}{db^2}f(b) = -0.037$

Ò.ê. çíàê ïðîèçâåäåíèÿ â òî÷êå b [f(b)*f2(b)]<0 ñëåäîâàòåëüíî b - ïîäâèæíàÿ òî÷êà, à-íåïîäâèæíàÿ òî÷êà

$i := 0..2 \quad x_0 := b \quad c := a \quad x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)\,(x_i - c)}{f(x_i) - f(c)}$

$i =$	$x_i =$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert =$	$f(x_i) =$
0	0.75	0.051	-0.078
1	0.6995	$1.7\cdot10^{-3}$	$-2.635\cdot10^{-3}$
2	0.6978	$5.768\cdot10^{-5}$	$-8.942\cdot10^{-5}$

Îòâåò: x=0.6978+-0.0001

Рис. 37 Метод хорд в MathCAD

Çàäàíèå: Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü îäèí èç êîðíåé ìåòîäîì ïîëîâèííîãî äåëåíèÿ ñ òî÷íîñòüþ 0.0001.

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ $\quad$ Äèàïàçîí $\quad a := 0.6 \quad b := 0.8$

.Ìåòîä ïîëîâèííîãî äåëåíèÿ : $\quad i := 0..10 \quad a_0 := a \quad b_0 := b$

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \text{if}\left(f(a_i)\, f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) > 0, \frac{a_i + b_i}{2}, a_i\right) \\ \text{if}\left(f(b_i)\, f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) > 0, \frac{a_i + b_i}{2}, b_i\right) \end{pmatrix}$$

Ïîãðåøíîñòü $\quad \varepsilon_i := \left|\frac{a_i - b_i}{2}\right|$

$i =$	$a_i =$	$b_i =$	$\varepsilon_i =$	$f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) =$
0	0.6	0.8	0.1	$-3.415\cdot10^{-3}$
1	0.6	0.7	0.05	0.072
2	0.65	0.7	0.025	0.034
3	0.675	0.7	0.013	0.015
4	0.6875	0.7	$6.25\cdot10^{-3}$	$5.949\cdot10^{-3}$
5	0.6938	0.7	$3.125\cdot10^{-3}$	$1.265\cdot10^{-3}$
6	0.6969	0.7	$1.563\cdot10^{-3}$	$-1.076\cdot10^{-3}$
7	0.6969	0.6984	$7.813\cdot10^{-4}$	$9.429\cdot10^{-5}$
8	0.6977	0.6984	$3.906\cdot10^{-4}$	$-4.907\cdot10^{-4}$
9	0.6977	0.698	$1.953\cdot10^{-4}$	$-1.982\cdot10^{-4}$
10	0.6977	0.6979	$9.766\cdot10^{-5}$	$-5.197\cdot10^{-5}$

Îòâåò: x=0.6977+-0.0001

Рис. 38 Метод половинного деления в MathCAD

Çàäàíèå. Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü êîðåíü ìåòîäîì Íüþòîíà-Ýéëåðà ñ òî÷íîñòüþ 0.0001

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ $\quad a := 0.6 \quad b := 0.8$ Óòî÷íèì êîðåíü ìåòîäîì êàñàòåëüíûõ

Óñëîâèå ïîäâèæíîñòè ãðàíèö îòðåçêà $\quad f(a)\cdot\frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.082 \quad f(b)\cdot\frac{d^2}{db^2}f(b) = -0.068$

Ò.ê. sign(f(b)f''(b))=1 ñëåäîâàòåëüíî b-èçìåíÿåòñÿ, à-íåïîäâèæíî

$i := 0..3 \quad x_0 := b \quad f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \quad x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f1(x_0)} \quad \varepsilon_i := \left|\frac{f(x_i)}{f1(x_0)}\right|$

$i =$	$x_i =$	$f(x_i) =$	$\varepsilon_i =$
0	0.8	-0.151	0.104
1	0.696	$2.514\cdot10^{-3}$	$1.735\cdot10^{-3}$
2	0.6978	$-8.465\cdot10^{-5}$	$5.841\cdot10^{-5}$
3	0.6977	$2.826\cdot10^{-6}$	$1.95\cdot10^{-6}$

Îòâåò: x=0.6977+- 0.0001

Рис. 39 Метод Ньютона-Эйлера в MathCAD

Çàäàíèå. Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü êîðåíü ìåòîäîì ñåêóùèõ ñ òî÷íîñòüþ 0.0001

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ $\quad a := 0.6 \quad b := 0.8$ Óòî÷íèì êîðåíü ìåòîäîì ñåêóùèõ

Óñëîâèå ïîäâèæíîñòè ãðàíèö îòðåçêà $\quad f(a)\cdot\frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.082 \quad f(b)\cdot\frac{d^2}{db^2}f(b) = -0.068$

Ò.ê. sign(f(b)f''(b))=1 ñëåäîâàòåëüíî x0=b x1=a

$i := 1..3 \quad x_0 := b \quad x_1 := a \quad x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \quad \varepsilon_i := x_{i+1} - x_i$

$i =$	$x_i =$	$f(x_i) =$	$\varepsilon_i =$
1	0.6	0.149	0.099
2	0.6994	$-2.485\cdot10^{-3}$	$-1.633\cdot10^{-3}$
3	0.6977	$-4.101\cdot10^{-5}$	$-2.739\cdot10^{-5}$

Îòâåò: x=0.6977+- 0.0001

Рис. 40 Метод секущих в MathCAD

Çàäàíèå. Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü êîðåíü êîìáèíèðîâàííûì ìåòîäîì õîðä è êàñàòåëüíûõ ñ òî÷íîñòüþ 0.0001

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2 \quad a := 0.6 \quad b := 0.8$ Óòî÷íèì êîðåíü êîìáèíèðîâàííûì ìåòîäîì

Óñëîâèå ïîäâèæíîñòè ãðàíèö îòðåçêà $\quad f(a)\cdot\frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.082 \quad f(b)\cdot\frac{d^2}{db^2}f(b) = -0.068$

Ò.ê. sign(f(b)f''(b))=1 ñëåäîâàòåëüíî à èçìåíÿåòñÿ ïî ìåòîäó êàñàòåëüíûõ, à b-ïî ìåòîäó õîðä

$i := 0..2 \quad a_0 := a \quad b_0 := b \quad f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_i - \frac{f(a_i)}{f1(a_i)} \\ b_i - \frac{f(b_i)(a_i - b_i)}{f(a_i) - f(b_i)} \end{pmatrix} \qquad x_i := \frac{b_i + a_i}{2}$$

$i =$	$x_i =$	$f(x_i) =$	$\frac{a_i - b_i}{2} =$
0	0.7	$-3.415\cdot10^{-3}$	-0.1
1	0.6977	$-1.639\cdot10^{-5}$	$-1.649\cdot10^{-3}$
2	0.6977	$-4.278\cdot10^{-9}$	$-4.489\cdot10^{-7}$

Îòâåò: x=0.6977+- 0.0001

Рис. 41 Комбинированный метод хорд и касательных в MathCAD

Çàäàíèå:Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü îäèí èç êîðíåé ìåòîäîì Âåêñòåéíà ñ òî÷íîñòüþ 0.0001.

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ Îòðåçîê $a := 0.6$ $b := 0.8$

Âûðàçèì x äëÿ ïðèìåíåíèÿ ìåòîäà èòåðàöèè $\varphi 1(x) := -\ln(x - 0.2)$

Ïðîâåðÿåì íà ñõîäèìîñòü $\frac{d}{da}\varphi 1(a) = -2.5$ $\frac{d}{db}\varphi 1(b) = -1.667$ Ñõîäèìîñòè íåò

Âûðàçèì ïî èíîìó $\varphi 2(x) := e^{-x} + 0.2$ $\frac{d}{da}\varphi 2(a) = -0.549$ $\frac{d}{db}\varphi 2(b) = -0.449$ Ïðîöåññ ñõîäèòñÿ

$i := 1..2$ $x_0 := \frac{a+b}{2}$ $x_1 := \varphi 2(x_0)$ $x_{i+1} := \frac{\varphi 2(x_i)\, x_{i-1} - (x_i)^2}{x_{i-1} - 2 x_i + \varphi 2(x_i)}$

Îòâåò: x=0.6977+-0.0001

$i =$	$x_i =$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert =$	$f(x_i) =$
1	0.6966	$1.134 \cdot 10^{-3}$	$1.699 \cdot 10^{-3}$
2	0.6977	$6.431 \cdot 10^{-7}$	$-6.435 \cdot 10^{-7}$

Рис.42 Метод Векстейна в MathCAD

Çàäàíèå: Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü îäèí èç êîðíåé ìåòîäîì çîëîòîãî ñå÷åíèÿ ñ òî÷íîñòüþ 0.0001.

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ Äèàïàçîí $a := 0.6$ $b := 0.8$

$i := 0..7$ $a_0 := a$ $b_0 := b$ Ìåòîä çîëîòîãî ñå÷åíèÿ :

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \text{if}\left(f(a_i)\cdot f\left(\frac{2a_i + b_i}{3}\right) < 0, a_i, \text{if}\left(f\left(\frac{2a_i + b_i}{3}\right)\cdot f\left(\frac{a_i + 2b_i}{3}\right) < 0, \frac{2a_i + b_i}{3}, \frac{a_i + 2b_i}{3}\right)\right) \\ \text{if}\left(f(a_i)\cdot f\left(\frac{2a_i + b_i}{3}\right) < 0, \frac{2a_i + b_i}{3}, \text{if}\left(f\left(\frac{2a_i + b_i}{3}\right)\cdot f\left(\frac{a_i + 2b_i}{3}\right) < 0, \frac{a_i + 2b_i}{3}, b_i\right)\right) \end{pmatrix}$$

Ïîãðåøíîñòü $\varepsilon_i := \left|\frac{b_i - a_i}{2}\right|$

$i =$	$a_i =$	$b_i =$	$\varepsilon_i =$	$f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) =$
0	0.6	0.8	0.1	$-3.415 \cdot 10^{-3}$
1	0.6667	0.7333	0.033	$-3.415 \cdot 10^{-3}$
2	0.6889	0.7111	0.011	$-3.415 \cdot 10^{-3}$
3	0.6963	0.7037	$3.704 \cdot 10^{-3}$	$-3.415 \cdot 10^{-3}$
4	0.6963	0.6988	$1.235 \cdot 10^{-3}$	$2.821 \cdot 10^{-4}$
5	0.6971	0.6979	$4.115 \cdot 10^{-4}$	$2.821 \cdot 10^{-4}$
6	0.6977	0.6979	$1.372 \cdot 10^{-4}$	$-1.288 \cdot 10^{-4}$
7	0.6977	0.6978	$4.572 \cdot 10^{-5}$	$8.151 \cdot 10^{-6}$

Îòâåò:
x=0.6977+-0.0001

Рис. 43 Метод золотого сечения в MathCAD

2.4. Уточнение решения в MathCAD с использованием режима программирования

Метод простых итераций

Çàäàíèå:Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü îäèí èç êîðíåé ñ èñïîëüçîâàíèåì ïðîãðàììèðîâàíèÿ ìåòîäîì ïðîñòûõ èòåðàöèé ñ òî÷íîñòüþ 0.0001.

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ Îòðåçîê $a := 0.6$ $b := 0.8$

Âûðàçèì x äëÿ ïðèìåíåíèÿ ìåòîäà èòåðàöèé $\varphi1(x) := -\ln(x - 0.2)$

Ïðîâåðÿåì íà ñõîäèìîñòü $\frac{d}{da}\varphi1(a) = -2.5$ $\frac{d}{db}\varphi1(b) = -1.667$ Ñõîäèìîñòè íåò

Âûðàçèì ïî èíîìó $\varphi2(x) := e^{-x} + 0.2$ $\frac{d}{da}\varphi2(a) = -0.549$ $\frac{d}{db}\varphi2(b) = -0.449$ Ïðîöåññ ñõîäèòñÿ

$$x1 := \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow \frac{a+b}{2} \\ i \leftarrow 0 \\ \text{while } \left|f(x_i)\right| > 0.0001 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow \varphi2(x_i) \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ x_i \end{array} \right.$$

$x1 = 0.69775$ **Îòâåò: x=0.6977+-0.0001**

Рис. 44 Метод простых итераций в MathCAD с программированием

Çàäàíèå: Äëÿ íåëèíåéíîãî óðàâíåíèÿ íà îòðåçêå [a;b] óòî÷íèòü îäèí èç êîðíåé ñ èñïîëüçîâàíèåì ïðîãðàììèðîâàíèÿ ìåòîäîì 1) õîðä 2) êàñàòåëüíûõ ñ òî÷íîñòüþ 0.0001.

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2$ $a := 0.5$ $b := 0.75$

Óñëîâèå ïîäâèæíîñòè ãðàíèö îòðåçêà $f(a)\,\frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.18592$ $f(b)\,\frac{d^2}{db^2}f(b) = -0.03667$

Ò.ê. çíàê ïðîèçâåäåíèÿ â òî÷êå à [f(à)*f2(à)]>0 ñëåäîâàòåëüíî a - ïîäâèæíàÿ òî÷êà â ìåòîäå êàñàòåëüíûõ, b-ïîäâèæíàÿ òî÷êà â ìåòîäå õîðä

Ìåòîä õîðä :   Ìåòîä êàñàòåëüíûõ : $f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$

$$x1 := \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow b \\ i \leftarrow 0 \\ \text{while } \left|f(x_i)\right| > 0.0001 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i - \frac{f(x_i)\,(x_i - a)}{f(x_i) - a} \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ x_i \end{array} \right. \qquad x2 := \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow a \\ i \leftarrow 0 \\ \text{while } \left|f(x_i)\right| > 0.0001 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i - \frac{f(x_i)}{f1(x_i)} \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ x_i \end{array} \right.$$

$x1 = 0.6978$ $x2 = 0.6977$ **Îòâåò: x=0.6977+-0.0001**

Рис. 45 Метод хорд, касательных в MathCAD с программированием

3. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В СРЕДЕ EXCEL

Этапы решения нелинейного уравнения с использованием табличного процессора Excel те же: 1. Отделение корней одним из методов; 2. Уточнение корней нелинейного уравнения одним из методов.

Выборочно проиллюстрируем особенности решения несколькими методами в среде Excel на примере решения нелинейного уравнения с одним неизвестным $e^{-x} - x + 0.2 = 0$.

Для метода хорд (рис. 46):

1. Численно отделяем корни по перемене знака функции и выделяем отрезок уточнения корня [0,6;0,7](выделено контрастным цветом).
2. Проверяем функцию на монотонность, т.е. проверяем постоянство знака первой производной (вычисление производной заменено разностным уравнением $[f(x_{i+1})-f(x_i)]/[x_{i+1}-x_i]$). На отрезке [0,6;0,7] знак постоянный (-1,5771;-1,5222).
3. Проверяем функцию на отсутствие точек перегиба, т.е. проверяем постоянство знака второй производной (вычисление второй производной заменено разностным уравнением $[f'(x_{i+1})-f'(x_i)]/[x_{i+1}-x_i]$). Знак второй производной постоянный (0,6070;0,5492).
4. Проверяем условие подвижности конца отрезка существования корня для метода хорд (15): подвижным будет конец, где знак функции и второй производной разные (на рис. 46 Выделен подвижный конец x=0,7).
5. Принимаем начальное приближение для итерационного процесса в соответствии с условием (20) x=0,7.

Табуляция	Значение функции	Производная (разностное уравнение)	Вторая производная (разностное уравнение)	Итерация	Корень (метод хорд)	Значение функции
0	1,2			0	0,7	-0,003414696
0,1	1,004837	-1,95162582		1	0,697757	-5,63499E-05
0,2	0,818731	-1,86106665	0,905591701	2	0,69772	-9,29892E-07
0,3	0,640818	-1,779125324	0,819413256	3	0,697719	-1,53452E-08
0,4	0,47032	-1,704981746	0,741435775			
0,5	0,306531	-1,637893863	0,670878832			
0,6	0,148812	-1,577190236	0,60703627			
0,7	-0,003415	-1,522263323	0,549269132	подвижный		
0,8	-0,150671	-1,472563397	0,496999263			
0,9	-0,29343	-1,427593044	0,44970353			
1	-0,432121	-1,386902186	0,406908581			

Рис. 46 Метод хорд в Excel

Последующий итерационный процесс выполняется по формуле (19) метода хорд (рис. 46). Выводим столько итераций и значений функций, сколько необходимо для достижения требуемой точности (принятая точность ε=0.0001) в соответствии с условиями (5), (6).

Рассмотрим другой метод решения нелинейного уравнения с одним неизвестным $e^{-x} - x + 0.2 = 0$ в среде Excel – метод простых итераций (рис. 40.). Здесь добавляется условие проверки итерационной формулы на сходимость по формулам (7) и (8). На выделенном отрезке уточнения корня итерационный процесс сходится (рис. 47).

Табуляция	Значение функции	Итерационная формула	Производная от итерационной формулы (разностное уравнение)	Вывод о сходимости итерационного процесса	Итерация	Корень (метод простых итераций)	Погрешность
0	1,2	1,2			0	0,65	
0,1	1,004837	1,104837418	-0,95162582		1	0,722045777	0,072046
0,2	0,818731	1,018730753	-0,86106665		2	0,685757487	-0,03629
0,3	0,640818	0,940818221	-0,779125324		3	0,703708532	0,017951
0,4	0,47032	0,870320046	-0,704981746		4	0,694747112	-0,00896
0,5	0,306531	0,80653066	-0,637893863		5	0,699200674	0,004454
0,6	0,148812	0,748811636	-0,577190236	сходится	6	0,696982396	-0,00222
0,7	-0,00341	0,696585304	-0,522263323	сходится	7	0,698086065	0,001104
0,8	-0,15067	0,649328964	-0,472563397		8	0,697536646	-0,00055
0,9	-0,29343	0,60656966	-0,427593044		9	0,697810077	0,000273
1	-0,43212	-1,386902186	-19,93471845		10	0,697673979	-0,00014
					11	0,697741716	6,77E-05

Рис. 47 Метод простых итераций в Excel

Далее проводится итерационный процесс по методу простых итераций (4), который прекращается при достижении заданной точности 0.0001.

Рассмотрим другой метод решения нелинейного уравнения с одним неизвестным $e^{-x} - x + 0.2 = 0$ в среде Excel – метод секущих (рис. 48).

Табуляция	Значение функции	Производная (разностное уравнение)	Вторая производная (разностное уравнение)	Итерация	Корень (метод секущих)	Значение функции
0	1,2			0	0,6	0,148811636
0,1	1,004837	-1,95162582		1	0,7	-0,003414696
0,2	0,818731	-1,86106665	0,905591701	2	0,697757	-5,63499E-05
0,3	0,640818	-1,779125324	0,819413256			
0,4	0,47032	-1,704981746	0,741435775			
0,5	0,306531	-1,637893863	0,670878832			
0,6	0,148812	-1,577190236	0,60703627	x0		
0,7	-0,003415	-1,522263323	0,549269132	x1		
0,8	-0,150671	-1,472563397	0,496999263			
0,9	-0,29343	-1,427593044	0,44970353			
1	-0,432121	-1,386902186	0,406908581			

Рис. 48 Метод секущих в Excel

В этом примере помимо проверки истинности теорем I и II делается вывод о том, какой конец отрезка будет взят за начальное приближение x_0

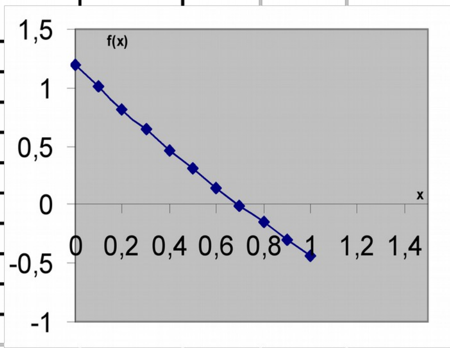
аналогично методу касательных условие (15). Кроме того, в методе секущих в итерационном процессе поиска корня изменяются оба конца отрезка и на начальном этапе необходимо знать две начальные точки x_0 и x_1 уточнения корня, за которые принимаются концы отрезка.

Итерационный процесс осуществляется по формуле (24).

Метод секущих характеризуется более быстрой сходимостью к корню, чем некомбинированные методы (рис. 48).

Рассмотрим метод половинного деления в среде Excel для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным $e^{-x} - x + 0.2 = 0$ (рис. 49). Напомним, что для единственного метода половинного деления необязательно выполнение теорем I и II.

Табуляция	Значение функции
0	1,2
0,1	1,004837
0,2	0,818731
0,3	0,640818
0,4	0,47032
0,5	0,306531
0,6	0,148812
0,7	-0,003415
0,8	-0,150671
0,9	-0,29343
1	-0,432121



Итерация	a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)
0	0,6	0,7	0,65	0,1488	-0,0034	0,072045777
1	0,65	0,7	0,675	0,072	-0,0034	0,034156421
2	0,675	0,7	0,6875	0,0342	-0,0034	0,015331578
3	0,6875	0,7	0,69375	0,0153	-0,0034	0,005948681
4	0,69375	0,7	0,696875	0,0059	-0,0034	0,00126456
5	0,696875	0,7	0,698438	0,0013	-0,0034	-0,001075675
6	0,696875	0,69844	0,697656	0,0013	-0,0011	9,42906E-05
7	0,697656	0,69844	0,698047	9E-05	-0,0011	-0,00049073
8	0,697656	0,69805	0,697852	9E-05	-0,0005	-0,000198229
9	0,697656	0,69785	0,697754	9E-05	-0,0002	-5,19718E-05
10	0,697656	0,69775	0,697705	9E-05	-5E-05	2,11588E-05

Рис. 49 Метод половинного деления в Excel

Отделив корень уравнения численным и графическим методами (рис. 49) приступаем к формуле метода (21), используя логическую функцию Excel «ЕСЛИ». Окончание итерационного процесса по той же формуле (20).

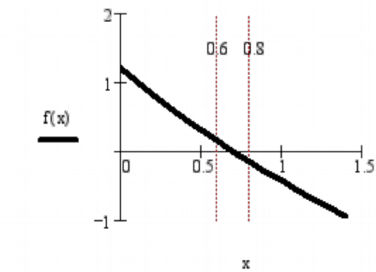
4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Решить нелинейное уравнение f(x)=0 с погрешностью $\varepsilon_x=\varepsilon_y=0.0001$. Выполнить вычисления с использованием формул методов и встроенных функций. Ответ записать в виде: ***x=число ± абсолютная погрешность.***

№	f(x)=0	Метод отделения корня	Методы уточнения корня
41	$e^{-x}-x+0.2=0$	графический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих

Решение

$f(x) := e^{-x} - x + 0.2 \qquad x := 0, 0.1 .. 1.4$



1.Îòäåëÿåì êîðíè ãðàôè÷åñêè.

Ôóíêöèÿ èìååò îäèí êîðåíü. Ýòîò êîðåíü ëåæèò â ïðåäåëàõ îòðåçêà (ìåòêè íà ãðàôèêå):

$a := 0.6 \qquad b := 0.8$

2. Äëÿ ôóíêöèè ïðîâåðÿåì âûïîëíèìîñòü äâóõ òåîðåì

$f(a) = 0.149 \qquad f(b) = -0.151$ Êîðåíü íà îòðåçêå ñóùåñòâóåò

$\frac{d}{da}f(a) = -1.549 \qquad \frac{d}{db}f(b) = -1.449$ Ôóíêöèÿ ìîíîòîííà

$\frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.549 \qquad \frac{d^2}{db^2}f(b) = 0.449$ Ôóíêöèÿ íå èìååò òî÷åê ïåðåãèáà

3. Óòî÷íèì êîðåíü ñ è ñïîëüçîâàíèåì âñòðîåííîé ôóíêöèè root, äàäèì íà÷àëüíîå ïðèáëèæåíèå:

Òî÷íîñòü: $TOL := 0.0001 \qquad x := a \qquad x1 := root(f(x), x)$ Êîðåíü íà îòðåçêå $x1 = 0.6977$

4. Ìåòîä èòåðàöèè

Âûðàçèì x äëÿ ïðèìåíåíèÿ ìåòîäà èòåðàöèè $\qquad \varphi1(x) := -\ln(x - 0.2)$

Ïðîâåðÿåì íà ñõîäèìîñòü $\qquad \frac{d}{da}\varphi1(a) = -2.5 \qquad \frac{d}{db}\varphi1(b) = -1.667$ Ñõîäèìîñòè íåò

Âûðàçèì ïî èíîìó $\qquad \varphi2(x) := e^{-x} + 0.2 \qquad \frac{d}{da}\varphi2(a) = -0.549 \qquad \frac{d}{db}\varphi2(b) = -0.449$ Ïðîöåññ ñõîäèòñÿ

$i := 0..7 \qquad x_0 := \frac{a+b}{2} \qquad x_{i+1} := \varphi2(x_i)$

i =	x_i =	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$ =	$f(x_i)$ =
0	0.7	$3.415\cdot10^{-3}$	$-3.415\cdot10^{-3}$
1	0.6966	$1.699\cdot10^{-3}$	$1.699\cdot10^{-3}$
2	0.6983	$8.457\cdot10^{-4}$	$-8.457\cdot10^{-4}$
3	0.6974	$4.208\cdot10^{-4}$	$4.208\cdot10^{-4}$
4	0.6979	$2.095\cdot10^{-4}$	$-2.095\cdot10^{-4}$
5	0.6976	$1.043\cdot10^{-4}$	$1.043\cdot10^{-4}$
6	0.6978	$5.189\cdot10^{-5}$	$-5.189\cdot10^{-5}$
7	0.6977	$2.583\cdot10^{-5}$	$2.583\cdot10^{-5}$

Îòâåò: x=0.6977+-0.0001

5. Ìåòîä êàñàòåëüíûõ

Óñëîâèå ïîäâèæíîñòè ãðàíèö îòðåçêà $f(a)\cdot\frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.082$ $\quad f(b)\cdot\frac{d^2}{db^2}f(b) = -0.068$

Ò.ê. sign(f(b)f''(b))=1 ñëåäîâàòåëüíî b-èçìåíÿåòñÿ, à-íåïîäâèæíî

$i := 0..2 \quad x_0 := b \quad f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \quad x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f1(x_i)} \qquad \varepsilon_i := \left|\frac{f(x_i)}{f1(x_i)}\right|$

$i =$	$x_i =$	$f(x_i) =$	$\varepsilon_i =$
0	0.8	-0.151	0.104
1	0.696	$2.514\cdot10^{-3}$	$1.678\cdot10^{-3}$
2	0.6977	$7.014\cdot10^{-7}$	$4.683\cdot10^{-7}$

Îòâåò: x=0.6977+- 0.0001

6. Ìåòîä Íüþòîíà-Ýéëåðà

Óñëîâèå ïîäâèæíîñòè ãðàíèö îòðåçêà $f(a)\cdot\frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.082$ $\quad f(b)\cdot\frac{d^2}{db^2}f(b) = -0.068$

Ò.ê. sign(f(b)f''(b))=1 ñëåäîâàòåëüíî b-èçìåíÿåòñÿ, à-íåïîäâèæíî

$i := 0..3 \quad x_0 := b \quad f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \quad x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f1(x_0)} \qquad \varepsilon_i := \left|\frac{f(x_i)}{f1(x_0)}\right|$

$i =$	$x_i =$	$f(x_i) =$	$\varepsilon_i =$
0	0.8	-0.151	0.104
1	0.696	$2.514\cdot10^{-3}$	$1.735\cdot10^{-3}$
2	0.6978	$-8.465\cdot10^{-5}$	$5.841\cdot10^{-5}$
3	0.6977	$2.826\cdot10^{-6}$	$1.95\cdot10^{-6}$

Îòâåò: x=0.6977+- 0.0001

7. Ìåòîä ñåêóùèõ

Óñëîâèå ïîäâèæíîñòè ãðàíèö îòðåçêà $f(a)\cdot\frac{d^2}{da^2}f(a) = 0.082$ $\quad f(b)\cdot\frac{d^2}{db^2}f(b) = -0.068$

Ò.ê. sign(f(b)f''(b))=1 ñëåäîâàòåëüíî x0=b x1=a

$i := 1..3 \quad x_0 := b \quad x_1 := a \qquad x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \qquad \varepsilon_i := x_{i+1} - x_i$

$i =$	$x_i =$	$f(x_i) =$	$\varepsilon_i =$
1	0.6	0.149	0.099
2	0.6994	$-2.485\cdot10^{-3}$	$-1.633\cdot10^{-3}$
3	0.6977	$-4.101\cdot10^{-5}$	$-2.739\cdot10^{-5}$

Îòâåò: x=0.6977+- 0.0001

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Решить нелинейное уравнение f(x)=0 с погрешностью $\varepsilon_x=\varepsilon_y=0.0001$. Выполнить вычисления с использованием формул методов и встроенных функций. Ответ записать в виде: ***x=число*** $\pm$ ***абсолютная погрешность.***

Таблица 2. Варианты индивидуальных заданий

№	f(x)=0	Метод отделения корня	Методы уточнения корня
1	$\ln x + 0{,}55x = 0$	графический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
2	$e^{-x} - x^3 + 0{,}3 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, комб. хорд и касательных, Векстейна
3	$1{,}5\ln x - 1/x = 0$	численный	Итераций, пол. деления, секущих, Векстейна
4	$e^{-x} - x^3 - 0{,}1 = 0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
5	$\sin x + x^3 - 1{,}3 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, секущих
6	$\cos x - x^3 - 0{,}28 = 0$	численный	Итераций, хорд, комб. хорд и касательных, Векстейна
7	$e^x + x^2 + x - 3{,}5 = 0$	графический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
8	$e^{-x} - (x-2)^2 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, золотого сечения, Векстейна
9	$e^{-x} + x^2 - 1{,}5 = 0$	численный	Итераций, пол. деления, Ньютона-Эйлера, Векстейна
10	$e^x + x^2 - 2{,}5 = 0$	графический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
11	$e^x + x^3 - 2 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, комб. хорд и касательных, Векстейна
12	$e^x + x^3 + x^2 - 3{,}1 = 0$	численный	Итераций, пол. деления, Ньютона-Эйлера, секущих
13	$e^{-x} + x^2 + x - 2{,}1 = 0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
14	$e^{-x} - x^3 - 0{,}5 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, Векстейна
15	$\cos x - x^3 - 0{,}6 = 0$	численный	Итераций пол. деления, Ньютона-Эйлера, секущих
16	$e^x - 3(x-1)^2 = 0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
17	$1{,}2\lg x - 1/x^2 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, Векстейна
18	$2e^{-x} - x^2 = 0$	численный	Итераций, пол. деления, комб. хорд и касат., Векстейна

19	$e^{-2x} - x^2 = 0$	графический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
20	$\cos x - x^3 - 0{,}2 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, Векстейна
21	$\ln x + 0{,}517x = 0$	численный	Итераций, пол. деления, Векстейна, секущих
22	$\lg x + 0{,}26x - 0{,}51 =$	графический	Итераций, хорд, золотого сечения, Ньютона-Эйлера
23	$\sin x + x^3 - 0{,}3 = 0$	аналитический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
24	$1{,}6\ln x + 0{,}6x = 0$	численный	Итераций, пол. деления, Векстейна, секущих
25	$e^x + x^3 + x^2 - 3{,}5 = 0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, секущих
26	$e^{-x} - x^3 - 0{,}13 = 0$	аналитический	Итераций, хорд, золотого сечения, Векстейна
27	$x - 3\cos^2(1{,}04x) =$	численный	Итераций, пол. деления, Векстейна, секущих
28	$e^{-x} - 2x + 0{,}5 = 0$	графический	Итераций, хорд, комб. хорд и касательных, Векстейна
29	$\cos x - x + 0{,}2 = 0$	аналитический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
30	$e^{-x} - 3{,}5x + 0{,}13 = 0$	численный	Итераций, хорд, золотого сечения, Векстейна
31	$\sin x - x + 0{,}4 = 0$	графический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, Векстейна
32	$\ln x - x/2 + 2 = 0$	аналитический	Итераций, касательных, Ньютона-Эйлера, секущих
33	$2 \cdot arctg(x) - 3x + 1 =$	численный	Итераций пол. деления, Ньютона-Эйлера, секущих
34	$\arcsin(x) - 2x + 0.5$	графический	Итераций, пол. деления, комб. хорд и касат., Векстейна
35	$e^{-2x} - 3x + 0.01 = 0$	аналитический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
36	$e^x + x^3 + x^2 + x - 4 = 0$	численный	Итераций, хорд, золотого сечения, Векстейна
37	$\ln x + 0{,}5x + 0.2 = 0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна
38	$3 \cdot arctg(x/2) - 4x +$	аналитический	Итераций, хорд, Ньютона-Эйлера, Векстейна
39	$\arcsin(x) - x/2 - 0.$	численный	Итераций, пол. деления, Векстейна, секущих
40	$e^{-4x} - 4x + 4 = 0$	графический	Итераций, касательных, золотого сечения, Векстейна

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Приближенное решение нелинейных уравнений с одним неизвестным. Постановка задачи. Этапы решения. Способы отделения корней.
2. Условия применимости (сходимости) методов решение нелинейных уравнений с одним неизвестным.
3. Уточнение корней нелинейных уравнений с одним неизвестным методом половинного деления. Расчетные формулы, алгоритм, графическая интерпретация.
4. Уточнение корней нелинейных уравнений с одним неизвестным методом итераций. Расчетные формулы, алгоритм, графическая интерпретация.
5. Уточнение корней нелинейных уравнений с одним неизвестным универсальным методом итераций. Расчетные формулы, алгоритм.
6. Вывод уравнения метода касательных для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
7. Алгоритм решения нелинейных уравнений с одним неизвестным методом касательных.
8. Достоинства и недостатки метода касательных для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
9. Модификации метода касательных для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
10. Сущность и графическая интерпретация метода хорд для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
11. Вывод уравнения метода хорд для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
12. Алгоритм решения нелинейных уравнений с одним неизвестным методом хорд.
13. Достоинства и недостатки метода хорд для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
14. Сущность и графическая интерпретация комбинированного метода хорд и касательных для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
15. Алгоритм решения нелинейных уравнений с одним неизвестным комбинированным методом хорд и касательных.
16. Достоинства и недостатки комбинированного метода для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
17. Сущность и графическая интерпретация метода Векстейна для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
18. Вывод уравнения метода Векстейна для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
19. Алгоритм решения нелинейных уравнений с одним неизвестным методом Векстейна. Достоинства и недостатки метода.
20. Алгоритм решения нелинейных уравнений методом золотого сечения. Достоинства и недостатки метода.

7. УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ

Библиографический список

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970., 664 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. М. -: Наука, 1975. 443с.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов: Учеб. Пособие.-М.: Наука, 1987.-320с.
4. Воробьёва Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам.-М.: Высш.шк., 1979.-420с.
5. Курс лекций по вычислительной математике. Ч.2. /Емельянов В.И., Лёвшин В.Г., Артамонова Л.А.-Новомосковск: НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева. 1986.-100 с.
6. Курс лекций по вычислительной математике. Ч.I. Филатов В.П., Тюрин А.П., Мочалин В.П. НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева, Новомосковск, 1980. 110с.
7. Филатов В.П., Тюрин А.П. Методические указания и контрольные задания по курсу «Вычислительная математика». Учеб. Пособие. НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева, Новомосковск, 1982. 118с.

Учебное издание

**РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ**

Методические указания

Составители:
Артамонова Лидия Анатольевна,
Мочалин Владимир Петрович,
Тивиков Алексей Сергеевич,
Гербер Юлия Валерьевна

Редактор Пряхина Н.А.
Компьютерная вёрстка Тивиков А.С., Гербер Ю.В.

Подписано в печать 28.12.2000. Формат 60x84 1/16.
Бумага типографская №2. Отпечатано на ризографе.
Усл. печ. л. 1,80. Уч.-изд. л. 0,98.
Тираж 100 экз. Заказ 172.

ГОУ ВПО «Российский химико-технологический университет
им. Д.И Менделеева»
Новомосковский институт(филиал). Издательский центр
Адрес университета: 125047 Москва, Миусская пл., 9
Адрес института: 301670 Новомосковск, Тульская обл., ул. Дружбы, 8