

### 1. (умножение вектора на число)

В треугольнике  $ABC$  со сторонами  $BC = a$ ,  $AC = b$ , и  $AB = c$  точка  $O$  является центром вписанной окружности. Докажите, что  $a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .

### 2. (радиус-вектор точки)

Доказать: для того, чтобы три точки  $A(\vec{r}_1)$ ,  $B(\vec{r}_2)$ ,  $C(\vec{r}_3)$  лежали на одной прямой, необходимо и достаточно существование трех чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , не равных одновременно нулю и таких, что  $\alpha_1 \vec{r}_1 + \alpha_2 \vec{r}_2 + \alpha_3 \vec{r}_3 = \vec{0}$  и  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ .

### 3. (параллельность отрезков прямым и плоскостям)

В тетраэдре  $SABC$  точки  $M$  и  $N$  являются серединами ребер  $SA$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что прямые  $AC$ ,  $MN$ ,  $SB$  параллельны одной плоскости.

### 4. (принадлежность точек одной плоскости)

Докажите, что если в пространственном шестиугольнике  $ABCDEF$  (точки  $A, B, C, D, E, F$  не лежат в одной плоскости) противоположные стороны попарно параллельны, то середины его сторон лежат в одной плоскости.

### 5. (скалярное произведение векторов и его свойства)

Выразите вектор  $\overrightarrow{BH}$ , совпадающий с высотой треугольника  $ABC$ , через векторы  $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$  и  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ .

### 6. (доказательства традиционных теорем)

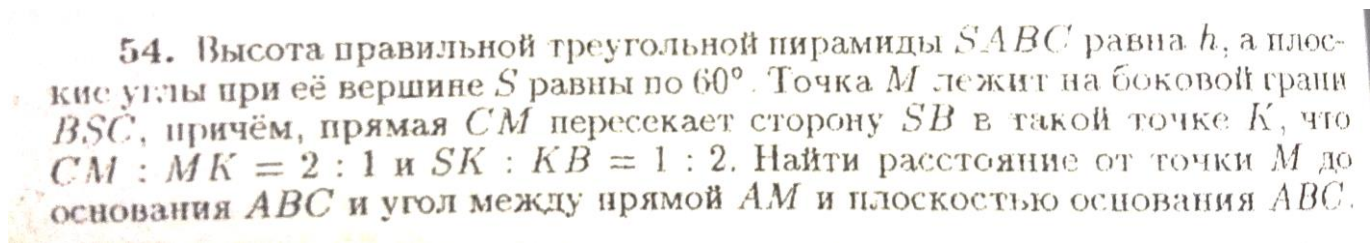
Докажите, что перпендикуляры, восстановленные из середин сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

### 7. (угол между двумя прямыми)

В кубе найти:

- а) угол между диагоналями двух соседних граней, исходящими из одной точки;
- б) угол между диагоналями двух соседних граней, не имеющими общей точки.

### 8. (расстояние от точки до плоскости, угол между прямой и плоскостью)



### 9. (площади плоских фигур)

В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен  $\alpha$ , а длина бокового ребра равна  $a$ . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противоположного бокового ребра.