

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Основные понятия Теории автоматического управления	3
1.1. Из истории автоматики. Лекция 1.	3
1.2. Основные понятия автоматики. Функциональная схема САУ.	3
1.2.1. Упрощенная функциональная схема САУ.	4
1.3. Классификация САУ.	4
1.4. Принципы автоматического регулирования, законы регулирования. Лекция 2	7
1.4.1. Принципы регулирования	7
1.4.2. Законы регулирования.	9
1.5. Статическая система автоматического управления на (примере САУ скорости вращения двигателя постоянного тока с независимым возбуждением).	12
1.5.1. Статические характеристики статической САУ. Лекция 3	15
1.6. Линеаризация. Вывод уравнений генератора постоянного тока с рабочей точкой в нелинейной зоне.	18
1.6.1. Пример получения линеаризованных уравнений генератора постоянного тока на холостом ходу.	19
1.6.1.1. Получение линеаризованных уравнений ГПТ для рабочей точки в нелинейной зоне	20
1.6.1.2. Получение линейных уравнений ГПТ с рабочей точкой в линейной зоне.	21
2. Математическое описание систем автоматического управления	22
2.1. Свойства преобразования Лапласа. Лекция 4.	22
2.2. Передаточные функции.	23
2.3. Частотные характеристики САУ	25
2.4. Типовые динамические звенья. Лекция 5.	28
2.4.1. Безынерционное (пропорциональное) звено	29
2.4.2. Интегрирующее звено	30
2.4.3. Инерционное звено	33
2.4.4. Колебательное звено. Лекция 6.	36
2.4.5. Звено запаздывания.	39
2.4.6. Идеальное и реальное дифференцирующие звенья	40
2.4.7. Упругие звенья. Лекция 7.	44
2.5. Построение логарифмических частотных характеристик по передаточной функции разомкнутой системы.	48
2.5.1. Построение ЛАЧХ	50
2.5.2. Построение ЛФЧХ	51
2.5.3. Построение АФХ.	52
2.6. Временные характеристики САУ. Лекция 8.	52
2.6.1. Типовые входные сигналы и их изображения по Лапласу	52
2.6.2. Способы построения временных характеристик систем	55
2.6.3. Временные характеристики типовых звеньев	57
2.6.3.1. Безынерционное (пропорциональное) звено	57
2.6.3.2. Интегрирующее звено	57
2.6.3.3. Инерционное звено	58
2.6.3.4. Колебательное звено. Лекция 9.	59
2.6.3.5. Звено запаздывания.	60
2.6.3.6. Идеальное и реальное дифференцирующие звенья	61
2.6.3.7. Упругие звенья	62
2.6.3.8. Временные характеристики неустойчивого звена	64
2.6.4. Временные характеристики динамических звеньев. Лекция 10.	64
3. Структурные схемы систем автоматического управления	66
3.1. Элементы структурных схем	66
3.2. Соединение динамических звеньев.	67
3.3. Правила преобразования структурных схем	70
3.4. Пример преобразования структурной схемы. Лекция 11.	71
3.5. Передаточные функции разомкнутых и замкнутых САУ	74
4. Устойчивость систем автоматического управления	76
4.1. Понятие устойчивости систем. Лекция 12.	76
4.2. Необходимые и достаточные условия устойчивости систем	77

4.3. Критерии устойчивости.....	79
4.3.1. Критерий устойчивости Гурвица.....	79
4.3.2. Принцип аргумента. Лекция 13.....	82
4.3.3. Критерий устойчивости Михайлова.....	84
4.3.4. Критерий устойчивости Найквиста.....	84
4.3.5. Примеры применения критерия Найквиста. Лекция 14.....	88
4.3.6. Общая формулировка критерия Найквиста.....	94
4.3.7. Логарифмический критерий устойчивости. Лекция 15.....	95
5. Качество систем автоматического управления.....	96
5.1. Точность систем в установившемся режиме.....	97
5.1.1. Ошибки по управляющему воздействию.....	97
5.1.2. Ошибки по возмущающему воздействию.....	100
5.1.3. Пример расчета ошибок системы автоматического управления. Лекция 16.....	102
5.2. Точность систем в динамическом режиме.....	103
5.2.1. Запасы устойчивости по амплитуде и фазе. Лекция 17.....	104
5.2.2. Характер переходного процесса и быстродействие САУ.....	105

1. Основные понятия Теории автоматического управления

1.1. Из истории автоматике. Лекция 1.

Автоматика (самодействие по-гречески). Первые самодействующие установки были известны еще до нашей эры, например « Храм Солнца » в Египте.

Средние века: мельницы (водяные и ветряные), андронды (механизмы, имитирующие работу людей, например художников, писцов и пр.). Все эти механизмы работали по разомкнутому принципу.

Основу современных систем автоматического управления положили 2 работы:

- а) Регулятор уровня воды в котле Ползунова.
- б) Регулятор скорости маховика паровой машины Дж.Уатта.

В последнем устройстве скорость вращения передавалась через регулятор на заслонку, регулирующую подачу пара в машину.

Основу современной теории АУ положили работы Вышнеградского, который исследовал устойчивость паровых машин. Также проблемами устойчивости занимались: Жуковский, Вознесенский, Ляпунов.

Циолковский разработал устройство управления рулем дирижабля, положил начало разработке автопилота. 1-й автопилот разработал Барановский. Давыдов в 1912 году перед гражданской войной разработал устройство слежения орудия за подвижными и неподвижными целями (1-ая следящая система).

1.2. Основные понятия автоматике. Функциональная схема САУ.

Под управлением в широком смысле этого слова понимается организация какого-либо процесса для достижения поставленной цели.

Цели управления в технических системах.

1. Поддержание заданного курса корабля, самолета или другого средства передвижения.
2. Поддержание толщины прокатываемого металла.
3. Поддержание стабильного напряжения и частоты в сети.
4. Управление различными технологическими процессами.

Определение. Технические объекты, в которых происходят процессы, подлежащие управлению называются объектами управления.

На объект управления действуют возмущающие воздействия, которые выводят его из заданного режима. Для того чтобы поддерживать заданный режим на объекте управления, он снабжается рабочим или управляющим органом (РО). Воздействие на рабочий орган может быть ручным или автоматическим. Если это воздействие автоматическое, то возникает система автоматического управления.

1.2.1. Упрощенная функциональная схема САУ.

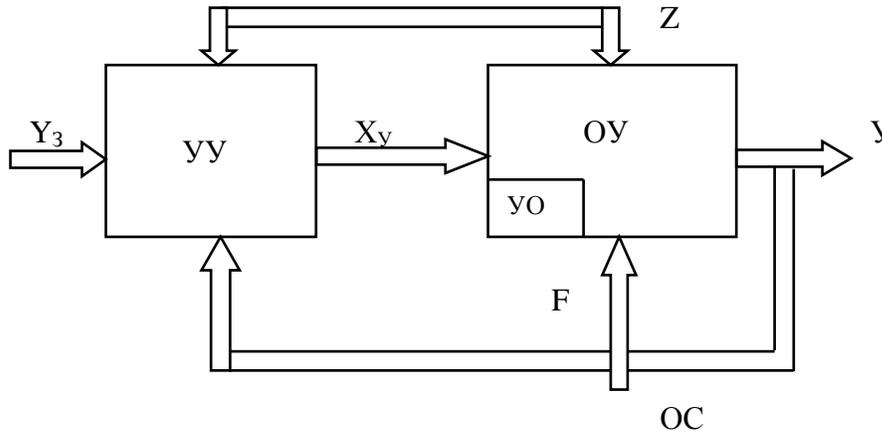


Рис.1.1. Упрощенная функциональная схема САУ

Y_3 – задающий вектор;

X_y – управляющее воздействие;

Y – управляемый сигнал;

Z – контролируемые возмущения;

F – неконтролируемое возмущение;

УУ – управляющее устройство;

УО – управляющий орган;

ОУ – объект управления;

В.С. Верхняя связь – компенсирует наиболее сильно влияющие воздействия.

Н.С. Нижняя связь (ОС – обратная связь) – информация о выходной величине Y поступает в УУ. УУ по информации, поступающей от В.С. и Н.С. вырабатывает управляющий сигнал X_y .

1.3. Классификация САУ.

1. По наличию априорной (доопытной) информации.

а.) адаптивные.

б.) обыкновенные.

В адаптивных системах полная информация об объекте отсутствует. Её необходимо собирать в процессе функционирования объекта.

Причины: 1. малоизученный сложный объект.

2. технические характеристики объекта меняются в процессе эксплуатации.

3. изменяются условия функционирования объекта.

«Самонастраивающаяся» система – адаптивная система АУ с изменяющимися параметрами управляющего устройства (УУ). В такой системе изменяется структура управляющего устройства.

Обыкновенные системы:

Вся информация об объекте управления известна заранее и система автоматического управления строится с учетом всей информации.

2. По числу входов и выходов.

а.) одномерные (1 вход, 1 выход).

б.) многомерные, также их называют многосвязные (много входов и выходов).

в) системы с несколькими входами и одним выходом

3. По выполнению принципа суперпозиции.

а.) линейные (выполняется принцип суперпозиции) (рис. 1.2).

б.) нелинейные (не выполняется принцип суперпозиции).

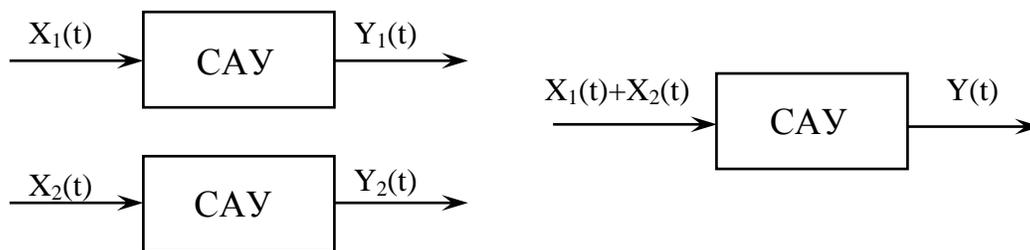


Рис.1.2 Принцип суперпозиции линейных САУ

$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$ - условие выполнения принципа суперпозиции.

Линейные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями (обыкновенными дифференциальными уравнениями с коэффициентами, не зависящими от входного сигнала).

Нелинейные системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

4. По виду сигналов, действующих в системе.

а.) непрерывные.

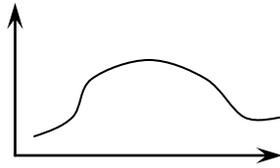


Рис. 1.3. Непрерывный сигнал

б.) дискретные.

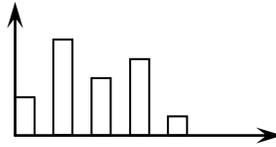


Рис. 1.4. Дискретный сигнал

5. По виду сигнала в САУ.

а.) детерминированный (определенный)(рис.1.5).

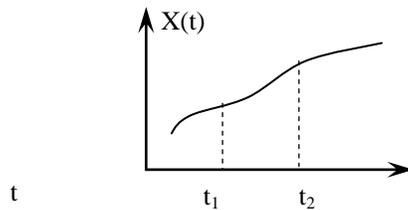


Рис. 1.5. Пример детерминированного сигнала

б.) случайный (стохастический)(рис.1.6).

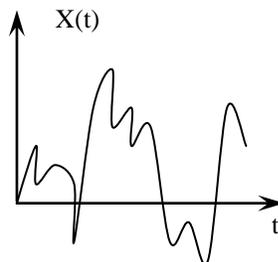


Рис. 1.6. Пример случайного сигнала

6. По целям или задачам управления.

а.) Система оптимального управления – это система, работающая наилучшим образом при определенных условиях. Бывают системы оптимальные по точности, по быстрдействию и др.

б.) Экстремальные системы – это системы, в которых некоторые показатели качества поддерживаются максимальными (рис.1.7).

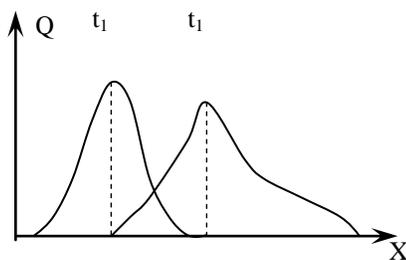


Рис.1.7. Показатель качества экстремальной системы

Q – производительность.

Требуется поддерживать показатель качества Q максимальным, определяя значение X .

Решение.

Система снабжается устройством автоматического поиска (УАП).

УАП подает пробные воздействия на объект в одну и другую сторону от некоторой начальной точки, например t_1 и таким образом определяет положение экстремума.

в.) Системы автоматического регулирования (САР).

В системах автоматического регулирования (САР) решается задача поддержания выходного сигнала объекта на заданном уровне или изменения его по некоторому закону. При этом закон может быть известен заранее, изменяться по заданному закону или быть заранее неизвестным. По этому признаку системы делятся на системы стабилизации, программного управления и следящие системы.

1. $Y(t) - \text{const}$, следовательно данная система – *система стабилизации* ($Y(t)$ – выходная величина).
2. Закон изменения $Y(t)$ известен, следовательно, это *система программного управления*.
3. Закон изменения $Y(t)$ не известен, следовательно, это *следящая система*.

Лекция 2

1.4. Принципы автоматического регулирования, законы регулирования.

Лекция 2

1.4.1. Принципы регулирования

1. Разомкнутый принцип (*регулирование по возмущению*)(рис.1.8).

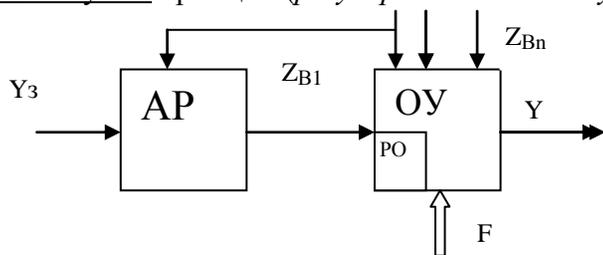


Рис. 1.8. Принципиальная схема регулирования по возмущению

АР – автоматический регулятор;

$$X_{AP} = f(Y_3, Z_{B1})$$

где X_{AP} – регулирующий сигнал автоматического регулятора;

Y_3 – задающее воздействие;

$Z_{B1} \dots Z_{Bn}$ – контролируемые возмущающие воздействия;

F – неконтролируемые возмущения.

Достоинства:

Система всегда устойчива при устойчивом объекте регулирования.

Недостатки:

Низкая точность САР.

2. Замкнутый принцип (регулирование по отклонению (с отрицательной обратной связью))(рис.1.9).

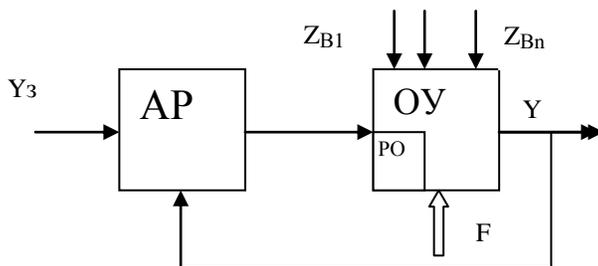


Рис.1.9. Принципиальная схема регулирования по отклонению

$$X_{AP} = f(Y_3, Y).$$

$X_0 = Y_3(t) - Y(t)$ – сигнал отклонения или ошибки

Y_3 – задающее воздействие.

$Y(t)$ – регулируемая величина.

Достоинства: Более высокая точность, нежели в разомкнутой системе.

Недостаток: Система может стать неустойчивой даже при устойчивом объекте.

4. Разомкнуто-замкнутый принцип регулирования (комбинированный)(рис.1.10).

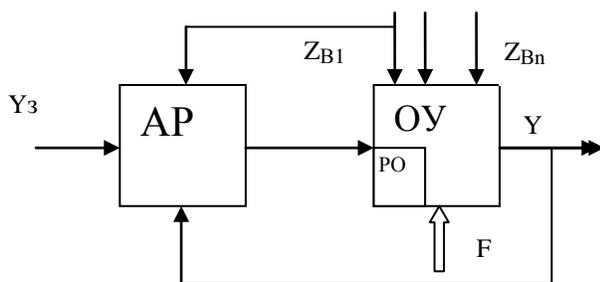


Рис.1.10. Принципиальная схема комбинированной системы

$$X_{AP} = f(Y_3, Z_{B1}, Y).$$

X_{AP} – регулирующий сигнал.

Y_3 – задающее воздействие.

Z_{B1} – контролируемое возмущающее воздействие.

Y – регулируемая величина.

Достоинства:

Точность, более высокая, чем в 2-ух вышеописанных системах.

Недостатки:

Система может быть неустойчива при устойчивом объекте.

1.4.2. Законы регулирования.

Законы автоматического регулирования – законы, по которым работает автоматический регулятор (АР). Законы делятся на линейные и нелинейные.

Линейные законы.

$$X_{AP} = f(X_0)$$

X – может быть различным.

$$x = \begin{cases} x_3 \\ z_6 \\ y \\ x_0 = \Delta x \end{cases}$$

1. Пропорциональный закон регулирования («П»).

$$X_{AP} = K_P * X$$

K_P – коэффициент усиления регулятора.

Достоинство регулятора: простота.

Недостаток регулятора: в замкнутой системе с таким регулятором возникает статическая ошибка.

2. Интегральный закон регулирования («И»).

$$X_{AP}(t) = K_I / T_I \cdot \int_0^t x(\tau) d\tau$$

K_I – коэффициент усиления интегратора.

T_I – постоянная времени [с].

Достоинства:

- Статическая ошибка в замкнутой системе равна нулю.
- Относительная простота.

Недостаток: Затягивает переходной процесс в системе.

5. Пропорционально-интегральный закон регулирования («ПИ»).

$$X_{AP}(t) = K_P \cdot X(t) + \frac{K_{II}}{T_{II}} \cdot \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Достоинство: Нулевая статическая ошибка.

Недостаток: Затянутый переходной процесс.

4. Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон регулирования («ПИД»).

$$X_{AP}(t) = K_P \cdot x(t) + \frac{K_{II}}{T_{II}} \cdot \int_0^t x(\tau) d\tau + K_D \cdot T_D \frac{dx(t)}{dt}$$

K_D – коэффициент усиления дифференциатора.

T_D – постоянная времени [с].

Достоинства:

1. Нулевая статическая ошибка.
2. Повышенное быстродействие.

Недостатки:

1. Относительная сложность.
2. Ухудшенная помехоустойчивость.

Нелинейные законы регулирования.

1. Идеальное (двухпозиционное) реле (рис.1.11).

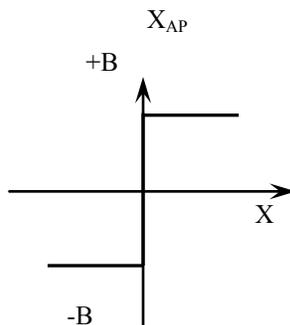


Рис.1.11 Характеристика двухпозиционного реле

2. Трехпозиционное реле (реле с зоной нечувствительности)(рис.1.12).

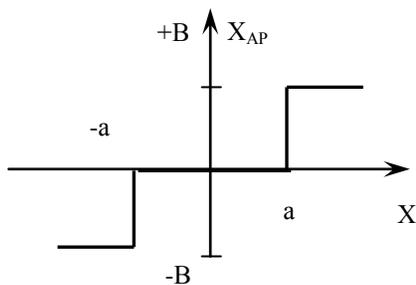


Рис.1.12. Характеристика трехпозиционного реле

3. Двухпозиционное реле с гистерезисом (рис.1.13).

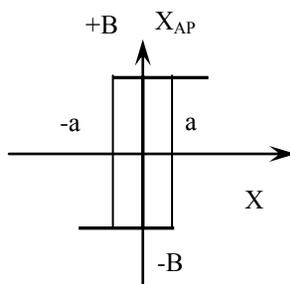


Рис.1.13. Характеристика двухпозиционного реле с гистерезисом

4. Трехпозиционное реле с гистерезисом (рис.1.14).

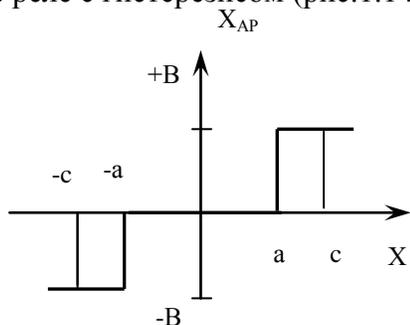


Рис.1.14.Характеристика трехпозиционное реле с гистерезисом

Нелинейные законы регулирования могут обеспечить в системе качественно новые процессы (рис.1.15):

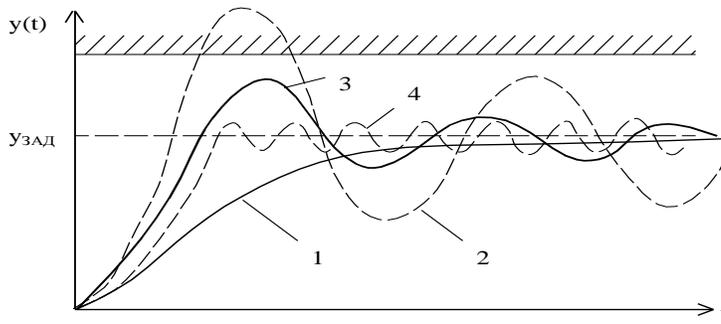


Рис.1.15. Пример переходного процесса реальной САУ

- Где: 1 – линейный регулятор 2.
 2 – без регулирования.
 3. – линейный регулятор 1.
 4. – нелинейный регулятор.

y – выходная величина процесса, которую надо поддерживать на уровне $U_{зад}$ (например, химический процесс).

1.5. Статическая система автоматического управления на (примере САУ скорости вращения двигателя постоянного тока с независимым возбуждением).

Система автоматического регулирования (САУ) скорости вращения двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (рис.1.16).

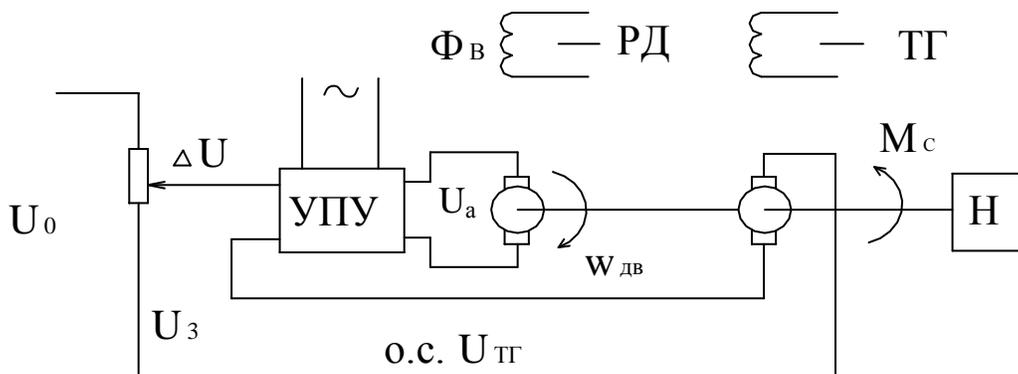


Рис.1.16. Принципиальная схема системы регулирования ДПТ

- U_0 – напряжение, поступающее на вход потенциометра.
 U_3 – напряжение, задающее скорость вращения двигателя.
 РД – реверсивный двигатель.

ТГ – тахогенератор (устройство для измерения скорости вращения двигателя).

УПУ – усилительно-преобразовательное устройство.

Н – нагрузка или производственный механизм, скорость которого надо поддерживать постоянной.

U_a – напряжение на якорной обмотке двигателя.

$\omega_{\partial\partial}$ - скорость вращения двигателя.

$U_{ТГ}$ – напряжение на выходе ТГ.

M_C – момент сопротивления на валу двигателя.

Φ_B – электромагнитный поток возбуждения двигателя.

РД – объект управления.

УПУ+ТГ=АР – автоматический регулятор.

$U_3 \equiv \omega_3$ - задающее воздействие.

$$U_3 = K_{ТГ} \cdot \omega_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{U_3}{K_{ТГ}}$$

$U_{ТГ} \equiv K_{ТГ} \cdot \omega_{\partial\partial}$ - регулируемая величина.

M_C – возмущающее воздействие.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U = U_3 - U_{ТГ} \\ \Delta \omega_{\partial\partial} = \omega_3 - \omega_{\partial\partial} \end{array} \right\} - \text{ошибка, или отклонение системы.}$$

$U_{ТГ}$ – подается через отрицательную обратную связь.

Цель системы: Стабилизация скорости вращения двигателя.

Рассмотрим момент времени t_0 .

Все сигналы постоянны.: $U_a^0, \omega_{\partial\partial}^0, U_{ТГ}^0, M_C^0$

Предположим, что в момент времени t_1 момент сопротивления увеличился скачком.

Сигналы изменяются следующим образом:

M_C - возрастает скачком (изменяется нагрузка); следовательно: $\omega_{\partial\partial}$ - падает, $U_{ТГ}$ – падает, ΔU - возрастает, U_a – возрастает, следовательно возрастет $\omega_{\partial\partial}$, т.е осуществляется регулировка.

В момент времени t_2 переходные процессы в системе заканчиваются, и встает вопрос, какая скорость вращения установится в системе, т.е.

$$t_2 > t_1 \quad \omega_{\partial\partial}^2 \leq \geq \omega_{\partial\partial}^0$$

1. «И» закон регулирования.

$$U_a(t) = K_{II} \cdot \int_0^t \Delta U(\tau) d\tau$$

Для момента времени t_2 :

Допустим, что $\omega_{\partial\epsilon}^2 \neq \omega_{\partial\epsilon}^0 \Rightarrow \Delta U \neq 0 \Rightarrow U_a$ - возрастает, что противоречит предположению об окончании переходных процессов.

Единственная точка стабилизации:

$$\text{Для «И»}: \omega_{\partial\epsilon}^2 = \omega_{\partial\epsilon}^0$$

Определение: Астатической по возмущению называется система, у которой выходная величина не зависит от возмущения (статическая ошибка равна нулю)(рис.1.17).

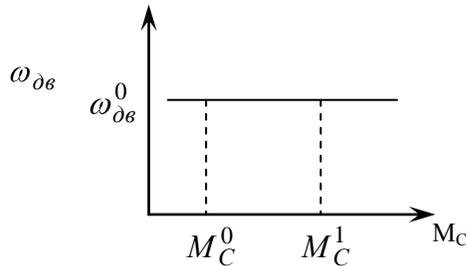


Рис.1.17. Нагрузочная характеристика астатической системы

2. Пропорциональный закон регулирования.

$$U_a = K_Y \cdot \Delta U$$

Предположим, что $\omega_{\partial\epsilon}^2 = \omega_{\partial\epsilon}^0 \Rightarrow$ ошибка: $\Delta\omega = \omega_{\partial\epsilon}^2 - \omega_{\partial\epsilon}^0 = 0$

$$\Rightarrow \Delta U = U_{TT} - U_{ЗАД} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow U_a = 0 \Rightarrow \omega_{\partial\epsilon} = 0$, это означает, что двигатель не вращается, следовательно, наше

предположение не верно, и $\omega_{\partial\epsilon}^2 \neq \omega_{\partial\epsilon}^0$ и, с учетом возрастающей ошибки ΔU , понятно, что

$\omega_{\partial\epsilon}^2 < \omega_{\partial\epsilon}^0$ (рис.1.18).

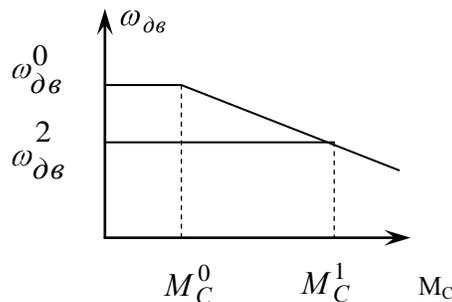


Рис.1.18. Нагрузочная характеристика статической системы

Определение: Статической по возмущению называется система автоматического регулирования (САР), у которой выходная величина уменьшается при увеличении возмущения. Статическая ошибка в такой системе не равна нулю. Лекция 3

1.5.1. Статические характеристики статической САР. Лекция 3

Определение: Статические характеристики - характеристики, полученные в положении равновесия.

Статические характеристики ДПТ.

Прежде чем рассматривать статические характеристики системы, следует рассмотреть статические характеристики объекта управления – двигателя постоянного тока (ДПТ)(рис.1.19).

Статические характеристики двигателя постоянного тока.

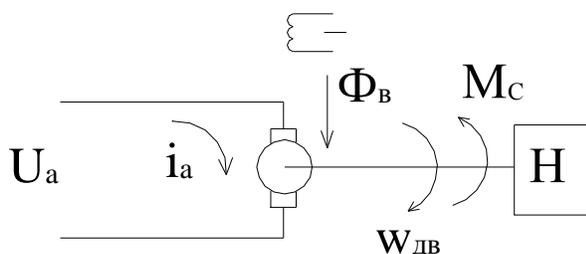


Рис.1.19. Схема двигателя постоянного тока

U_a – напряжение на якорной обмотке двигателя.

I_a – ток в якорной цепи.

Φ_B – электромагнитный поток возбуждения.

$\omega_{дв}$ - скорость вращения двигателя.

M_C – момент сопротивления на валу.

При взаимодействии тока i_a и потока Φ_B на валу возникает момент вращения двигателя $M_{дв}$.

$$\omega_{дв} = f(U_a, \Phi_B, M_C)$$

$\Phi_B = \text{const}$, если реакцией якоря можно пренебречь, то $\omega_{дв} = f(U_a, M_C)$

1) Если $M_C = 0$, то $\omega_{дв} = K_{дв} \cdot U_a$ (рис.1.20)

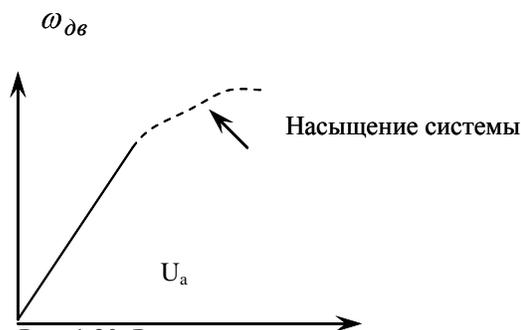


Рис. 1.20. Регулировочная характеристика двигателя постоянного тока

2) Если предположить, что $U_a - \text{const}$, получим линейные характеристики, приведенные на рисунке

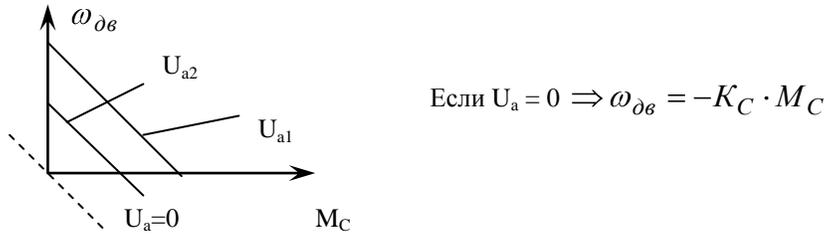


Рис.1.21. Нагрузочные характеристики двигателя постоянного тока

ДПТ описывается линейными уравнениями, следовательно, в соответствии с принципом суперпозиции можно записать уравнение статики двигателя постоянного тока:

$$\boxed{\omega_{\deltaв} = K_{\deltaв} \cdot U_a - K_C \cdot M_C \quad (*)}$$

Статическая характеристика статической системы регулирования скорости вращения двигателя постоянного тока:

$$\begin{cases} \omega_{\deltaв} = K_{\deltaв} \cdot U_a^C - K_C \cdot M_C \\ \begin{cases} U_a^C = K_Y \cdot \Delta U \\ \Delta U = U_{зад} - U_{ТГ} \\ U_{ТГ} = K_{ТГ} \cdot \omega_{\deltaв} \end{cases} \end{cases}$$

В основе лежит уравнение статики ДПТ, но напряжение на якорной обмотке двигателя в статической системе формируется системой: U_a^C

$$\omega_{\deltaв} = K_{\deltaв} \cdot K_Y (U_3 - K_{ТГ} \cdot \omega_{\deltaв}) - K_C \cdot M_C$$

$$\omega_{\deltaв} = K_{\deltaв} \cdot K_Y \cdot U_{зад} - K_{\deltaв} \cdot K_Y \cdot K_{ТГ} \cdot \omega_{\deltaв} - K_C \cdot M_C$$

$$\omega_{\deltaв} (1 + K_{\deltaв} K_Y K_{ТГ}) = K_{\deltaв} K_Y U_{зад} - K_C M_C$$

$$\omega_{\deltaв} = \frac{K_{\deltaв} K_Y}{1 + K_{\deltaв} K_Y K_{ТГ}} \cdot U_3 - \underbrace{\frac{K_C}{1 + K_{\deltaв} K_Y K_{ТГ}}}_{K} \cdot M_C$$

K – коэффициент усиления разомкнутой системы.

Окончательно получим уравнения статики статической системы:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{\deltaв} &= \frac{K}{1 + K} \cdot \frac{U_{зад}}{K_{ТГ}} - \frac{K_C}{1 + K} \cdot M_C \quad (**) \\ \omega_{\deltaв}^{зад} &= \omega_{\deltaв}^0 = \frac{U_{зад}}{K_{ТГ}} \end{aligned}}$$

Найдем статическую ошибку.

$$\Delta\omega_{\partial\epsilon} = \omega_{\partial\epsilon}^3 - \omega_{\partial\epsilon} = \frac{U_3}{K_{ТГ}} - \frac{K}{1+K} \cdot \frac{U_3}{K_{ТГ}} + \frac{K_C}{1+K} M_C$$

$$\Delta\omega_{\partial\epsilon} = \frac{1}{1+K} \frac{U_3}{K_{ТГ}} + \frac{K_C}{1+K} M_C$$

Статическая ошибка статической системы

$$\text{Ошибка} \begin{cases} \Delta\omega_{\partial\epsilon}^y = \frac{1}{1+K} \frac{U_3}{K_{ТГ}} \\ \Delta\omega_{\partial\epsilon}^B = \frac{K_C}{1+K} M_C \end{cases}$$

Индексы: у - по управляющему воздействию, В – по возмущающему воздействию.

Что дает отрицательная обратная связь (замыкание системы)?

Предположим, момент сопротивления изменяется от 0 до $M_C \Rightarrow \Delta\omega_{\partial\epsilon} = -K_C M_C$ - для разомкнутой системы, $\Delta\omega_{\partial\epsilon}$ - изменение скорости двигателя.

Для замкнутых систем скорость изменится на величину:

$$\Delta\omega_{\partial\epsilon} = -\frac{K_C}{1+K} M_C$$

Вывод: При замыкании системы статическая ошибка по возмущению уменьшается в $(1+K)$ раз.

Построим статические характеристики по выражению (**)(рис.1.22).

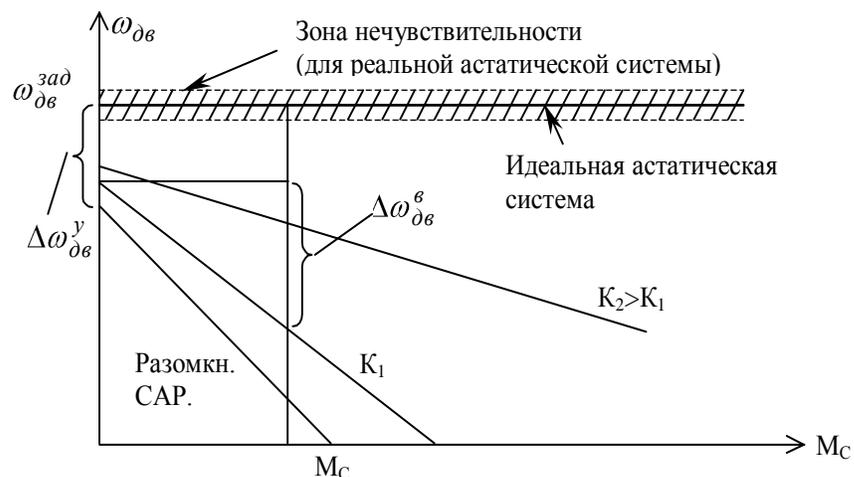


Рис.1.22. Нагрузочные характеристики САР скорости вращения ДПТ

$$\frac{\Delta \omega_{раз.}}{\Delta \omega_{дв.}} = 1 + K, \text{ откуда можно найти коэффициент усиления разомкнутой системы } K.$$

1.6. Линеаризация. Вывод уравнений генератора постоянного тока с рабочей точкой в нелинейной зоне.

Линеаризация – замена нелинейных уравнений на линейные, проводится в пределах заданной точности и используется для исследования линейных систем. В основе линеаризации лежит разложение нелинейной характеристики в ряд Тейлора (рис.1.23).

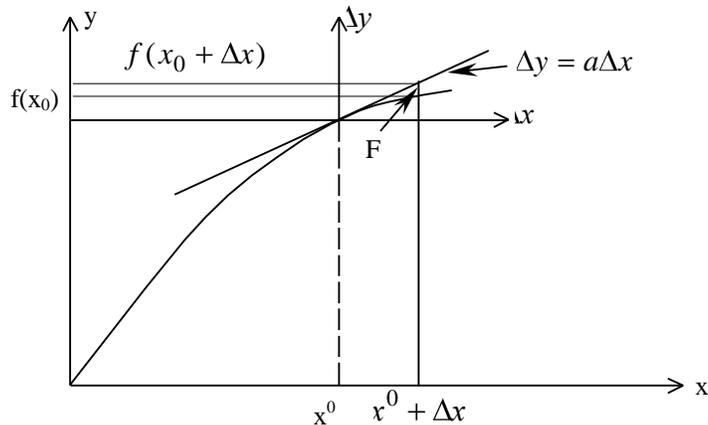


Рис.1.23. Пример линеаризации нелинейной функции

Рассмотрим точку x^0 , вблизи которой мы хотим получить линеаризованное уравнение.

Зададим приращение $x^0 + \Delta x$

Разложение в ряд Тейлора имеет вид:

$$f(x^0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x^2 + \dots}_F$$

При линеаризации используется только линейная часть разложения, т.е. нелинейная часть разложения F отбрасывается.

Получаем линеаризованное уравнение. $f(x^0 + \Delta x) - f(x_0) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x$;

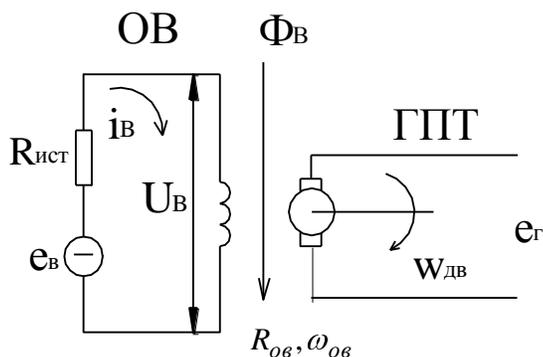
Используя обозначение $a = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$; получим линеаризованное уравнение в

приращениях: $\Delta y = a \cdot \Delta x$;

При этом начало координат переносится из точки 0 в точку 0'.

1.6.1. Пример получения линеаризованных уравнений генератора постоянного тока на

ХОЛОСТОМ ХОДУ.



ОВ – обмотка возбуждения.

ГПТ – генератор постоянного тока.

$R_{ист}$ – активное сопротивление источника питания.

$e_в$ – ЭДС источника питания (возбуждения).

$i_в$, $U_в$ – ток и напряжение на обмотке возбуждения.

Рис.1.24. Схема генератора постоянного тока

$\Phi_в$ – электромагнитный поток, создаваемый обмоткой возбуждения.

$\omega_{ог}$ – скорость, с которой посторонний двигатель вращает якорь генератора постоянного тока.

$e_г$ – ЭДС генератора.

$R_{ОВ}$ – активное сопротивление обмотки возбуждения

$\omega_{ог}$ – число витков обмотки возбуждения.

Уравнение обмотки возбуждения (рис.1.25).

$$\text{ОВ: } 1) e_в(t) = (R_{ист} + R_{ОВ}) \cdot i_в(t) + \underbrace{\omega_{ОВ} \cdot \frac{\partial \Phi_в(t)}{\partial t}}_{\text{ЭДС самоиндукции}}$$

$$2) \Phi_в = f(i_в)$$

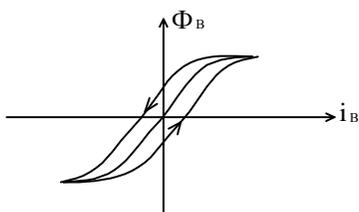


Рис.1.25. Характеристика петли гистерезиса обмотки возбуждения ГПТ

3) ГПТ – цепь генератора

$$e_г(t) = C_г \cdot \Phi_в(t)$$

$C_г$ – коэффициент пропорциональности между напряжением и электромагнитным потоком возбуждения.

Уравнения 1-3 это описание ГПТ в виде нелинейных дифференциальных уравнений (точнее, уравнения 1 и 3 – линейные, а уравнение 2 – нелинейное статическое уравнение).

- 1) Если шириной петли гистерезиса пренебречь нельзя, то линеаризация невозможна, и для описания требуется привлечение аппарата анализа нелинейных систем.
- 2) Если ширина петли гистерезиса мала, то двухзначная характеристика заменяется на однозначную (среднюю линию петли гистерезиса).

Рассмотрим 2 участка.

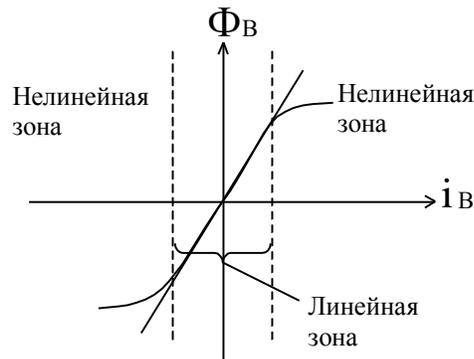
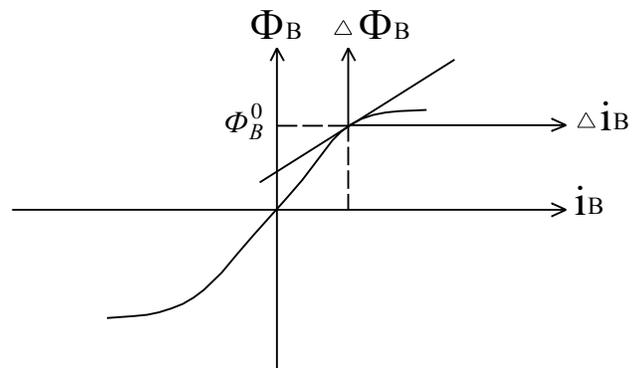


Рис.1.26. Характеристика обмотки возбуждения ГПТ

1.6.1.1. Получение линеаризованных уравнений ГПТ для рабочей точки в нелинейной зоне

Рис.1.27. Линеаризация в нелинейной зоне характеристики обмотки возбуждения ГПТ



Получим систему линеаризованных уравнений, используя линеаризованное уравнение в приращениях.

Запишем уравнение стационарной точки (рабочей точки)

В стационарной точке все входы и выходы постоянны, все производные равны нулю.

Запишем 2-а уравнения стационарной точки:

$$\begin{cases} e_B^0 = R_B i_B^0 \\ e_\Gamma^0 = C_\Gamma \Phi_B^0 \end{cases}$$

Тогда сигналы можно представить как отклонения от стационарной точки:

$$e_B(t) = e_B^0 + \Delta e_B(t) \quad \Phi_B(t) = \Phi_B^0 + \Delta \Phi_B(t)$$

$$e_\Gamma(t) = e_\Gamma^0 + \Delta e_\Gamma(t) \quad i_B(t) = i_B^0 + \Delta i_B(t)$$

где e_B^0 - рабочая точка, а $\Delta e_B(t)$ - приращение от этой рабочей точки.

С использованием записанных равенств, получим:

$$e_B^0 + \Delta e_B(t) = R_B(i_B^0 + \Delta i_B(t)) + \omega_B \frac{d(\Phi_B^0 + \Delta \Phi_B(t))}{dt}$$

$$e_B^0 = R_B i_B^0$$

$$1') \quad \Delta e_B(t) = R_B \Delta i_B(t) + \omega_B \frac{d\Delta \Phi_B(t)}{dt}$$

$$2') \quad \Delta \Phi_B = a \Delta i_B \Rightarrow a = \left. \frac{\partial \Phi_B(t)}{\partial i_B} \right|_{i_B^0, \Phi_B^0} \quad \text{Уравнение линеаризации, проведенное по току;}$$

$$3') \quad e_\Gamma^0 + \Delta e_\Gamma(t) = C_\Gamma(\Phi_B^0 + \Delta \Phi_B(t))$$

$$e_\Gamma^0 = C_\Gamma \Phi_B^0$$

$$\Delta e_\Gamma(t) = C_\Gamma \Delta \Phi_B(t)$$

Уравнения 1'-3' - это линеаризованные уравнения в приращениях, описывающие работу генератора постоянного тока вблизи рабочей точки, лежащей в нелинейной зоне.

1.6.1.2. Получение линейных уравнений ГПТ с рабочей точкой в линейной зоне.

$$2'') \quad \Phi_B = L_B^1 i_B$$

L_B^1 - индуктивность одного витка обмотки возбуждения.

$$1'') \quad e_B(t) = R_B i_B(t) + \underbrace{L_B^1}_{L_B} \omega_B \frac{di_B(t)}{dt}$$

ω_B - число витков обмотки возбуждения.

L_B - индуктивность обмотки возбуждения.

$$3'') \quad e_\Gamma(t) = C_\Gamma L_B^1 i_B(t)$$

$$C = C_\Gamma L_B^1$$

Уравнения 1''-3'' это линейные уравнения, описывающие работу ГПТ в линейной зоне.

2. Математическое описание систем автоматического управления

2.1. Свойства преобразования Лапласа. Лекция 4.

Передаточные функции используют преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа его свойства.

Формула преобразования Лапласа:
$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$f(t)$ называется оригиналом, а $F(p)$ - изображением по Лапласу, что отображается следующим образом: $f(t) \div F(p)$.

p – комплексная величина, называемая оператором Лапласа.

Преобразование Лапласа заменяет решение дифференциальных уравнений во временной области, решением алгебраических уравнений в плоскости p , что облегчает задачу анализа систем.

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность

$$L\{af_1(t) \pm bf_2(t)\} = aF_1(p) \pm bF_2(p)$$

$F(p) = L\{f(t)\}$, где L обозначает преобразование Лапласа.

Таким образом, преобразование Лапласа от суммы равно сумме преобразований Лапласа.

2. Изображение производных.

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = pF(p) - f(0);$$

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = p^n F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) \dots - f^{n-1}(0).$$

При нулевых начальных условиях:
$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = p^n F(p)$$

3. Преобразование Лапласа от интеграла (Изображение интеграла).

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}$$

4. Изображение Лапласа от функции с запаздывающим аргументом (рис.2.1).

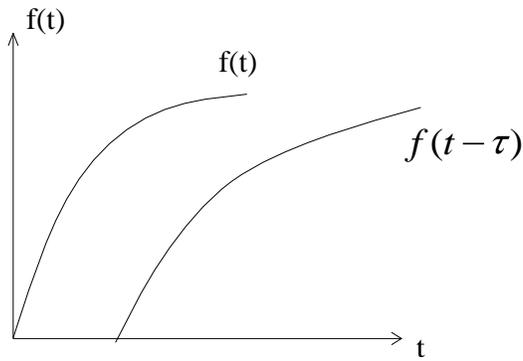


Рис.2.1. Пример функции с запаздывающим аргументом

Изображение от функции с запаздывающим аргументом имеет вид:

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-p\tau} F(p),$$

Где $e^{-p\tau}$ - оператор запаздывания.

5. Теорема о конечном значении.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

Если предел существует, это означает, что поведение функции в бесконечности, определяется поведением её изображения в нуле.

2.2. Передаточные функции.

Понятие передаточной функции (рис.2.2).

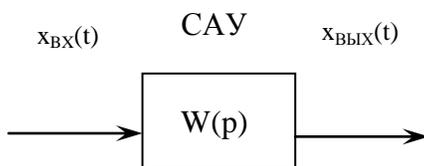


Рис.2.2. Передаточная функция системы

Передаточной функцией ($W(p)$) называется отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала по Лапласу при нулевых начальных условиях (ННУ).

ННУ – означают, что входной и выходной сигнал вместе с их (n-1) производными равен нулю.

1. Пример получения передаточной функции.

Передаточная функция ГПТ.

$$\frac{Td\Delta e_{\Gamma}}{dt} + \Delta e_{\Gamma} = K\Delta e_{B}$$

Воздействуем оператором Лапласа на правую и левую часть дифференциального уравнения.

$$L\left\{\frac{Td\Delta e_{\Gamma}(t)}{dt} + \Delta e_{\Gamma}(t)\right\} = L\{K\Delta e_B\}$$

Введем обозначения
$$\left. \begin{aligned} L\{\Delta e_{\Gamma}(t)\} &= E_{\Gamma}(p) \\ L\{\Delta e_B(t)\} &= E_B(p) \end{aligned} \right\}.$$

$$T\{pE_{\Gamma}(p) - \Delta e_{\Gamma}(0)\} + E_{\Gamma}(p) = K \cdot E_B(p)$$

$$\Delta e_{\Gamma}(0) = 0$$

$$TpE_{\Gamma}(p) + E_{\Gamma}(p) = K \cdot E_B(p)$$

$$E_{\Gamma}(p)(Tp + 1) = K \cdot E_B(p)$$

Получим передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{E_{\Gamma}(p)}{E_B(p)} = \frac{K}{Tp + 1}$$

2. Пример получения передаточной функции (рис.2.3).

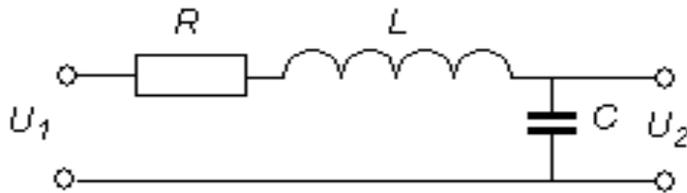


Рис.2.3. RLC - цепочка

Уравнения, описывающие процессы в RLC - цепочке :

$$U_1(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + U_2(t)$$

$$i(t) = C \frac{dU_2(t)}{dt}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим:

$$U_1(t) = CR \frac{dU_2(t)}{dt} + LC \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} + U_2(t) \text{ - линейное уравнение «вход – выход»}.$$

В ТАУ принята специальная форма записи дифференциальных уравнений, при которой слева записывается выходной вместе с его производными сигнал в порядке уменьшения степени производных, справа входной сигнал с его производными в том же порядке, при этом коэффициент при выходном сигнале принимается равным 1.

Таким образом, запишем:

$$LC \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + CR \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t)$$

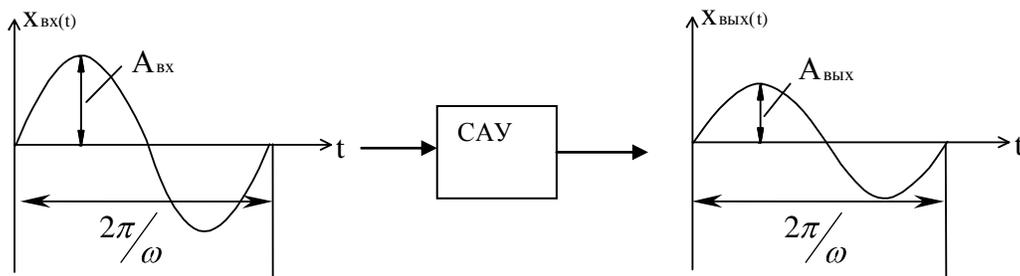
Применяя к уравнению преобразование Лапласа и предполагая нулевые начальные условия, получим:

$$(LCp^2 + CRp + 1)U_2(p) = U_1(p), \text{ или передаточную функцию:}$$

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LCp^2 + CRp + 1}$$

2.3. Частотные характеристики САУ

Комплексный коэффициент усиления (рис.2.4)



$$x_{BX}(t) = A_{BX} \cdot \sin \omega t$$

$$x_{BЫX}(t) = A_{BЫX}(\omega) \cdot \sin(\omega t + \varphi_{BЫX}(\omega))$$

Рис.2.4. Схема прохождения гармонического сигнала через САУ

Воспользуемся формулой Эйлера: $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ и запишем входной и выходной

сигнал в комплексной форме (используя формулу Эйлера).

$$x_{BX}(t) = \text{Im}\{A_{BX} e^{j\omega t}\} = \text{Im}\left\{ \overset{\bullet}{x_{BЫX}} \right\}$$

$$x_{BЫX}(t) = \text{Im}\{A_{BЫX}(\omega) \cdot e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}\} = \text{Im}\left\{ \overset{\bullet}{x_{BЫX}} \right\}$$

Введем понятие комплексного коэффициента усиления (ККУ)

$$W(j\omega) = \frac{\overset{\bullet}{x_{BЫX}}}{\overset{\bullet}{x_{BX}}}$$

Определение:

ККУ – это отношение выходного сигнала ко входному в установившемся режиме, записанных в комплексной форме при подаче на вход системы гармонического сигнала (рис.2.5).

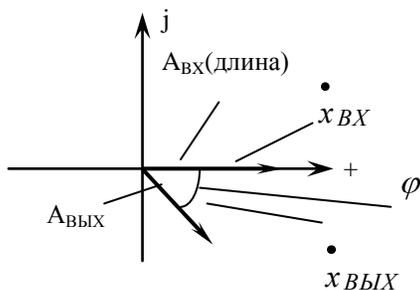


Рис.2.5. Представление гармонических сигналов на комплексной плоскости

Вектора вращаются против часовой стрелки со скоростью ω , а сигнал - это проекция векторов на мнимую часть.

$$W(j\omega) = \frac{x_{ВЫХ}}{x_{BX}} = \frac{A_{ВЫХ}(\omega) \cdot e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}{A_{BX} \cdot e^{j\omega t}} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

где $A(\omega) = \frac{A_{ВЫХ}(\omega)}{A_{BX}(\omega)}$

$A(\omega)$ - это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) - отношение амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала на определенной частоте ω (при подаче на вход гармонического сигнала частоты ω).

$\varphi(\omega)$ - фазовая частотная характеристика (ФЧХ) -разность фаз между выходным и входным сигналом при подаче на вход гармонического сигнала определенной частоты.

Если разложить полученное выражение для ККУ по формуле Эйлера, получим:

$$W(j\omega) = A(\omega)(\cos\varphi(\omega) + j\sin\varphi(\omega)) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

где : $P(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega)$ - вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$Q(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega)$ - мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Геометрическая интерпретация ККУ (рис.2.6)

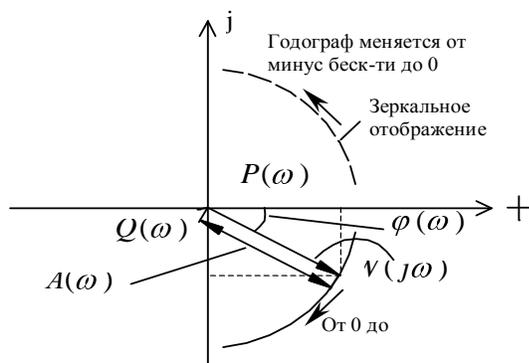


Рис.2.6. Геометрическая интерпретация комплексного коэффициента усиления

Определение: Геометрическое место точек конца вектора $W(j\omega)$ называется годографом (Найквиста), или амплитудно-фазовой характеристикой АФХ.

Частота меняется в диапазонах: $-\infty < \omega < \infty$ или $0 < \omega < \infty$.

Используемые в ТАУ характеристики.

1). АЧХ – амплитудная частотная характеристика. Строится в обычном масштабе от частоты, меняющейся в диапазоне от 0 до ∞ . Строится по выражению $A(\omega)$.

2). ФЧХ – фазовая частотная характеристика. Строится по выражению $\varphi(\omega)$ в обычном масштабе в диапазоне частот от 0 до ∞ .

3). ВЧХ – Вещественная частотная характеристика. Строится по выражению $P(\omega)$ в обычном масштабе в диапазоне частот от 0 до ∞ .

4). МЧХ – мнимая частотная характеристика. Строится по выражению $Q(\omega)$ в обычном масштабе в диапазоне частот от 0 до ∞ .

5). АФХ – амплитудно-фазовая характеристика. Строится по выражению $W(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении частот либо от 0 до ∞ , либо от $-\infty$ до ∞ .

6). ЛАЧХ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$$

Строится в логарифмическом масштабе при изменении частоты от 0 до ∞ (рис.2.7).

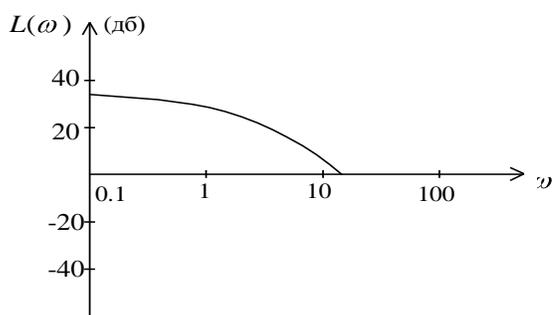


Рис.2.7. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

Децибела – логарифмическая единица измерения отношения 2-х величин.

Декада – диапазон частот, на котором частота изменяется в 10 раз.

6). Асимптотическая ЛАЧХ - $L'(\omega)$ - это характеристика, полученная из $L(\omega)$

аппроксимацией её отрезками прямых с наклонами: $0 \pm 20 \pm 40 \pm 60 \dots \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$. Следует заметить, что логарифмический масштаб спрямляет криволинейные характеристики, после чего такая аппроксимация становится возможной.

7). ЛФЧХ – логарифмическая фазовая частотная характеристика. Строится в полулогарифмическом масштабе в диапазоне частот от 0 до ∞ (рис.2.8).

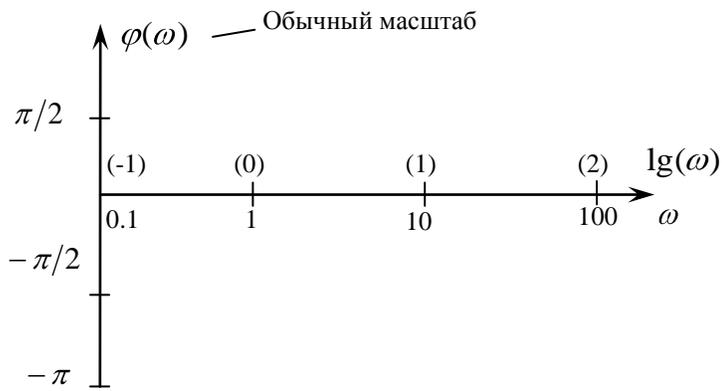


Рис. 2.8. Логарифмическая фазовая частотная характеристика

2.4. Типовые динамические звенья. Лекция 5.

Динамическим звеном называется некоторое устройство, либо система в целом, описываемая линейным дифференциальным уравнением или передаточной функцией. Динамические звеньями обладают двумя свойствами:

Однонаправленность (передача сигнала осуществляется в одном направлении от входа к выходу, т.е. выход не влияет на вход системы). Типичным примером динамического звена является термопара – устройство для измерения температуры, состоящее из двух металлических пластин, один конец которых соединен и помещается в нагретое пространство, а между несоединенными концами при этом появляется напряжение (э.д.с.). Естественно, э.д.с. не влияет на температуру.

Характеристики динамических звеньев не меняются при их различном подключении друг к другу. Продемонстрируем это на примере соединения RLC – цепочки и делителя напряжения (рис.2.9):

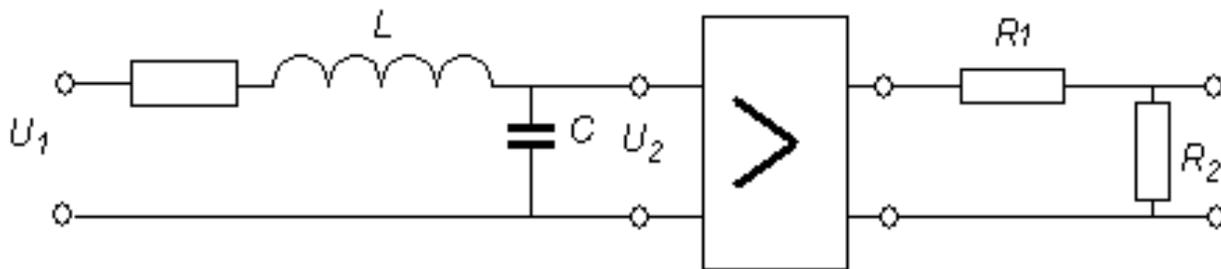


Рис. 2.9. RLC - цепочка

Если цепочки соединены через усилитель с большим входным и малым выходным сопротивлением, т.е. вторая цепочка не нагружает первую, то второе свойство выполняется, а в противном случае – нет, что легко показать, найдя передаточную функцию последовательного соединения цепочек и убедившись, что она не равна произведению двух исходных передаточных функций.

Типовыми называются динамические звенья, описываемые линейными дифференциальными уравнениями, или передаточными функциями не выше второго порядка.

2.4.1. Безынерционное (пропорциональное) звено

Примеры: а) редуктор, у которого отношение угловых скоростей вращения выходного вала

к скорости вращения входного вала равно передаточному числу $i_p = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. т.е. $W(p) = i_p$;

б) рычаг (рис.2.10), для которого выполняется соотношение: $p_1 \cdot l_1 = p_2 \cdot l_2$,

т.е. $W(p) = \frac{p_2}{p_1} = \frac{l_1}{l_2}$.

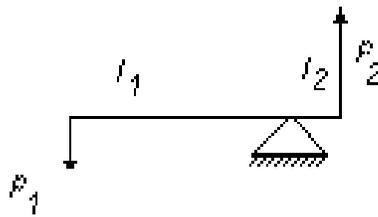


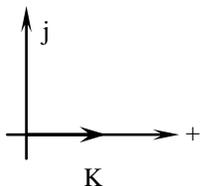
Рис.2.10. Схема рычага

Таким образом, передаточная функция безынерционного звена равна:

$$W(p) = K = Ke^{j0} = K + j \cdot 0$$

1) АФХ (годограф Найквиста):

$$K = Ke^{j0}$$



2) АЧХ ($A(\omega)$)

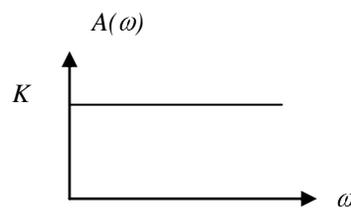


Рис.2.11. Характеристики безынерционного звена (годограф, АЧХ)

3) ВЧХ ($P(\omega)$)

$$P(\omega) = K$$

4) МЧХ ($Q(\omega)$)

$$Q(\omega) = 0$$

ФЧХ ($\varphi(\omega)$) $\varphi(\omega) = 0$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) (рис.2.12)

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K$$

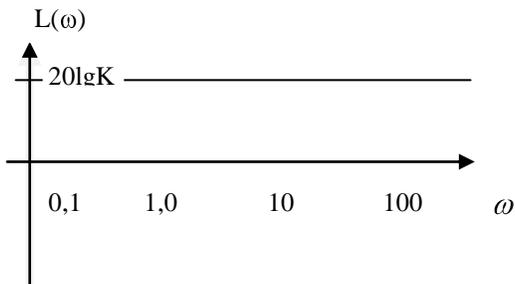


Рис.2.12. ЛАЧХ безынерционного звена

2.4.2. Интегрирующее звено

Примеры:

А) Вал, у которого угол поворота связан с угловой скоростью вращения интегральным

соотношением:
$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau ;$$

Б) Конденсатор, для которого активным сопротивлением проводов можно пренебречь ($r=0$)

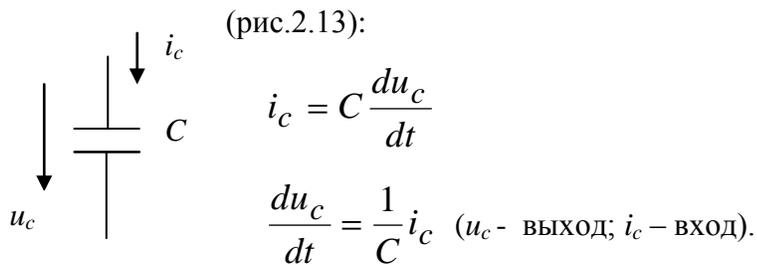


Рис.2.13 Схема конденсатора

Уравнения, описывающие интегрирующее звено:

$$y(t) = \frac{K}{T} \int_0^t x(\tau) d\tau = K_{II} \int_0^t x(\tau) d\tau ;$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = K_{II} x(t).$$

Передаточная функция:
$$W(p) = \frac{K_{II}}{p}$$

$$W(j\omega) = \frac{K_{II}}{j\omega} = \frac{K_{II} e^{j0}}{\omega e^{j\pi/2}} = \frac{K_{II}}{\omega} e^{-j\pi/2} = 0 - j \frac{K_{II}}{\omega}$$

где: $P(\omega)=0$ $Q(\omega) = -j \frac{K_{II}}{\omega}$ $A(\omega) = \frac{K_{II}}{\omega}$ $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

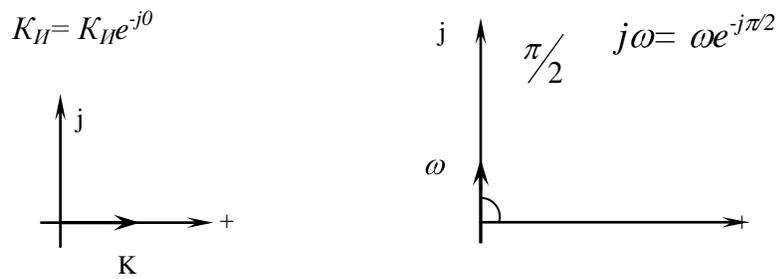


Рис.2.14. Представление на комплексной плоскости

Построим частотные характеристики:

1). Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$) (рис.2.16)

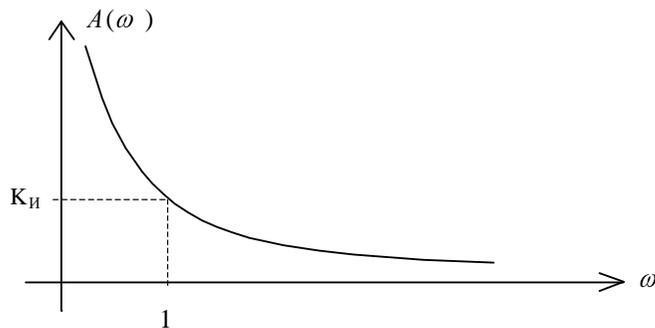


Рис.2.15. АЧХ интегрирующего звена

Характеристику можно пояснить на примере: Если на конденсатор C подать сигнал нулевой частоты \Rightarrow напряжение U_C растет до бесконечности {речь идет видимо о схеме замещения интегрирующего звена}.

Если $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow U_C \rightarrow 0$

2). ФЧХ ($\varphi(\omega)$) – фазовая частотная характеристика (рис.2.17).

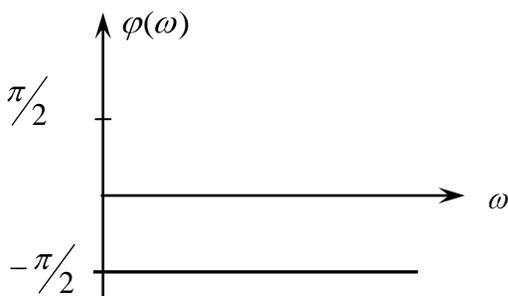


Рис.2.16. Фазовая частотная характеристика интегрирующего звена

3). Амплитудная фазовая характеристика АФХ – (годограф) (рис.2.18).

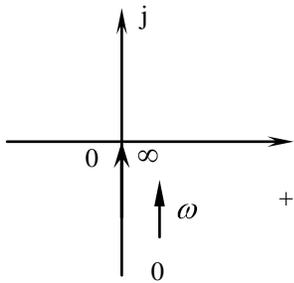


Рис.2.17. Годограф интегрирующего звена

4). Вещественная частотная характеристика ВЧХ ($P(\omega) = 0$).

5) Мнимая частотная характеристика МЧХ ($Q(\omega)$) (рис.2.19)

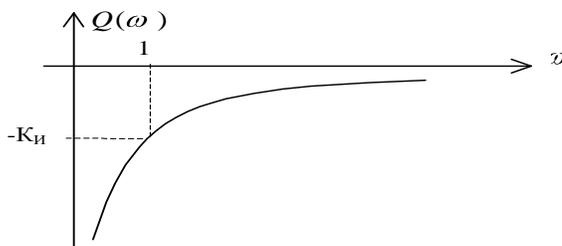


Рис.2.18. Мнимая частотная характеристика интегрирующего звена

6). Логарифмическая АЧХ (ЛАЧХ) (рис.2.20)

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{K_I}{\omega} = 20 \lg K_I - 20 \lg \omega$$

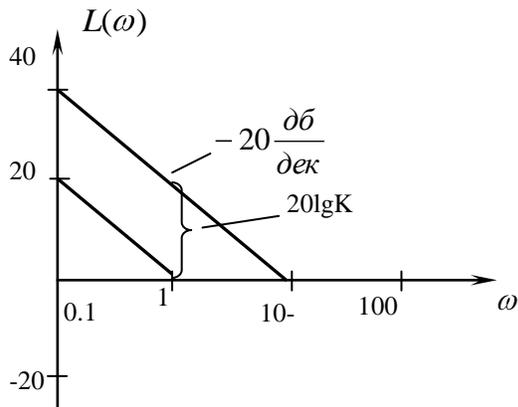


Рис.2.19. ЛАЧХ интегрирующего звена

Наклон -20 дБ/дек, коэффициент усиления $20 \lg K_I$ откладывается на частоте $\omega = 1$

6). Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ (рис.2.21).

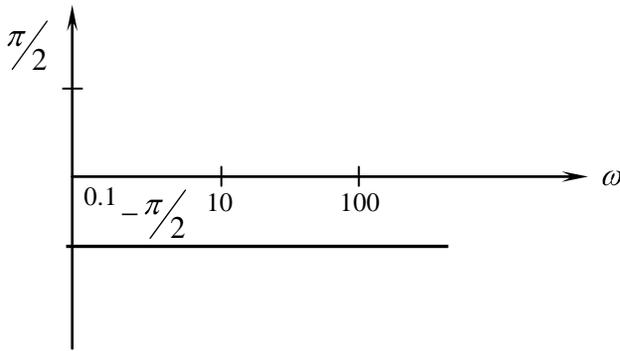


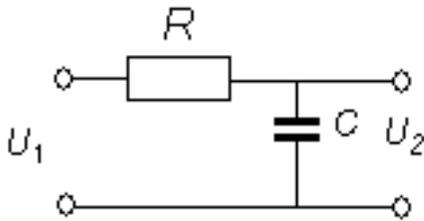
Рис.2.20. Фазовая логарифмическая частотная характеристика интегрирующего звена

2.4.3. Инерционное звено

Примеры:

А) генератор постоянного тока (ГПТ);

Б) RC – цепочка вида (рис.2.21)



$$Z_1(p) = R$$

$$Z_2(p) = \frac{1}{pC}$$

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{1}{RCp + 1}$$

Рис.2.21. RC-цепочка (инерционное звено)

Уравнение, описывающее инерционное звено:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t).$$

Передаточная функция: $W(p) = \frac{K}{1+Tp}$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} = \frac{K e^{j0}}{\sqrt{1+\omega^2 T^2} \cdot e^{j \arctg(\omega T)}} = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cdot e^{-j \arctg(\omega T)} = \frac{K(1-j\omega T)}{1+\omega^2 T^2} =$$

$$= \frac{K}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{K}{1+\omega^2 T^2}$$

где: $P(\omega) = \frac{K}{1+\omega^2 T^2}$

$$Q(\omega) = -j \frac{K}{1+\omega^2 T^2}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega T)$$

Перейдем к построению частных характеристик.

1) Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$)(рис.2.22).

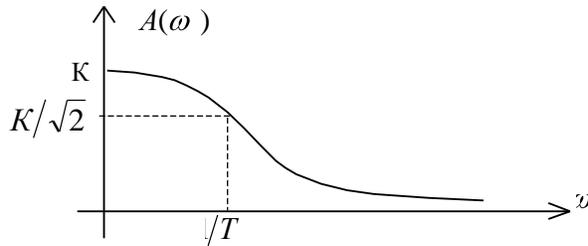


Рис.2.22. АЧХ инерционного звена

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$)(рис.2.23)

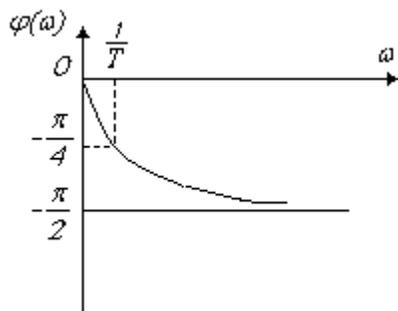


Рис.2.23. ФЧХ инерционного звена

3) Вещественная частотная характеристика ВЧХ ($P(\omega)$)(рис.2.24)

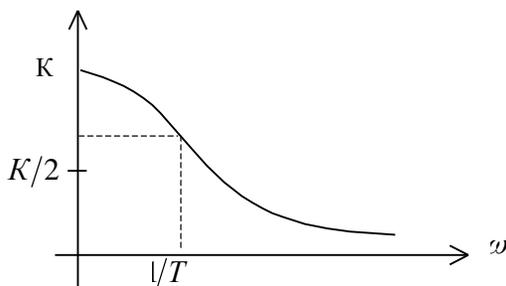


Рис.2.24. ВЧХ инерционного звена

4) Мнимая частотная характеристика МЧХ ($Q(\omega)$)(рис.2.25)

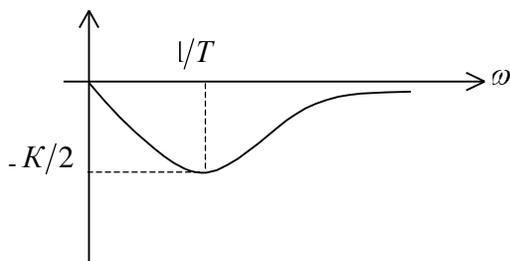


Рис.2.25. МЧХ инерционного звена

5) Амплитудная фазовая характеристика АФХ ($W(j\omega)$)(рис.2.26)

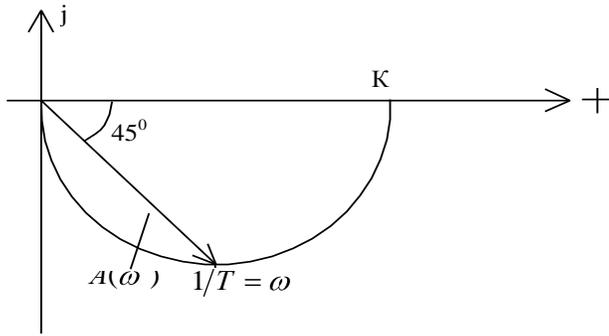


Рис.2.26. АФХ инерционного звена

Годограф входит в 0 под углом $-\pi/2$, так как при $\infty \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$, $A(\omega) = 0$

б) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$) (рис.2.27)

$$W(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega T}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$L'(\omega)$ - асимптотическая ЛАЧХ.

$\omega = \frac{1}{T}$ - частота сопряжения.

$$1. \omega < \frac{1}{T}; \quad \omega T < 1; \quad \omega^2 T^2 \ll 1$$

$$L_1(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg 1; \quad \lg 1 \rightarrow 0$$

$$2. \omega > \frac{1}{T}; \quad \omega T > 1; \quad \omega^2 T^2 > 1; \quad \text{пренебрегаем } 1$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega T = 20 \lg K - 20 \lg T - 20 \lg \omega$$

Характеристика идет с наклоном -20 (по оси ω), при $1/T$ - скачка не будет

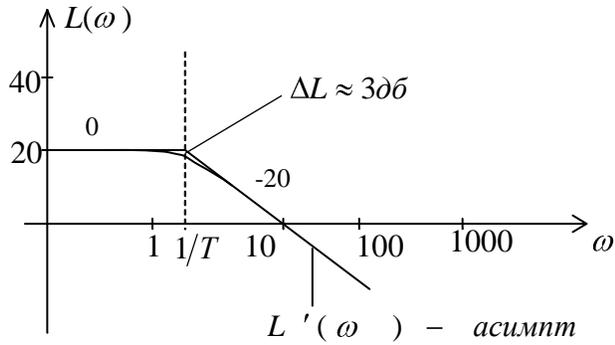


Рис.2.27. ЛАЧХ инерционного звена

7) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega) = -\arctg\omega T$) (рис.2.28)

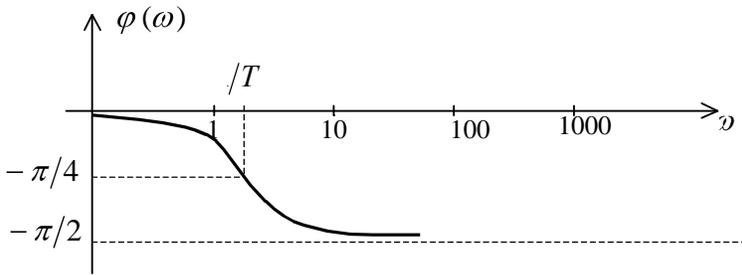


Рис.2.28. ЛФЧХ инерционного звена

Лекция 6

2.4.4. Колебательное звено. Лекция 6.

Примеры:

а) RLC – цепочка, представленная в 2.2.

б) Груз, подвешенный на пружине (рис.2.29):

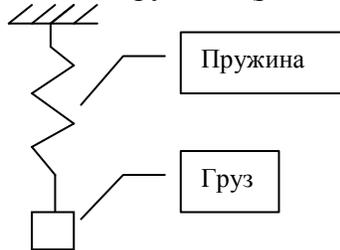


Рис.2.29. Пример колебательного звена

Уравнение, описывающее колебательное звено:

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$$

Передаточная функция колебательного звена:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}; \quad 0 < \xi < 1; \quad \omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega}$$

$$W(j\omega) = \frac{K e^{j0}}{A e^{j\varphi}}$$

$$(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega = \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \cdot e^{j\varphi}$$

$$\text{где: } A = \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}$$

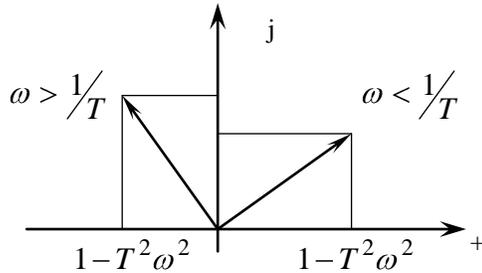
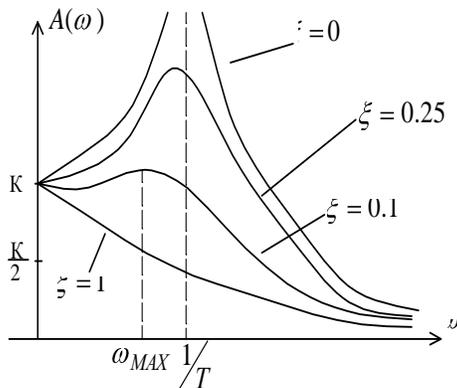


Рис.2.30. Представление на комплексной плоскости

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} & \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi - \arctg \frac{2\xi T\omega}{|1 - T^2\omega^2|} & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

1) Амплитудно-частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$)(рис.2.31)

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}}$$



$\omega_0 = \frac{1}{T}$ - резонансная частота.

$$A(1/T) = \frac{K}{2\xi}$$

Рассмотрим разные значения ξ

$$\xi = 0 \quad \xi = 0.525$$

$$\xi = 0.1 \quad \xi = 1$$

$$\omega_M = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\xi} - A(\omega_M) \Rightarrow \max$$

Рис.2.31. АЧХ колебательного звена

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$)(рис.2.32)

$\varphi(\omega) = -\varphi$ Построим для $\xi = 0.5 \rightarrow \xi = 1$
 $\xi = 0.2 \rightarrow \xi = 0$

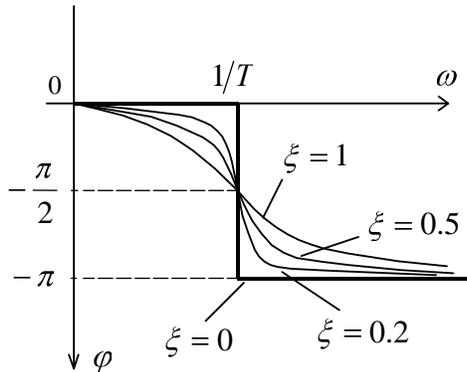


Рис.2.32. ФЧХ колебательного звена

2) Амплитудная фазовая характеристика АФХ($W(j\omega)$)(рис.2.33)

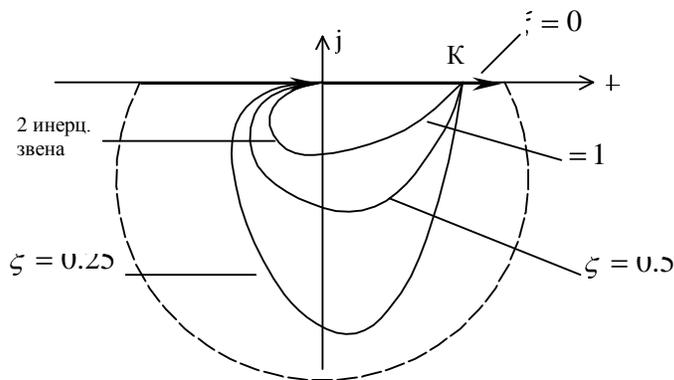


Рис.2.33. АФХ колебательного звена

3) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$)(рис.2.34)

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}$$

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}} \cong 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2} ;$$

Вторым слагаемым под корнем пренебрегаем.

Строится асимптотическая ЛАЧХ:

Частота сопряжения - $\omega = 1/T$.

1) $\omega < 1/T$; $\omega^2 T^2 \ll 1$ пренебрегаем $\omega^2 T^2$

$$L_1(\omega) = 20 \lg K$$

2) $\omega > 1/T$; $\omega^2 T^2 \gg 1$ пренебрегаем 1

Годограф приходит в ноль под углом $(-\pi)$. При $\xi = 0$ годограф идет от K по оси, затем при $\omega = 1/T$ - разрыв и входит в 0 по действительной отрицательной оси (генератор незатухающих колебаний).

$$L_2(\omega) = 20 \lg K - 40 \lg \omega T$$

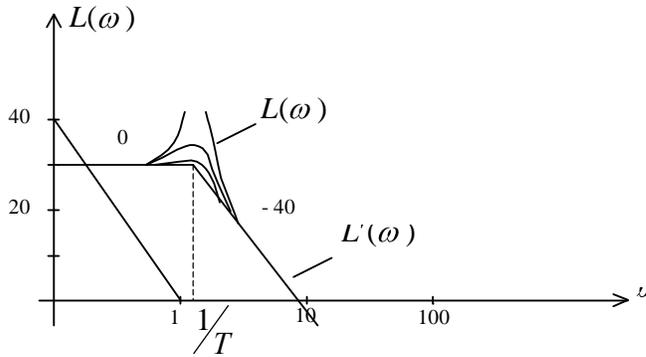


Рис.2.34. ЛАЧХ колебательного звена

4) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ (рис.2.35):

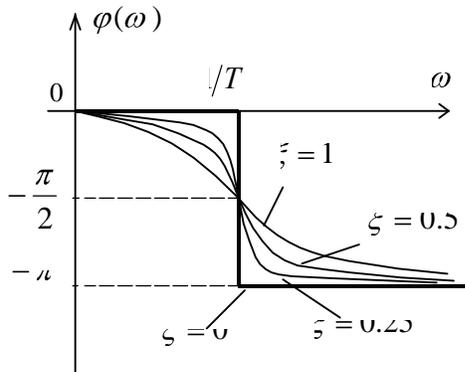


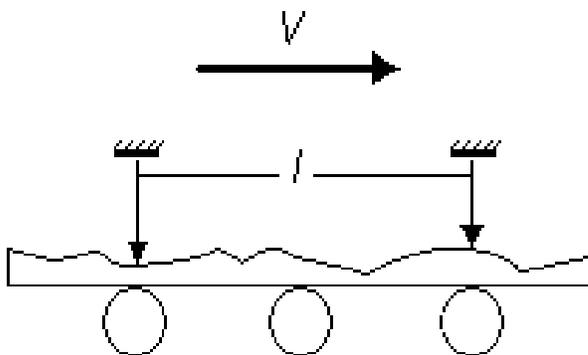
Рис.2.35. ЛФЧХ колебательного звена

2.4.5. Звено запаздывания

Примеры:

А) Длинная линия

Б) Конвейер (рис.2.36)



Величина запаздывания:

$$\tau = \frac{l}{V}$$

Где l – расстояние между датчиками,

V – скорость конвейерной ленты.

Рис.2.36. Пример звена запаздывания

Уравнение, описывающее звено запаздывания:

$$y(t) = Kx(t - \tau).$$

Передаточная функция:

$$W(p) = K e^{-p\tau}$$

$$W(j\omega) = K e^{-j\omega\tau} = K \cos \omega\tau - jK \sin \omega\tau$$

$$P(\omega) = K \cos \omega\tau$$

$$Q(\omega) = -K \sin \omega\tau$$

$$A(\omega) = K$$

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau$$

1) Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$)(рис.2.37)

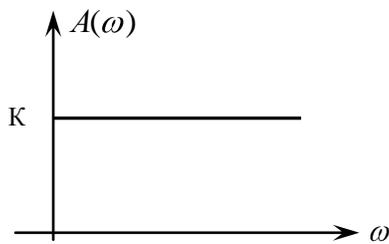


Рис.2.37. АЧХ звена запаздывания

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$)(рис.2.38)

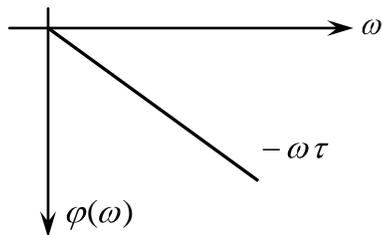


Рис.2.38. ФЧХ звена запаздывания

3) Амплитудная фазовая характеристика АФХ, $W(j\omega)$ - годограф (рис.2.38)

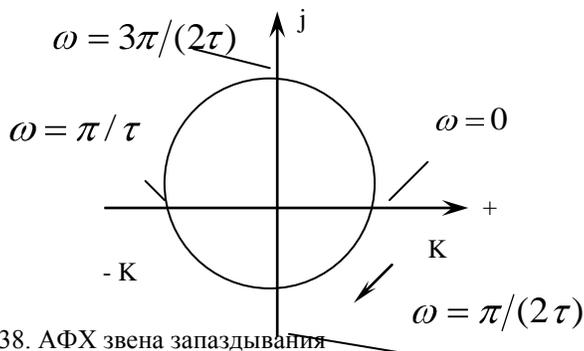


Рис.2.38. АФХ звена запаздывания

2.4.6. Идеальное и реальное дифференцирующие звенья

1. Идеальное дифференцирующее звено

Примеры:

А) Вал, у которого угол поворота связан с угловой скоростью вращения интегральным

соотношением: $\varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$, а угловая скорость связана с углом поворота

дифференциальным соотношением: $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$

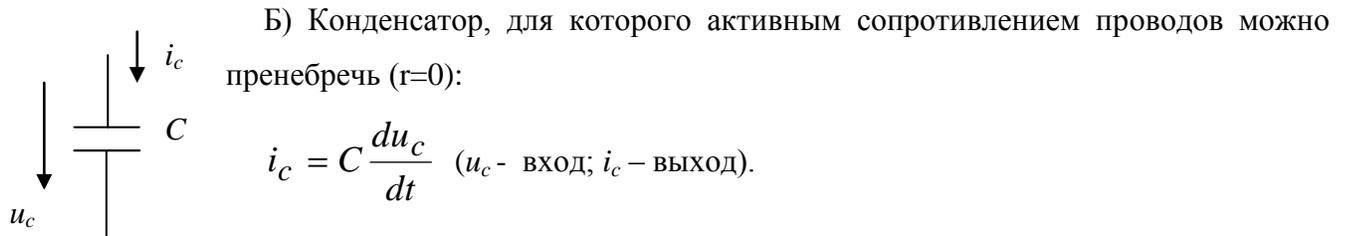


Рис.2.39. Пример идеального дифференцирующего звена

Уравнение, описывающее идеальное дифференцирующее звено:

$$y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}.$$

Передаточная функция звена: $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = Kp$

Комплексный коэффициент усиления: $W(j\omega) = Kj\omega = 0 + jK\omega$.

$$P(\omega) = 0$$

$$Q(\omega) = K\omega$$

$$A(\omega) = K\omega$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

1. Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$)(рис.2.40)

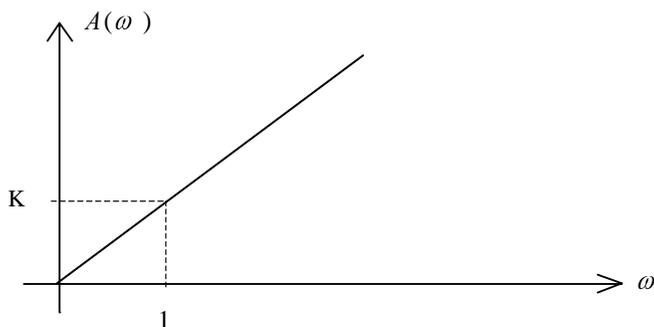


Рис.2.40. АЧХ идеального дифференцирующего звена

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.41)

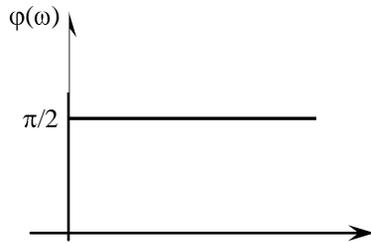


Рис.2.41. ФЧХ идеального дифференцирующего звена

3) Амплитудная фазовая характеристика АФХ ($W(j\omega)$) (рис.2.42)

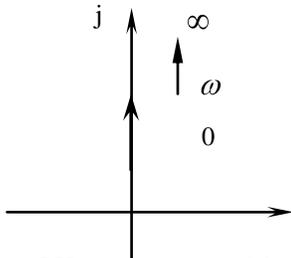


Рис.2.42. АФХ идеального дифференцирующего звена

4) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$) (рис.2.43)

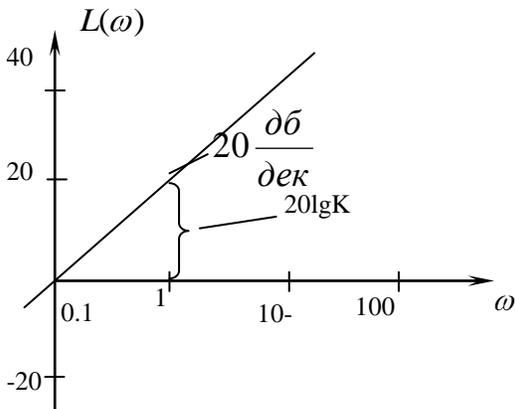


Рис.2.43. ЛАЧХ идеально дифференцирующего звена

5) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ ($\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$):

2. Реальное дифференцирующее звено

Примеры: А) Конденсатор, для которого активным сопротивлением проводов нельзя

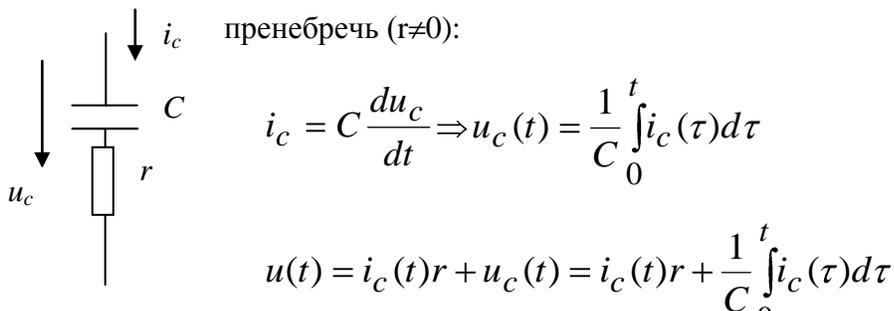


Рис.2.44. Пример реального дифференцирующего звена

$$Cr \cdot \frac{di_c(t)}{dt} + i_c(t) = Cu(t) \quad (i_c - \text{выход}; u(t) - \text{вход})$$

Уравнение, описывающее идеальное дифференцирующее звено:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}.$$

Передаточная функция звена: $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Kp}{Tp+1}$

Комплексный коэффициент усиления:

$$W(j\omega) = \frac{Kj\omega}{Tj\omega+1} = \frac{K\omega \cdot e^{j\pi/2}}{\sqrt{1+T^2\omega^2} \cdot e^{j\arctg(\omega T)}} = \frac{KT \cdot \omega^2}{1+T^2\omega^2} + j \frac{K\omega}{1+T^2\omega^2}.$$

$$P(\omega) = \frac{KT \cdot \omega^2}{1+T^2\omega^2}; \quad Q(\omega) = \frac{K\omega}{1+T^2\omega^2}; \quad A(\omega) = \frac{K\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega T).$$

1. Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$)(рис.2.45)

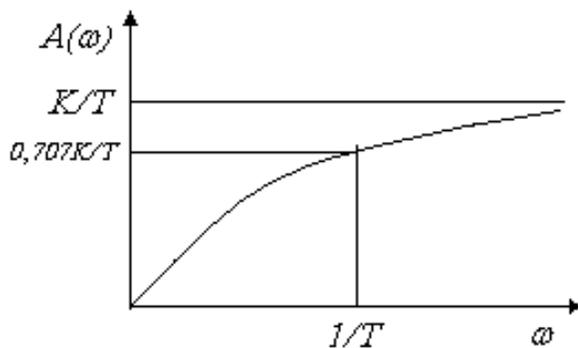


Рис.2.45. АЧХ реального дифференцирующего звена

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$)(рис.2.46)

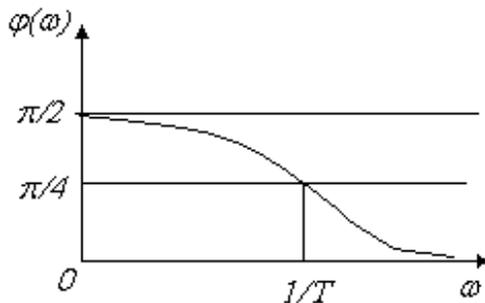


Рис.2.46. ФЧХ реального дифференцирующего звена

3) Амплитудная фазовая характеристика АФХ($W(j\omega)$)(рис.2.47)

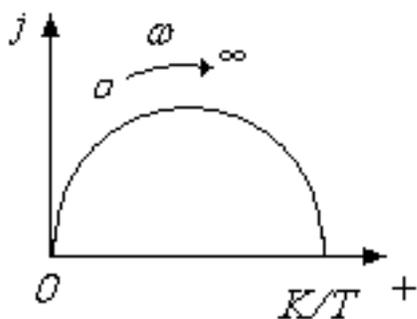


Рис.2.47. АФХ реального дифференцирующего звена

4) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$) (рис.2.48)

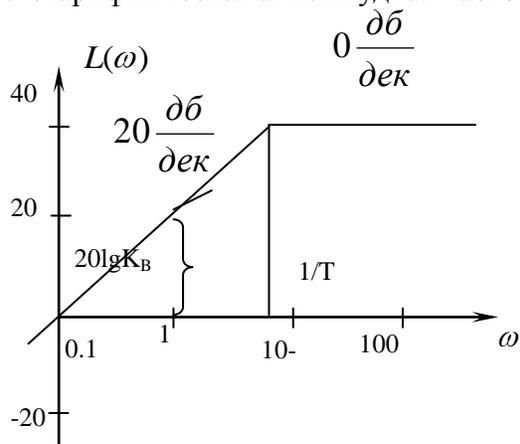


Рис.2.48. ЛАЧХ реального дифференцирующего звена

5) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.49)

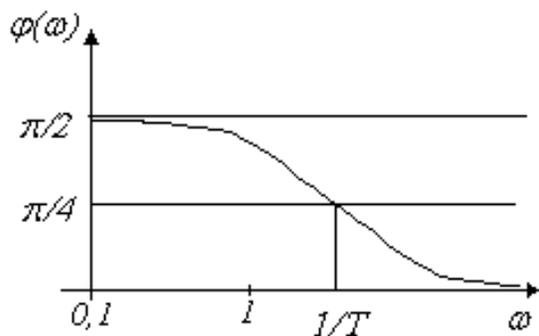
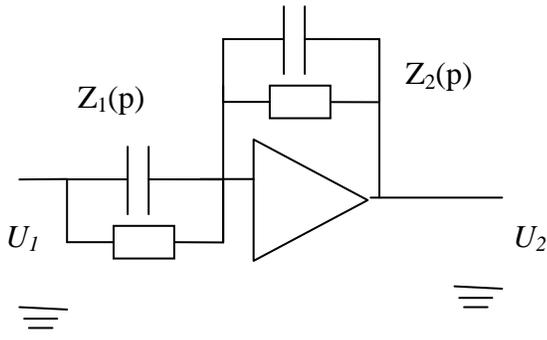


Рис.2.49. ЛФЧХ реального дифференцирующего звена

Лекция 7

2.4.7. Упругие звенья. Лекция 7.

Примеры: Схема на операционном усилителе (Операционный усилитель – усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления, ограниченным выходным напряжением, большим входным и малым выходным сопротивлением, таким образом справедливы ниже приведенные соотношения:



$$Z_1(p) = \frac{R_1 \cdot 1/pC_1}{R_1 + 1/pC_1} = \frac{R_1}{1 + pC_1R_1}$$

$$Z_2(p) = \frac{R_2 \cdot 1/pC_2}{R_2 + 1/pC_2} = \frac{R_2}{1 + pC_2R_2}$$

$$W(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1 + pC_1R_1}{1 + pC_2R_2} = K \frac{1 + pT_1}{1 + pT_2}$$

Рис.2.50. Модель упругого звена

$$W(j\omega) = K \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T_2} = K \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \cdot e^{j \arctg(\omega T_1)}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} \cdot e^{j \arctg(\omega T_2)}} = K \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}} \cdot e^{j(\arctg(\omega T_1) - \arctg(\omega T_2))} =$$

$$K \frac{1 + \omega^2 T_1 T_2}{1 + \omega^2 T_2^2} + jK \frac{\omega(T_1 - T_2)}{1 + \omega^2 T_2^2}$$

$$P(\omega) = K \frac{1 + \omega^2 T_1 T_2}{1 + \omega^2 T_2^2}; \quad Q(\omega) = K \frac{\omega(T_1 - T_2)}{1 + \omega^2 T_2^2}; \quad A(\omega) = K \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(\omega T_1) - \arctg(\omega T_2)$$

Упругое интегрирующее звено ($T_2 > T_1$) (на определенном диапазоне частот ведет себя как интегрирующее звено)

- 1) Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$) (рис.2.51)

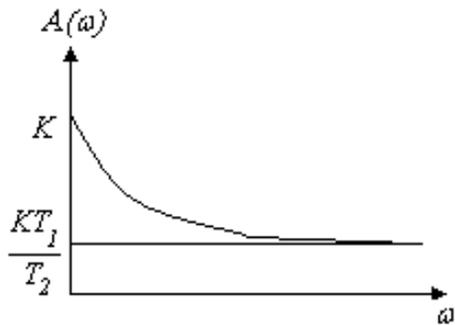


Рис.2.51. АЧХ упругого интегрирующего звена

- 2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.52)

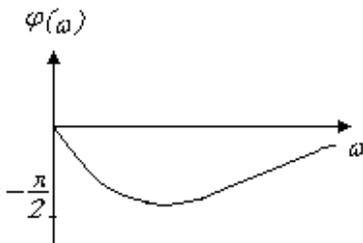


Рис.2.52. ФЧХ упругого интегрирующего звена

3) Амплитудная фазовая характеристика АФХ($W(j\omega)$)(рис.2.53)

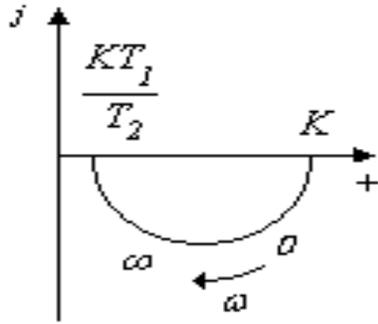


Рис.2.53. АФХ упругого интегрирующего звена

4) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$)(рис.2.54)

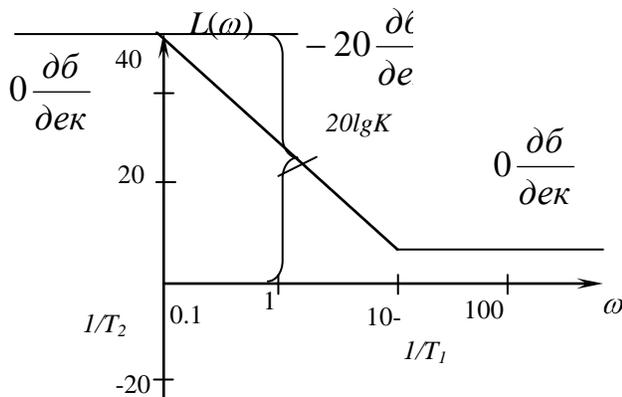


Рис.2.54. ЛАЧХ упругого интегрирующего звена

5) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ ($\varphi(\omega)$)(рис.2.55)

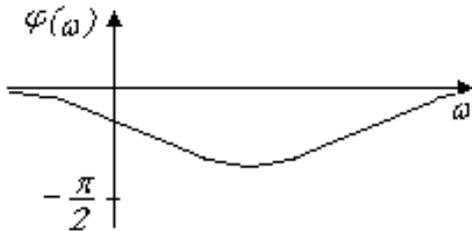


Рис.2.55. ЛФЧХ упругого интегрирующего звена

Упругое дифференцирующее звено ($T_2 < T_1$)(на определенном диапазоне частот ведет себя как дифференцирующее звено)

1) Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$)(рис.2.56)

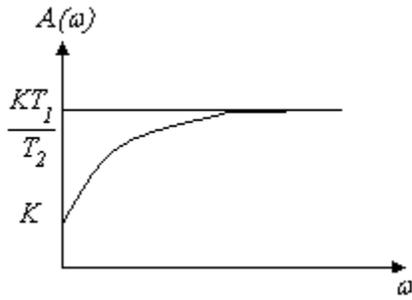


Рис.2.56. АЧХ упругого дифференцирующего звена

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.57)

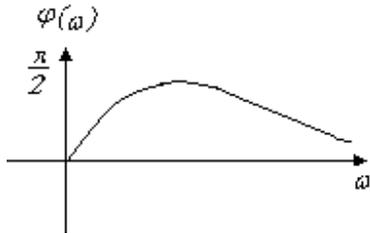


Рис.2.57. ФЧХ упругого дифференцирующего звена

3) Амплитудная фазовая характеристика АФХ ($W(j\omega)$) (рис.2.58)

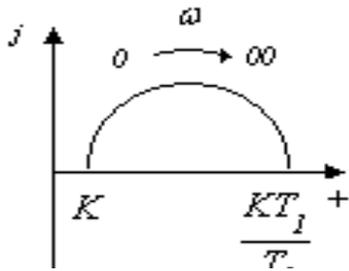


Рис.2.58. АФХ упругого дифференцирующего звена

4) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$) (рис.2.59)

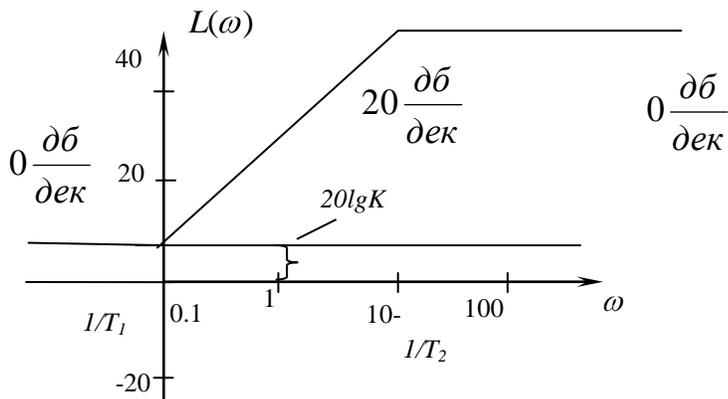


Рис.2.59. ЛАЧХ упругого дифференцирующего звена

5) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.60)

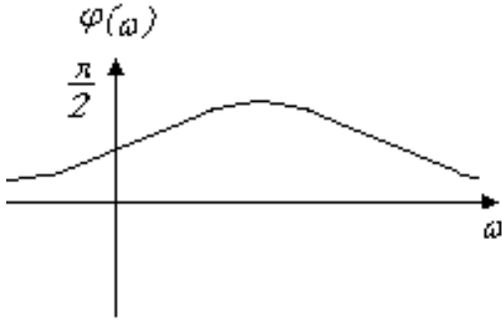


Рис.2. 60. ЛФЧХ упругого дифференцирующего звена

2.5. Построение логарифмических частотных характеристик по передаточной функции разомкнутой системы.

Рассмотрим процесс построения логарифмических характеристик на примере заданной передаточной функции системы, а именно:

$$\text{Дано: } W(p) = \frac{K(1 + pT_2)^2}{p(1 + pT_1) \cdot (1 + 2\xi T_3 p + T_3^2 p^2)}$$

$$K=100; \quad T_1 = 2 \text{ с.} \quad T_2 = 0.5 \text{ с.} \quad T_3 = 0.02 \text{ с.} \quad \xi = 0.5.$$

Для построения частотных характеристик перейдем к комплексному коэффициенту усиления, заменив p на $j\omega$ и представив каждый множитель в полярной системе координат как амплитуду и соответствующую ей фазу:

$$W(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_2)^2}{j\omega \cdot (1 + j\omega T_1) \cdot (1 - T_3^2 \omega^2 + j2\xi T_3 \omega)} = \frac{A_0 e^{j\varphi_0} \cdot A_2^2 e^{2j\varphi_2}}{A_4 e^{j\varphi_4} \cdot A_1 e^{j\varphi_1} \cdot A_3 e^{j\varphi_3}} =$$

$$= \frac{A_0 A_2^2}{A_4 A_1 A_3} e^{j(\varphi_0 + 2\varphi_2 - \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_3)}$$

Перечислим звенья и их представление в следующем порядке:

0 - K ;

1 - $(1 + j\omega T_1)$;

2 - $(1 + j\omega T_2)^2$;

3 - $(1 - T_3^2 \omega^2 + j2\xi T_3 \omega)$;

4 - $j\omega$.

$$0) K = K e^{j0}$$

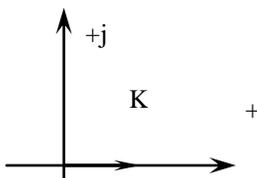


Рис.2.61(а). Представление на комплексной плоскости

$$1) 1 + j\omega T_1 = \sqrt{1^2 + \omega^2 T_1^2} \cdot e^{j \arctg \omega T_1}$$

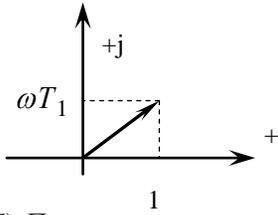


Рис.2.61(б). Представление на комплексной плоскости

$$2) 1 + j\omega T_2 = \sqrt{1^2 + \omega^2 T_2^2} \cdot e^{j \arctg \omega T_2}$$

Представляется на комплексной плоскости аналогично звену 1).

$$4) j\omega = \omega e^{j \frac{\pi}{2}}$$

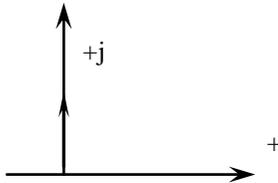


Рис.2.61(в). Представление на комплексной плоскости

$$3) (1 - \omega^2 T_3^2) + j2\xi T_3 \omega = \sqrt{(1 - \omega^2 T_3^2)^2 + 4\xi^2 T_3^2 \omega^2} \cdot e^{j\varphi}$$

$$(*) \varphi = \begin{cases} \arctg \frac{2\xi T_3 \omega}{1 - T^2 \omega^2} & \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi - \arctg \frac{2\xi T_3 \omega}{|1 - T^2 \omega^2|} & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

Теперь запишем выражения для амплитуды и фазы комплексного коэффициента усиления всей системы:

$$A(\omega) = \frac{K(\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2})^2}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \cdot \sqrt{(1 + T_3^2 \omega^2)^2 + \varphi \xi^2 T_3^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 2 \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_1 - \frac{\pi}{2} - \varphi$$

где φ - задается выражением (*).

$$K=100; \quad T_1 = 2; \quad T_2 = 0.5; \quad T_3 = 0.02; \quad \xi = 0.5.$$

Строим ЛАЧХ, ЛФЧХ, АФХ.

2.5.1. Построение ЛАЧХ

Запишем выражение для ЛАЧХ, прологарифмировав амплитудную частотную характеристику системы $A(\omega)$:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} + 40 \lg \sqrt{1 + (\omega T_2)^2} - 20 \lg \sqrt{(1 - T_3^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T_3^2 \omega^2};$$

Запишем частоты сопряжения в порядке их возрастания:

$$\omega_1 = 1/T_1 = 0.5$$

$$\omega_2 = 1/T_2 = 2$$

$$\omega_3 = 1/T_3 = 50$$

И рассмотрим участки асимптотической ЛАЧХ:

$$\mathbf{0 \text{ участок:}} \quad \omega < 1/T_1 \quad \omega T_1 < 1 \quad \omega T_2 < 1 \quad \omega T_3 < 1$$

$$L_0(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega$$

1-й участок:

$$\omega_1 < \omega < \omega_2 \quad \frac{1}{T_1} < \omega < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3}$$

$$\Rightarrow \omega > \frac{1}{T_1}; \quad \omega < \frac{1}{T_2}; \quad \omega < \frac{1}{T_3}$$

$$\omega T_1 > 1; \quad \omega T_2 < 1; \quad \omega T_3 < 1$$

$$L'_1(\omega) = L'_0 - 20 \lg \omega T_1 = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \omega T_1 = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \omega - 20 \lg T_1 = -40 \lg \omega + 20 \lg \frac{K}{T_1}$$

2-ой участок

$$\omega_2 < \omega < \omega_3$$

$$\frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3}$$

$$\omega T_1 > 1; \quad \omega T_2 > 1; \quad \omega T_3 < 1$$

$$L'_2(\omega) = L'_1(\omega) + 40 \lg \omega T_2 = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \omega T_1 + 40 \lg \omega T_2 = 20 \lg \frac{KT_2^2}{T_1} + 0 \lg \omega$$

3-й участок.

$$L'_3(\omega) = L'_2(\omega) - 40 \lg T_3 \omega = 20 \lg \frac{KT_2^2}{T_1 T_3^2} - 40 \lg \omega$$

Таким образом, видно, что асимптотическая ЛАЧХ состоит из 4-х прямолинейных участков с наклонами, определенными для каждого участка в отдельности.

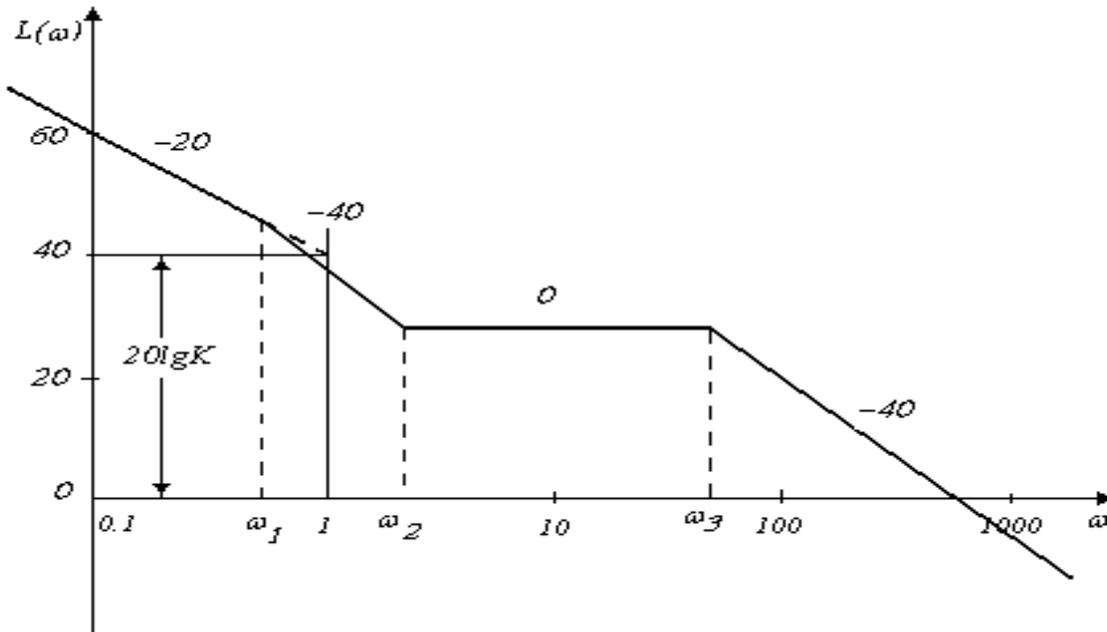


Рис.2.62 Асимптотическая ЛАЧХ

2.5.2. Построение ЛФЧХ

Запишем выражение для фазовой частотной характеристики:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\xi T_3 \omega}{1 - T_3^2 \omega^2} & \omega \leq \frac{1}{T_3} \\ \pi - \arctg \frac{2\xi T_3 \omega}{|1 - T_3^2 \omega^2|} & \omega > \frac{1}{T_3} \end{cases} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega T_1 + 2 \arctg \omega T_2 - \varphi$$

Звенья записаны по порядку следования, т.е. $-\frac{\pi}{2}$ – нулевое, $-\arctg \omega T$ – первое и т.д.

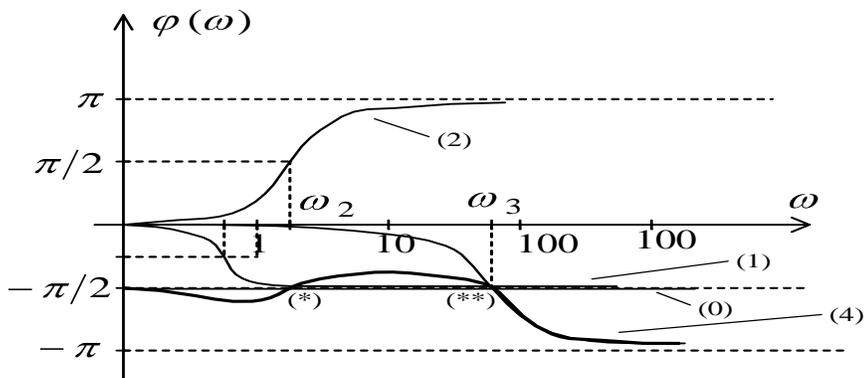


Рис.2.63. Логарифмическая фазовая частотная характеристика

Таким образом, построив фазовые частотные характеристики отдельных звеньев и просуммировав их. Получаем фазовую частотную характеристику заданной системы.

2.5.3. Построение АФХ.

Построение проводится по амплитудной частотной характеристике и по фазовой частотной характеристике. Вид амплитудной частотной характеристики представлен на рисунке 2.64:

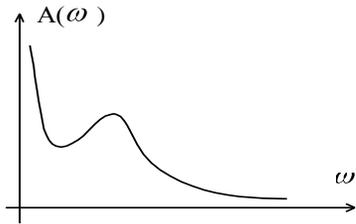


Рис.2.64. АЧХ системы

Определим значения амплитудной и фазовой частотных характеристик в нуле и на бесконечности:

$$A(0) = \infty \quad A(\infty) = 0$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi(\infty) = -\pi$$

По построенным АЧХ и ФЧХ можно представить вид амплитудной фазовой характеристики (рис.2.65):

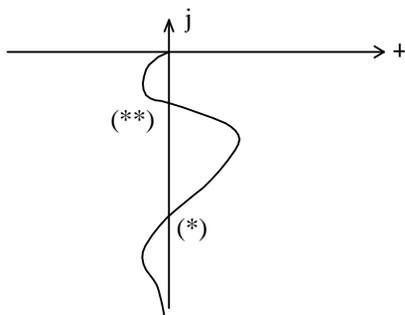


Рис.2.65 АФХ системы

На фазовой характеристике и на АФХ звездочками отмечены соответствующие частоты.

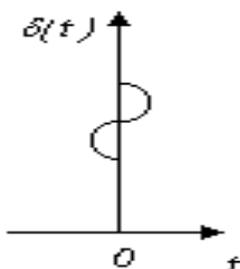
Лекция 8

2.6. Временные характеристики САУ. Лекция 8.

Временные характеристики – это реакция систем на типовые входные воздействия.

2.6.1. Типовые входные сигналы и их изображения по Лапласу

1. Единичный импульс (δ - функция Дирака) определяется выражением:



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

Единичный импульс графически представляется в виде рис.2.66:

Рис.2.66. δ -функция Дирака

Найдем изображение единичного импульса по Лапласу:

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)e^{-p \cdot 0} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

Реакцией системы на единичный импульс является *весовая, или импульсная переходная функция* $w(t)$.

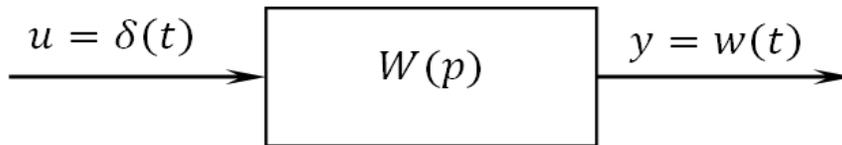


Рис.2.67. Передаточная функция системы

Найдем изображение единичного импульса по Лапласу:

$$L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

В соответствии с определением передаточной функции можно записать:

$$W(p) = \frac{L\{w(t)\}}{L\{\delta(t)\}} = \frac{L\{w(t)\}}{1} \Rightarrow L\{w(t)\} = W(p) \Rightarrow w(t) = L^{-1}\{W(p)\}$$

Т.е. $\boxed{W(p) = L\{w(t)\} \quad w(t) = L^{-1}\{W(p)\}}$

2. Единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда) $1(t)$ определяется выражением:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Единичная ступенчатая функция графически представляется в виде (рис.2.68):

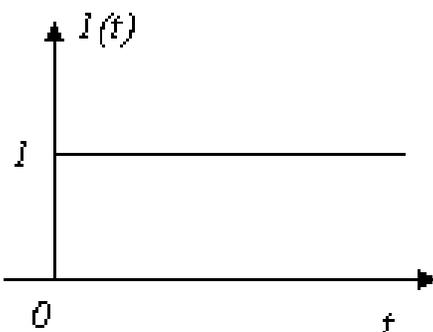


Рис.2.68. Функция Хевисайда

Реакцией системы на единичную ступенчатую функцию является *переходная функция* $h(t)$ (2.69).

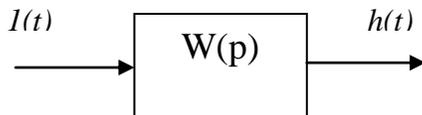


Рис.2.69. Получение переходной функции системы

В соответствии с определением передаточной функции можно записать:

$$W(p) = \frac{L\{h(t)\}}{L\{1(t)\}} = \frac{L\{h(t)\}}{1/p} \Rightarrow L\{h(t)\} = \frac{W(p)}{p} \Rightarrow h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}$$

Найдем соотношение между весовой и переходной функциями, исходя из соотношений:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} \qquad h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}$$

Очевидно, что $w(t) = \frac{dh(t)}{dt} \qquad h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$

3. Степенные функции $f_n(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot 1(t)$.

Изображения по Лапласу можно найти аналогично предыдущим расчетам. Легко показать,

что $L(f_n(t)) = \frac{1}{p^{n+1}}$

Представим изображения по Лапласу функций времени в виде таблицы

Оригинал	Изображение
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^n}{n!} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
$e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p + \alpha}$

$e^{\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{p - \alpha}$
$e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t) \cdot 1(t)$	$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$

2.6.2. Способы построения временных характеристик систем

1) Экспериментальный способ реализуется подачей на систему типовых входных сигналов.

2) Теоретический способ (зависит от имеющегося математического описания)

а) по дифференциальным уравнениям;

1. решение аналитическими методами,

2. численное решение дифференциальных уравнений (Метод Эйлера, Метод Рунге-

Кутта и др.)

в) по частотным характеристикам, используя $P(\omega)$ и $Q(\omega)$

Получение временных характеристик по частотным (вещественной и мнимой) характеристикам:

$$w(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

$P(\omega)$ – вещественная частотная характеристика,

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$h(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \left(\int_0^t \cos \omega \tau d\tau \right) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega.$$

г) по структурным схемам.

Получение временных характеристик по структурным схемам производится в основном в пакетах прикладных программ для моделирования динамических систем (например, Matlab Simulink и пр.)

3. Формула разложения.

Используем формулу разложения для определения оригиналов по изображениям, имеющим вид:

$$X(p) = \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} \quad Y(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \text{ где}$$

$A(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_n = a_0(p - p_1) \cdot (p - p_2) \dots (p - p_n)$ - полином n -го порядка, $B(p)$ - полином m - го порядка.

При этом сделаем предположения:

А) степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. дробь правильная;

Б) корни $A(p)$ – простые, т.е. не кратные;

В) $a_n \neq 0$

Тогда, как известно, дробно-рациональное выражение $X(p)$ может быть разложена на простые дроби:

$$X(p) = \frac{B(p)}{p \cdot a_0(p-p_1)\dots(p-p_n)} = \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p-p_1} + \dots + \frac{C_n}{p-p_n}$$

$$\frac{C_0}{p} = \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} - \frac{C_1}{p-p_1} - \frac{C_2}{p-p_2} - \dots - \frac{C_n}{p-p_n}$$

$$C_0 = \frac{B(p) \cdot p}{p \cdot A(p)} - \frac{C_1 \cdot p}{p-p_1} - \frac{C_2 \cdot p}{p-p_2} - \dots - \frac{C_n \cdot p}{p-p_n}$$

Получили тождество, т.е. равенство, справедливое при всех значениях p , поэтому для простоты

положим $p = 0$. Тогда $C_0 = \frac{B(0)}{A(0)}$.

Выделим j -ое слагаемое:

$$\frac{C_j}{p-p_j} = \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} - \frac{C_0}{p} - \frac{C_1}{p-p_1} - \dots - \frac{C_{j-1}}{p-p_{j-1}} - \frac{C_{j+1}}{p-p_{j+1}}$$

$$C_j = \frac{B(p) \cdot (p-p_j)}{p \cdot A(p)} - \frac{C_0(p-p_j)}{p} - \frac{C_n(p-p_j)}{p-p_n}$$

$$p_j = p \quad i \neq j$$

$$C_j = \frac{B(p)}{p \cdot A'(p)} \Big|_{p=p_j}; \quad i = 1 \dots n; \quad C_i = \frac{B(p_i)}{p_i \cdot A'(p_i)}$$

Покажем, что сокращение множителя $(p-p_i)$ равносильно взятию производной $\frac{dA(p)}{dp} \Big|_{p=p_i}$:

$$A'(p) = \frac{dA(p)}{dp} \Big|_{p=p_i}$$

$$A'(p) = a_0(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n);$$

$$A'(p) = a_0(p-p_2)\dots(p-p_n) + a_0(p-p_1)(p-p_3)\dots(p-p_n) + \dots + a_0(p-p_1)\dots(p-p_{n-1})$$

$$A'(p_i) = a_0(p-p_1)\dots(p-p_{i-1})(p-p_{i+1})\dots(p-p_n)$$

Таким образом, изображение $X(p)$ можно представить в виде:

$$X(p) = \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} = \frac{B(0)}{A(0)} \cdot \frac{1}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} \Big|_{p_i} \cdot \frac{1}{p - p_i}, \text{ откуда}$$

$$x(t) = \frac{B(0)}{A(0)} \cdot 1(t) + \sum_{i=1}^n \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} \Big|_{p_i} \cdot e^{p_i t} \cdot 1(t) = \left(\frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} \Big|_{p_i} \right) \cdot 1(t)$$

Отметим, что оригиналы $y(t)$ и $x(t)$ связаны соотношением:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \text{ поэтому продифференцируем полученный сигнал } x(t) \text{ по времени, учитывая, что}$$

он представляет собой произведение двух функций времени. Тогда

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p)}{A(p)} \Big|_{p_i} \cdot e^{p_i t} \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot x(0)$$

Второй член $y(t)$ возникает только когда $x(0) \neq 0$.

2.6.3. Временные характеристики типовых звеньев

2.6.3.1. Безынерционное (пропорциональное) звено

$$W(p) = k$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\{k\} = k \cdot \delta(t)$$

$$\text{Переходная функция звена: } h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p}\right\} = k \cdot 1(t)$$

Графики функций представлены на рисунках (рис.2.70):

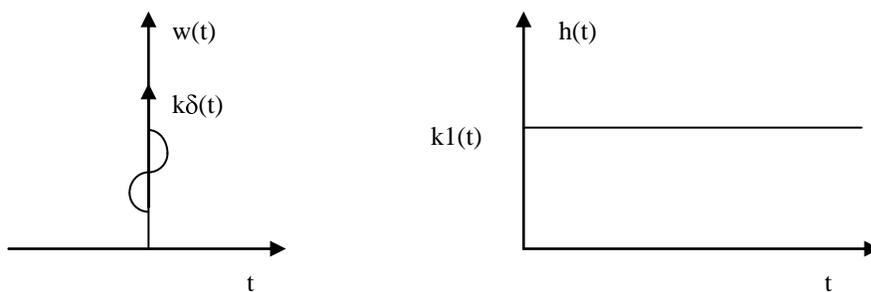


Рис. 2.70. Весовая и переходная функции безынерционного звена

2.6.3.2. Интегрирующее звено

$$W(p) = \frac{k}{p}$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p}\right\} = k \cdot 1(t)$$

Переходная функция звена: $h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p^2}\right\} = k \cdot t \cdot 1(t)$

Графики функций представлены на рисунках (рис.2.71):

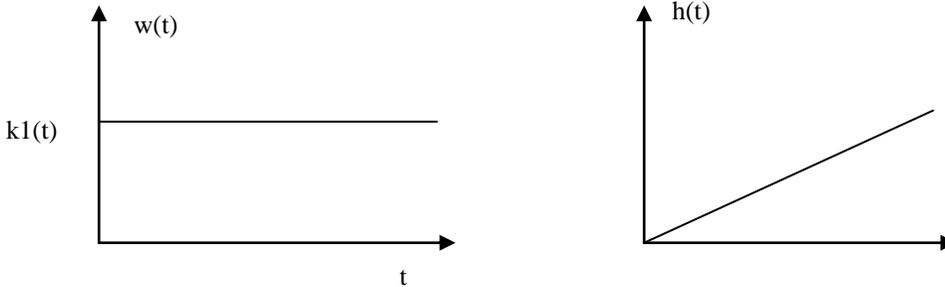


Рис. 2.71. Весовая и переходная функции интегрирующего звена

t

2.6.3.3. Инерционное звено

$$W(p) = \frac{k}{1 + pT}$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{1 + pT}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k/T}{1/T + p}\right\} = \frac{k}{T} L^{-1}\left\{\frac{1}{1/T + p}\right\} = \frac{k}{T} \cdot e^{-t/T} 1(t)$$

Переходная функция звена: $h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p(1 + pT)}\right\}$

Для вычисления переходной функции можно воспользоваться формулой разложения или методом неопределенных коэффициентов, в соответствии с которым получим:

$$\frac{k}{p(1 + pT)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + pT};$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты числителей, получим:

$$A = k, \quad B + AT = 0, \quad B = -kT, \quad \frac{k}{p(1 + pT)} = \frac{k}{p} - \frac{kT}{1 + pT}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p(1 + pT)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p} - \frac{kT}{1 + pT}\right\} = (k - ke^{-t/T}) \cdot 1(t)$$

Графики функций представлены на рисунках (рис.2.72):

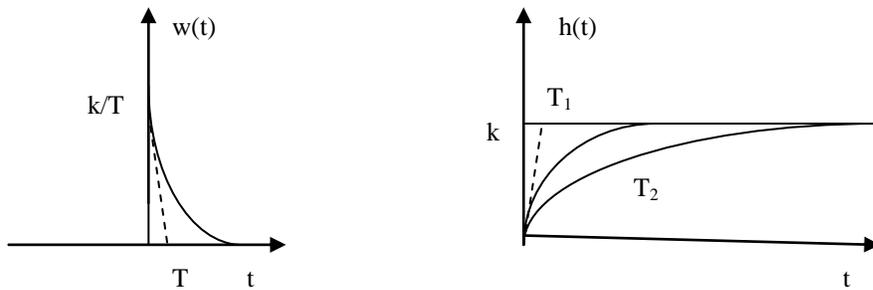


Рис. 2.72. Весовая и переходная функции инерционного звена

k – Коэффициент усиления, характеризующий усилительные свойства звена и равный отношению выходного сигнала ко входному в установившемся режиме (при подаче на вход постоянного входного сигнала);

T – постоянная времени звена, характеризующая инерционные свойства (на рисунке $T_1 < T_2$).

Лекция 9

2.6.3.4. Колебательное звено. Лекция 9.

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2} \quad \omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2\xi \omega_0 p + \xi^2 \omega_0^2 - \xi^2 \omega_0^2 + \omega_0^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}}{(p + \xi \omega_0)^2 + (\omega_0 \sqrt{1-\xi^2})^2} \right\} =$$

$$= K \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t) \cdot 1(t)$$

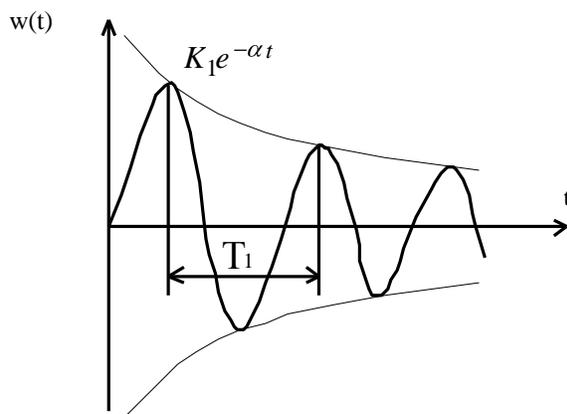


Рис. 2.73. Весовая функции колебательного звена

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t) d\tau = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau d\tau$$

$$h(t) = \left(k - \frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \sin \left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \arctg \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi}} \right) \right) \cdot 1(t)$$

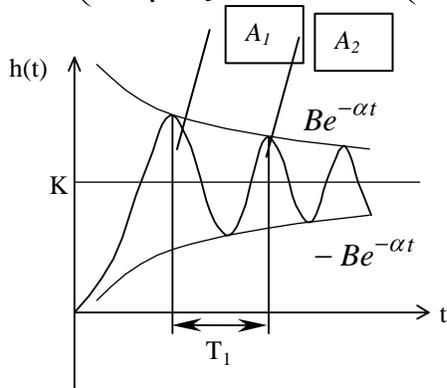


Рис. 2.74. Переходная функции колебательного звена

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \quad A_1 = Be^{-\alpha t_1} \quad A_2 = Be^{-\alpha(t_1+T_1)}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{Be^{-\alpha t_1}}{Be^{-\alpha(t_1+T_1)}} = e^{\alpha T_1} \quad \alpha = \frac{1}{T_1} \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \quad \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 + \alpha^2} \quad T = \frac{1}{\omega_0}$$

2.6.3.5. Звено запаздывания

$$W(p) = K \cdot e^{-p\tau}$$

$$w(p) = L^{-1}\{Ke^{-p\tau}\} = K\delta(t-\tau)$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{Ke^{-p\tau} \cdot \frac{1}{p}\right\} = K \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p} \cdot e^{-p\tau}\right\} = K \cdot 1(t-\tau)$$

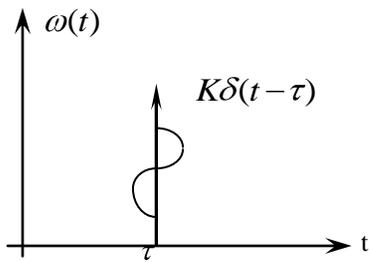


Рис. 2.75. Весовая функции звена запаздывания

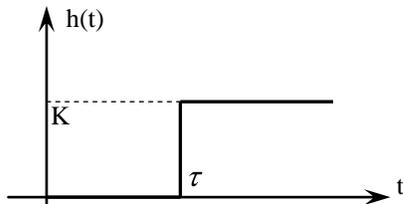


Рис. 2.76. Переходная функции звена запаздывания

2.6.3.6. Идеальное и реальное дифференцирующие звенья

А) Идеальное дифференцирующее звено

$$W(p) = k \cdot p$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\{k \cdot p\} = k \cdot \frac{\partial \delta(t)}{\partial t}$, т.е. весовая функция равна производной от δ -функции Дирака.

Переходная функция звена: $h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\{k\} = k \cdot \delta(t)$

Графики функций представлены на рисунках:

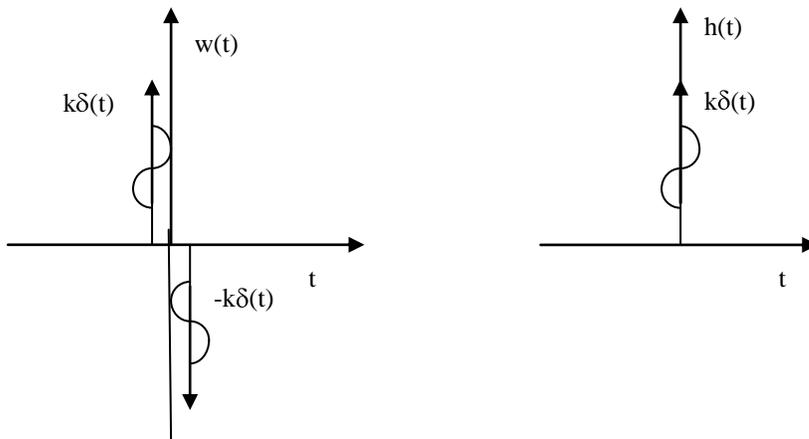


Рис. 2.77. Весовая и переходная функции идеального дифференцирующего звена

б) Реальное дифференцирующее звено

$$W(p) = \frac{k \cdot p}{1 + pT}$$

Заметим, что степень числителя передаточной функции равна степени знаменателя, откуда следует, что для использования формулы разложения нужно выделить целую часть дробно-рационального выражения для $W(p)$, поделив полином числителя на полином знаменателя передаточной функции. Но можно найти первоначально переходную функцию и воспользоваться соотношением между переходной и весовой функциями звеньев, взяв производную от переходной функции звена. Таким образом, переходная функция звена:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k \cdot p}{p(1 + pT)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{(1 + pT)}\right\} = \frac{k}{T} e^{-t/T} \cdot 1(t)$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -\frac{k}{T^2} e^{-t/T} \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot h(0) = -\frac{k}{T^2} e^{-t/T} \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot \frac{k}{T}.$$

Графики функций представлены на рисунках:

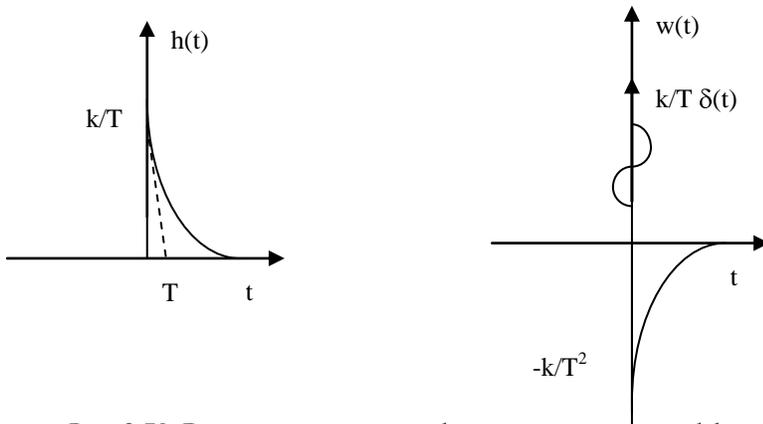


Рис. 2.78. Весовая и переходная функции реального дифференцирующего звена

2.6.3.7. Упругие звенья

$$W(p) = \frac{k \cdot (1 + pT_2)}{1 + pT_1}$$

Отметим, что степень числителя передаточной функции равна степени знаменателя, откуда следует, что для использования формулы разложения нужно выделить целую часть дробно-рационального выражения для $W(p)$, поделив полином числителя на полином знаменателя передаточной функции. Поэтому целесообразнее, воспользовавшись формулой разложения, найти переходную функцию звена,

Переходная функция звена:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k \cdot (1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{B(p)}{pA(p)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{B(0)}{A(0)} + \frac{B(p)}{p \cdot A'(p)}\right\} \Bigg|_{p_1 = -\frac{1}{T_1}} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{T_1}}$$

$$B(p) = k \cdot (1 + pT_2); \quad A(p) = 1 + pT_2; \quad A'(p) = \frac{\partial A(p)}{\partial p} = T_1; \quad p_1 = -\frac{1}{T_1}$$

Таким образом,

$$h(t) = \left(\frac{k}{1} + \frac{k(1 - T_2/T_1)}{-\frac{1}{T_1} \cdot T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot 1(t) = (k - k(1 - T_2/T_1) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}) \cdot 1(t) = k\left(1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot 1(t)$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -k \cdot \left(-\frac{1}{T_1}\right) \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot h(0) = k \frac{(T_1 - T_2)}{T_1^2} e^{-t/T_1} \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot \frac{kT_2}{T_1}$$

а) Упругое дифференцирующее звено ($T_2 > T_1$):

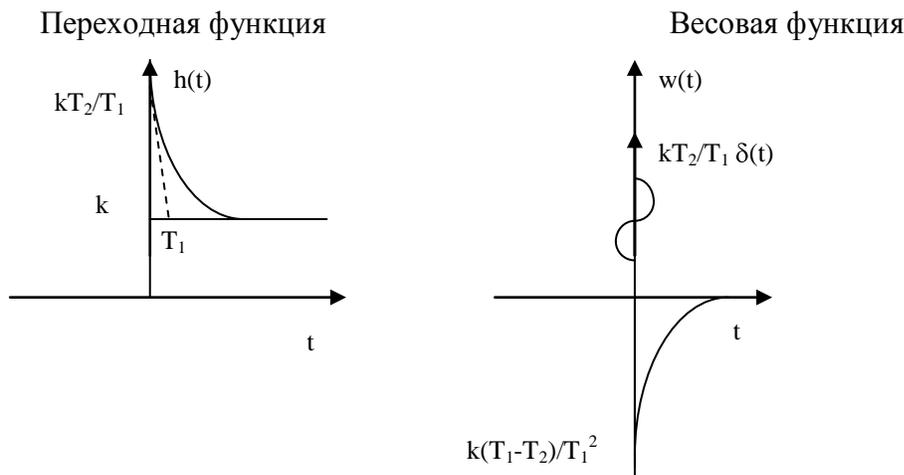


Рис. 2.79. Весовая и переходная функции упругого дифференцирующего звена

б) Упругое интегрирующее звено ($T_1 > T_2$):

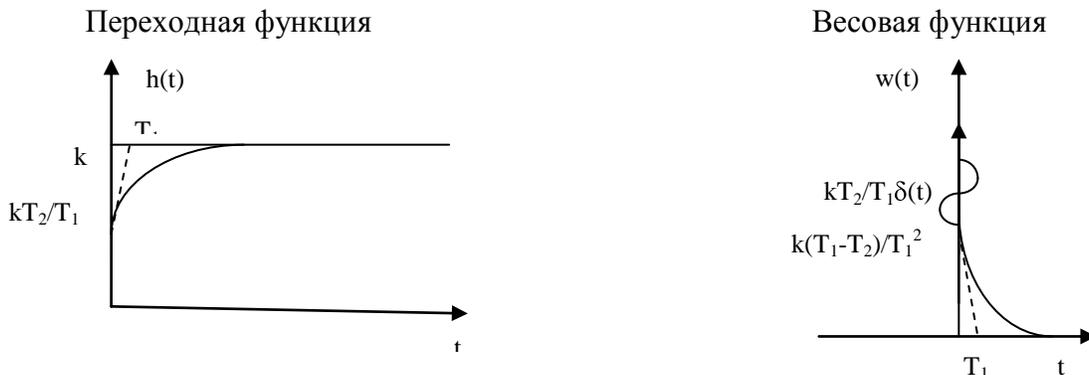


Рис. 2.79. Весовая и переходная функции упругого интегрирующего звена

2.6.3.8. Временные характеристики неустойчивого звена

Запишем передаточную функцию неустойчивого звена:

$$W(p) = \frac{k}{pT-1}$$

Воспользуемся известным соотношением

$$\frac{1}{p-\alpha} \div e^{+\alpha t} \mathbf{1}(t)$$

откуда получаем выражение для весовой функции:

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k/T}{p-1/T} \right\} = \frac{k}{T} e^{+t/T} \mathbf{1}(t)$$

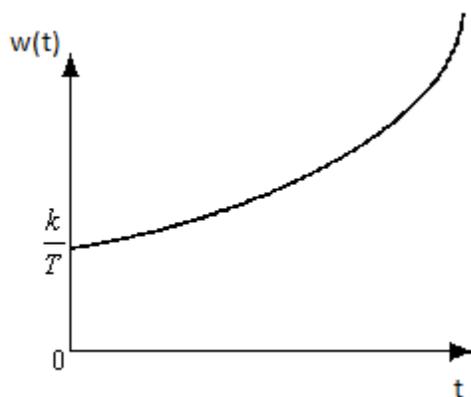


Рис. 2.80. Весовая функции неустойчивого звена

Для определения переходной функции проинтегрируем весовую функцию:

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$$

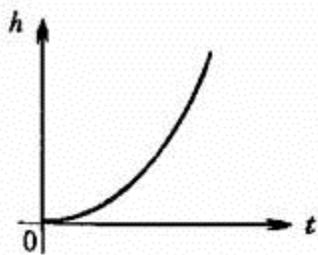


Рис. 2.81. Переходная функции неустойчивого звена

Лекция 10

2.6.4. Временные характеристики динамических звеньев. Лекция 10.

Построим временные характеристики линейного динамического звена с запаздыванием с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{2 \cdot (1+p)}{(1+5p)(1+2p)} e^{-0.5p} = W'(p) e^{-0.5p}$$

Воспользуемся формулой разложения для звена $W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$, для которого можно

записать в общем виде: $h(t) = \left(\frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} e^{p_i t} \right) 1(t)$,

$w(t) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{A'(p_i)} e^{p_i t} \right) 1(t) + \delta(t) \cdot h(0)$, где n порядок звена, p_i - полюса передаточной

функции ($i=1..n$).

Для нашего звена: $A(p) = 10p^2 + 7p + 1$; $A'(p) = 20p + 7$; $p_1 = -\frac{1}{5}$; $p_2 = -\frac{1}{2}$.

$$B(p) = 2p + 2;$$

$$p_1 = -\frac{1}{5}$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$B(p_1) = \frac{8}{5}$$

$$B(p_2) = 1$$

$$A'(p_1) = 3$$

$$A'(p_2) = -3$$

$$h(t) = \left(2 + \frac{\frac{8}{5}}{(-1/5) \cdot 3} e^{-\frac{t}{5}} + \frac{1}{(-\frac{1}{2}) \cdot (-3)} e^{-\frac{t}{2}} \right) 1(t) = \left(2 - \frac{8}{3} e^{-\frac{t}{5}} + \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{2}} \right) 1(t).$$

Построим переходную функцию без учета запаздывания:

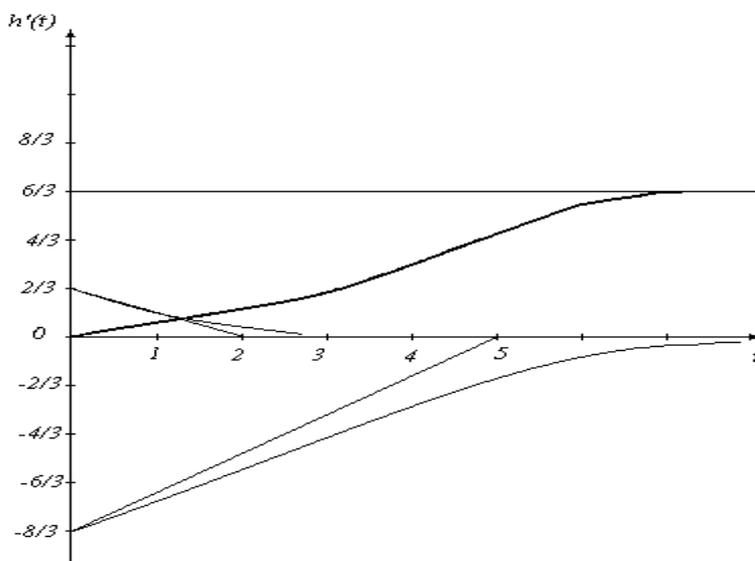


Рис. 2.82. Переходная функции динамического звена

Переходную функцию с учетом запаздывания легко получить, сдвинув построенную характеристику вправо на величину запаздывания – 0,5.

Построим весовую функцию без учета запаздывания:

$$w'(t) = \left(\frac{5}{3}e^{-\frac{t}{5}} + \frac{1}{-3}e^{-\frac{t}{2}}\right) \cdot 1(t) + 0 \cdot \delta(t) = \left(\frac{8}{15}e^{-\frac{t}{5}} - \frac{5}{15}e^{-\frac{t}{2}}\right) \cdot 1(t)$$

Весовую функцию с учетом запаздывания легко получить, сдвинув построенную характеристику вправо на величину запаздывания – 0,5.

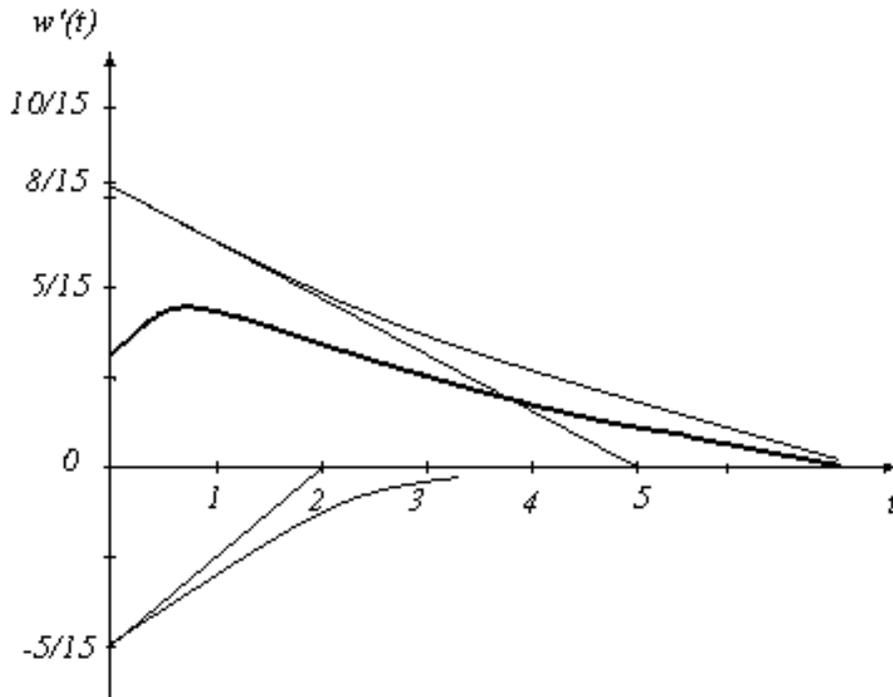


Рис. 2.83. Весовая функции динамического звена

3. Структурные схемы систем автоматического управления

Структурная схема – это графическое представление систем в виде соединения динамических звеньев.

3.1. Элементы структурных схем

1. Динамическое звено (рис.3.1)

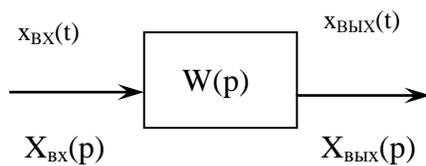


Рис.3.1. Динамическое звено

$$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} \quad X_{\text{вых}}(p) = W(p)X_{\text{вх}}(p)$$

2. Линия связи

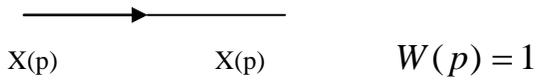
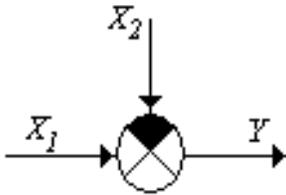


Рис.3.2. Линия связи

3. Сумматор



$$Y(p) = X_1(p) - X_2(p)$$

Рис.3.3. Сумматор

4. Узел ветвления – это точка, из которой сигнал передается на другие участки схемы

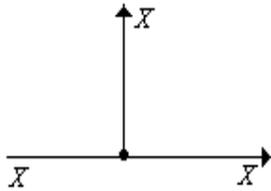


Рис.3.4. Узел ветвления

3.2. Соединение динамических звеньев

1. **Последовательное соединение** – такое, при котором выходы предыдущих звеньев подаются на входы последующих. Соединение может быть представлено структурной схемой (для простоты изобразим соединение из 3-х звеньев):

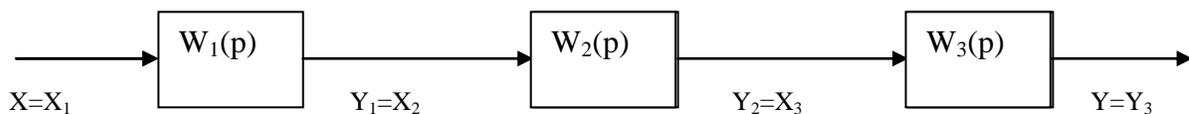


Рис.3.5. Последовательное соединение звеньев

Для получения эквивалентной передаточной функции запишем выражение для выходного сигнала соединения:

$$Y(p) = W_3(p)X_3 = W_3(p)W_2(p)X_2 = W_3(p)W_2(p)W_1(p)X_1 = W_3(p)W_2(p)W_1(p)X$$

$$W_{\text{экв}}(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p),$$

Где n число последовательно соединенных динамических звеньев.

Правило: При последовательном соединении передаточные функции перемножаются.

2. **Параллельное соединение** – такое, при котором на входы динамических звеньев поступает один и тот же входной сигнал, а выходы звеньев суммируются. Соединение может быть представлено структурной схемой (для простоты изобразим соединение из 3-х звеньев):

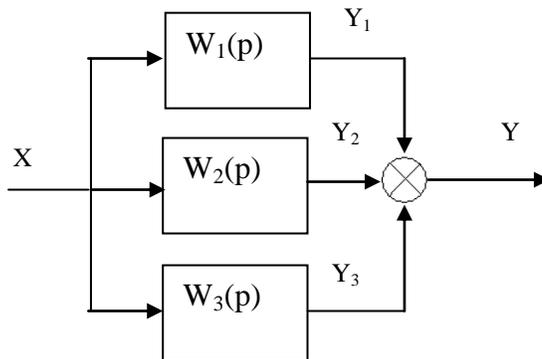


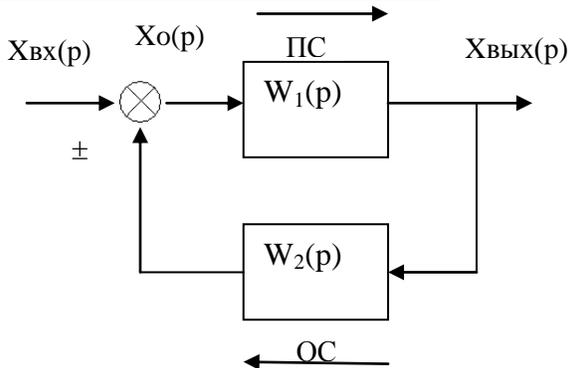
Рис.3.6. Параллельное соединение звеньев

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)X(p) = X(p) \sum_{i=1}^n W_i(p)$$

$$W_{\text{экв}}(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$$

Правило: При параллельном соединении передаточные функции складываются.

3. **Соединение с обратной связью**



ПС – прямая связь от входа к выходу по направлению передачи сигнала;

ОС – обратная связь от выхода ко входу по линии передачи (по стрелке).

Для определения эквивалентной передаточной функции запишем соотношения, связывающие сигналы в схеме.

Рис.3.7. Соединение с обратной связью

Сумматор: $X_o = X_{\text{вх}} \pm Z$

Динамическое звено $W_1(p)$: $X_{\text{вых}} = W_1(p)X_o$

Динамическое звено $W_2(p)$: $Z = W_2(p)X_{\text{вых}}$

Подставляя первое и последнее выражение во второе, получим:

$$X_{\text{ввлх}} = W_1(p)(X_{\text{вх}} \pm Z) = W_1(p)(X_{\text{вх}} \pm W_2(p)X_{\text{ввлх}})$$

Из соотношения следует $X_{\text{ввлх}}(1 \mp W_1(p)W_2(p)) = W_1(p)X_{\text{вх}}$, откуда

$$W_{\text{экв}}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)}.$$

Таким образом, эквивалентная передаточная функция соединения с обратной связью равна дроби, в числителе которой записывается передаточная функция прямой связи, а в знаменателе $1 \mp$ произведение передаточных функций в контуре обратной связи.

Для приведенной схемы, воспользовавшись правилом, запишем передаточную функцию от сигнала ошибки (или отклонения) системы ко входному сигналу, учитывая, что в прямой цепи лежит линия связи с передаточной функцией 1, в контуре обратной связи оказываются два

последовательно соединенных звена. Таким образом, $W_o(p) = \frac{X_o(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{1 \mp W_1(p)W_2(p)}$.

При этом знак «плюс» в знаменателе соответствует отрицательной обратной связи, а «минус» - положительной обратной связи.

Пример построения структурной схемы

Построим структурную схему генератора постоянного тока, описываемого системой дифференциальных уравнений:

$$1') \quad \Delta e_B(t) = R_B \Delta i_B(t) + \omega_B \frac{d\Delta \Phi_B(t)}{dt}$$

$$2') \quad \Delta \Phi_B = a \Delta i_B;$$

$$3') \quad \Delta e_\Gamma(t) = C_\Gamma \Delta \Phi_B(t)$$

Преобразуя уравнения по Лапласу, получим:

$$E_B(p) = R_B I_B(p) + \omega_B p \Phi_B(p)$$

$$\Phi_B(p) = a I_B(p)$$

$$E_\Gamma(p) = c \Phi_B(p)$$

Проходя от входного сигнала ко входному, построим структурную схему:

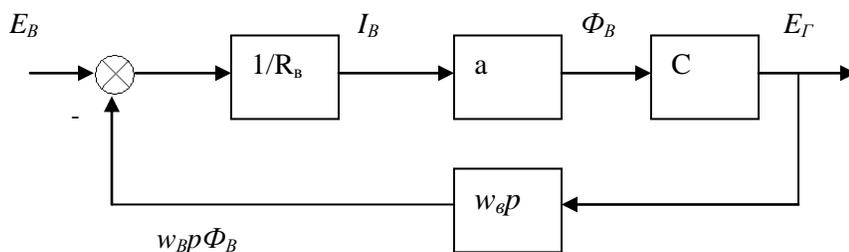


Рис.3.8. Структурная схема ГПТ

Записывая эквивалентные передаточные функции, получаем:

$$W_{ГПТ}(p) = \frac{a/R_g}{1 + a/R_g \cdot w_g \cdot p} = \frac{k}{1 + pT}, \text{ где } k = a/R_g, \quad T = a/R_g \cdot w_g.$$

3.3. Правила преобразования структурных схем

Предназначены для упрощения сложных многосвязных структурных схем к простым одноконтурным, для которых легко записать передаточные функции, связывающие выходные и входные сигналы системы. Критерием правильности переноса является неизменность входных и выходных сигналов схемы.

1. **Перенос динамического звена через узел** может производиться *По* и *Против* направления передачи сигнала:

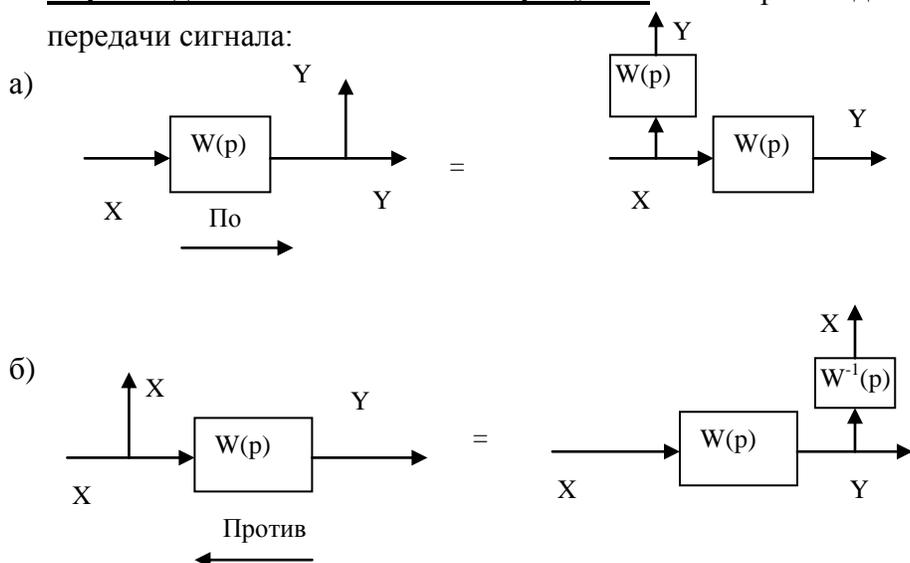


Рис.3.9. Пример переноса динамического звена через узел

Правило: при переносе динамического звена через узел *По/Против* направления передачи сигнала в отходящую от узла ветвь следует добавить динамическое звено с *Прямой/Обратной* передаточной функцией переносимого динамического звена.

2. **Перенос динамического звена через сумматор** *По/Против* направления передачи сигнала:

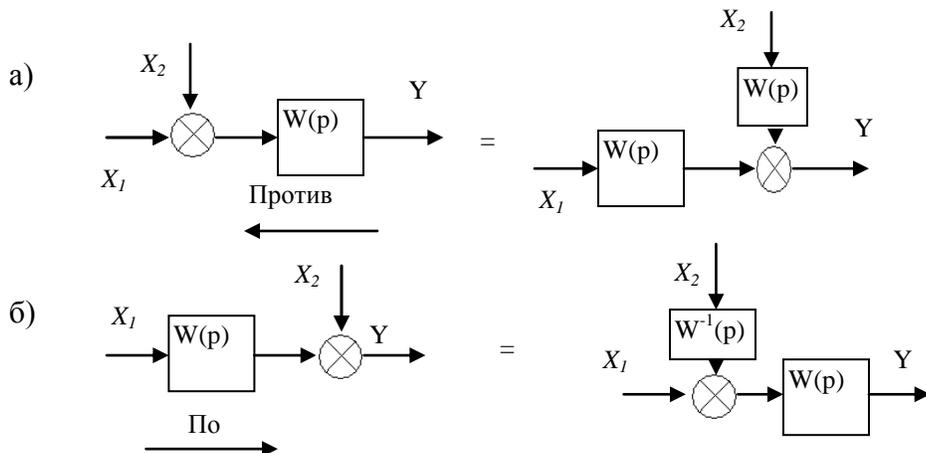


Рис.3.10. Пример переноса динамического звена через сумматор

Правило: при переносе динамического звена через сумматор *Против/По* направлению передачи сигнала в подходящую к сумматору ветвь следует добавить звено с передаточной функцией *Прямой/Обратной* передаточной функции переносимого динамического звена

3. Перенос сумматора через узел:

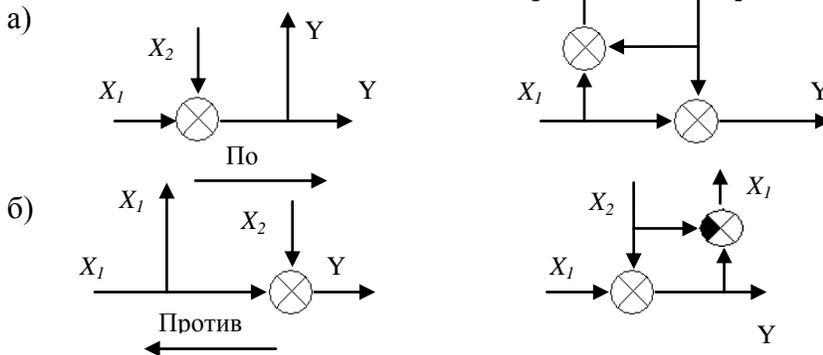


Рис.3.11. Пример переноса сумматора через узел

Правило: При переносе сумматора через узел *По/Против* направления передачи сигнала в подходящую к сумматору ветвь следует добавить сумматор со знаком, *Совпадающим/Несовпадающим* со знаком переносимого сумматора.

Лекция 11

3.4. Пример преобразования структурной схемы. Лекция 11.

Заданы дифференциальные уравнения, описывающие систему:

1. $X_0 = X_{вх} - X_{вых}$
2. $T_1 \frac{dX_1}{dt} + X_1 = k_1 \frac{dX_0}{dt}$
3. $T_2^2 \frac{d^2 X_2}{dt^2} + 2\xi T_2 \frac{dX_2}{dt} + X_2 = k_2 X_0$
4. $X_4 = k_4 (X_1 + X_2 - X_5 - X_B)$
5. $T_3 \frac{dX_3}{dt} + X_3 = k_3 \left(\frac{dX_1}{dt} + X_1 \right)$
6. $\frac{dX_{вых}}{dt} = k_6 (X_3 + X_4)$
7. $X_5 = k_5 X_{вых}$

Имея в виду, что дифференциальные уравнения описаны таким образом, что в левой их части записываются выходные сигналы элементов схем, а в правой части – входные сигналы, преобразуем дифференциальные уравнения по Лапласу и найдем передаточные функции.

1) –ое уравнение соответствует сумматору;

$$2) (T_1 p + 1)X_1 = k_1 X_0 \Rightarrow W_1(p) = \frac{X_1}{X_0} = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$$

$$3) (T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 + 1)X_2 = k_2 X_0 \Rightarrow W_2(p) = \frac{X_2}{X_0} = \frac{k_2}{T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 + 1}$$

$$4) W_4(p) = \frac{X_4}{X_1 + X_2 - X_5}$$

$$5) (T_3 p + 1)X_3 = k_3(p + 1)X_1 \Rightarrow W_3(p) = \frac{X_3}{X_1} = \frac{k_3(p + 1)}{T_3 p + 1}$$

$$6) pX_{\text{ex}} = k_6(X_3 + X_4) \Rightarrow W_6(p) = \frac{X_{\text{ex}}}{X_3 + X_4} = \frac{k_6}{p}$$

$$7) X_5 = k_5 X_{\text{ex}} \Rightarrow W_5(p) = \frac{X_5}{X_{\text{ex}}} = k_5.$$

Построим структурную схему, соответствующую найденным передаточным функциям:

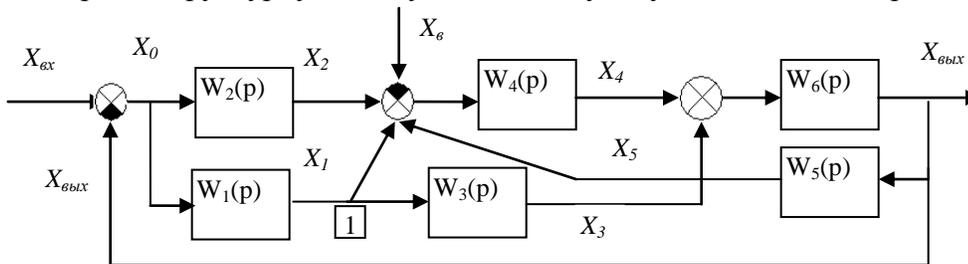


Рис.3.12. Исходная структурная схема системы

Для преобразования схемы произведем ряд действий:

А) перенесем звено $W_1(p)$ через $\boxed{1}$ по направлению передачи сигнала, при этом в отходящую от узла ветвь добавляем звено с передаточной функцией $W_1(p)$;

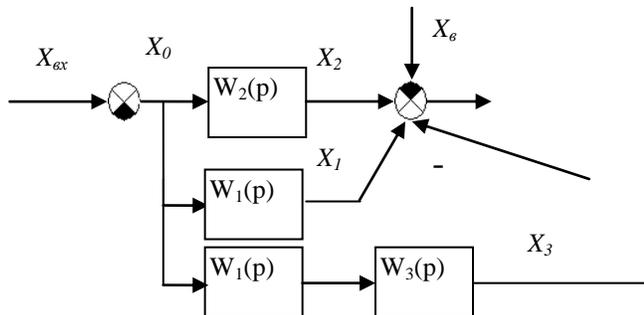


Рис.3.13а. Преобразованная часть структурной схемы

Б) Заменяем параллельно соединенные звенья с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_1(p) + W_2(p)$;

В) Заменяем последовательно соединенные звенья с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_3(p)$ эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_1(p) \cdot W_3(p)$;

В результате этого получим структурную схему в виде:

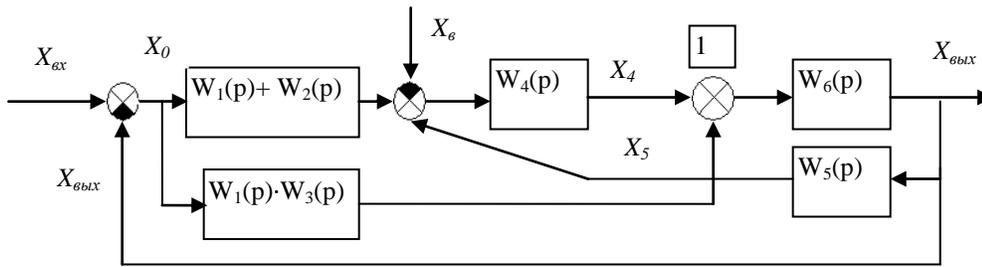


Рис.3.13б. Преобразованная структурная схема

Г) Перенесем динамическое звено $W_4(p)$ через сумматор $\boxed{1}$ по направлению передачи сигнала и, следовательно добавим к ветви, подходящей к сумматору звено с обратной передаточной функцией переносимого звена $W_4(p)$, т.е. получим схему, представленную ниже:

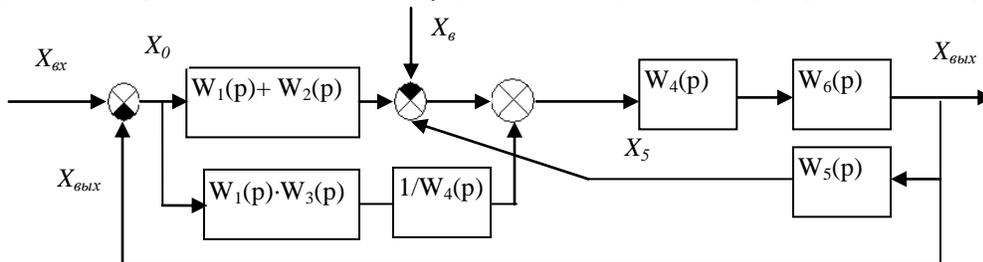


Рис.3.13в. Преобразованная структурная схема

Д) Объединяем сумматоры, заменяем последовательно соединенные звенья $W_4(p)$ и $W_6(p)$ эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_4(p) \cdot W_6(p)$; заменяем последовательно соединенные звенья с передаточными функциями $W_1(p) \cdot W_3(p)$ и $\frac{1}{W_4(p)}$ эквивалентным звеном с передаточной функцией $\frac{W_1(p)W_3(p)}{W_4(p)}$;

При этом получаем структурную схему в виде:

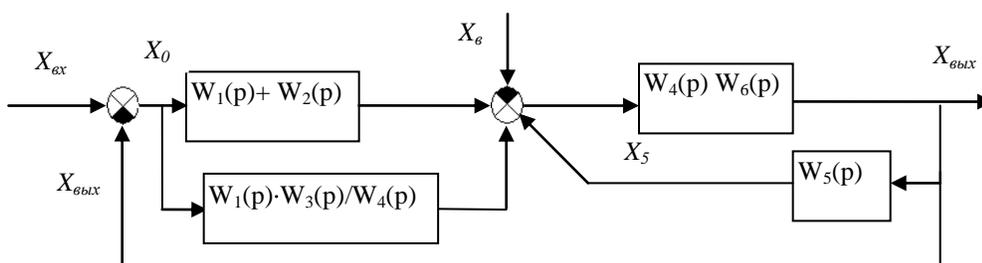


Рис.3.13г. Преобразованная структурная схема

ж) Заменяем параллельно соединенные звенья с передаточными функциями $W_1(p) + W_2(p)$ и $\frac{W_1(p)W_3(p)}{W_4(p)}$ эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_I(p) = W_1(p) + W_2(p) + \frac{W_1(p)W_3(p)}{W_4(p)};$$

з) Заменяем соединение с обратной связью звеньев с передаточными функциями: $W_4(p) \cdot W_6(p)$ и $W_5(p)$ эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_{II}(p) = \frac{W_4(p) \cdot W_6(p)}{1 + W_4(p) \cdot W_6(p) \cdot W_5(p)}.$$

Таким образом, в результате получаем структурную схему:

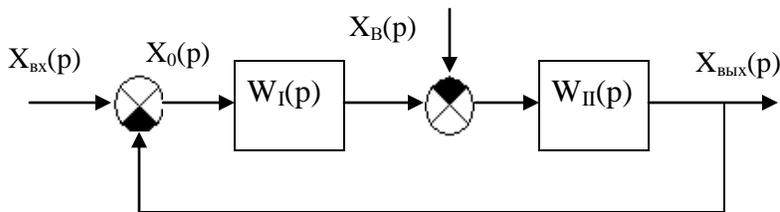


Рис.3.13д. Преобразованная структурная схема

Приведенная выше структурная схема является *типовой схемой* системы автоматического управления.

3.5. Передаточные функции разомкнутых и замкнутых САУ

Приведем еще раз типовую структурную схему систем автоматического управления и запишем передаточные функции, связывающие ее входные и выходные сигналы.

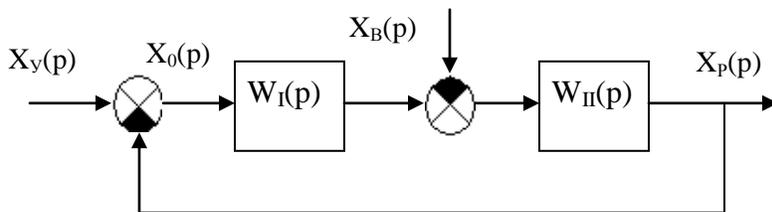


Рис.3.14. типовая структурная схема системы автоматического регулирования

На схеме: X_p - регулируемая величина;

X_y - управляющее воздействие;

X_o - сигнал ошибки, или отклонения;

$X_в$ - возмущающее воздействие.

Представленная типовая система является линейной, для которой выполняется принцип суперпозиции, означающей, что реакция на сумму входных сигналов является суммой реакций на каждое входное воздействие, т.е.

$$X_p(p) = X_p^y(p) + X_p^e(p),$$

$X_p^y(p)$ - реакция системы на управляющее воздействие;

$X_p^e(p)$ - реакция системы на возмущающее воздействие.

$$X_o(p) = X_o^y(p) + X_o^e(p), \text{ где}$$

$X_o^y(p)$ - ошибка при воздействии на входе управляющего воздействия;

$X_o^e(p)$ - ошибка при воздействии на входе возмущающего воздействия.

Передаточная функция *разомкнутой системы по управляющему воздействию* :

$$W_p^y(p) = \frac{X_p}{X_o} = W_I(p) \cdot W_{II}(p)$$

Передаточная функция *разомкнутой системы по возмущающему воздействию*:

$$W_p^e(p) = \frac{X_p}{X_e} = -W_{II}(p);$$

Передаточная функция *замкнутой системы по управляющему воздействию*:

$$W_3^y(p) = \frac{X_p^y}{X_y} = \frac{W_I(p) \cdot W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} = \frac{W_p^y(p)}{1 + W_p^y(p)}$$

Передаточная функция *замкнутой системы по возмущающему воздействию*:

$$W_3^e(p) = \frac{X_p^e}{X_e} = \frac{-W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} = \frac{W_p^e(p)}{1 + W_p^y(p)}$$

Передаточная функция *ошибки по управлению (для замкнутой системы)*:

$$W_o^y(p) = \frac{X_o^y}{X_y} = \frac{1}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} = \frac{1}{1 + W_p^y(p)}$$

Передаточная функция *ошибки по возмущению (для замкнутой системы)*:

$$W_o^e(p) = \frac{X_o^e}{X_e} = \frac{W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} = \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)}$$

Поскольку для выходного сигнала справедливо соотношение $X_p(p) = X_p^y(p) + X_p^e(p)$, то

можно записать $X_p(p) = W_3^y(p)X_y(p) + W_3^e(p)X_e(p)$, т.е.

$$X_p(p) = \frac{W_I(p) \cdot W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} X_y(p) - \frac{W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} X_e(p), \text{ откуда можно получить}$$

выходной сигнал замкнутой системы $x_p(t) = L^{-1}\{X_p(p)\}$.

Аналогично, для сигнала ошибки:

$$X_o(p) = X_o^y(p) + X_o^e(p) \Rightarrow X_o(p) = \frac{1}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} X_y(p) + \frac{W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} X_e(p) \text{ и для}$$

сигнала ошибки: $x_o(t) = L^{-1}\{X_o(p)\}$.

Лекция 12

4. Устойчивость систем автоматического управления

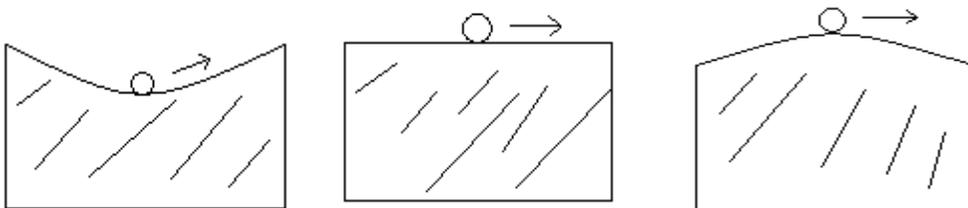
4.1. Понятие устойчивости систем. Лекция 12.

Устойчивой называется система, которая возвращается в исходное положение после снятия кратковременного воздействия.

Система называется нейтрально устойчивой, если после снятия кратковременного воздействия она занимает новое положение равновесия.

Система неустойчивая, если после снятия кратковременного воздействия она уходит от положения равновесия.

Это можно продемонстрировать на примере механической системы: шарика на поверхностях разного профиля.



Устойчивая система

Нейтральная система

Неустойчивая система

Рис.4.1. Понятие устойчивости механической системы

Устойчивость системы – необходимое условие для качественной работы автоматической системы.

Кратковременным воздействием можно считать $\delta(t)$ -функцию Дирака, реакцией на которую является весовая функция системы $w(p)$. Таким образом, по поведению весовой функции можно судить об устойчивости системы. Продемонстрируем это на примерах поведения весовых функций систем

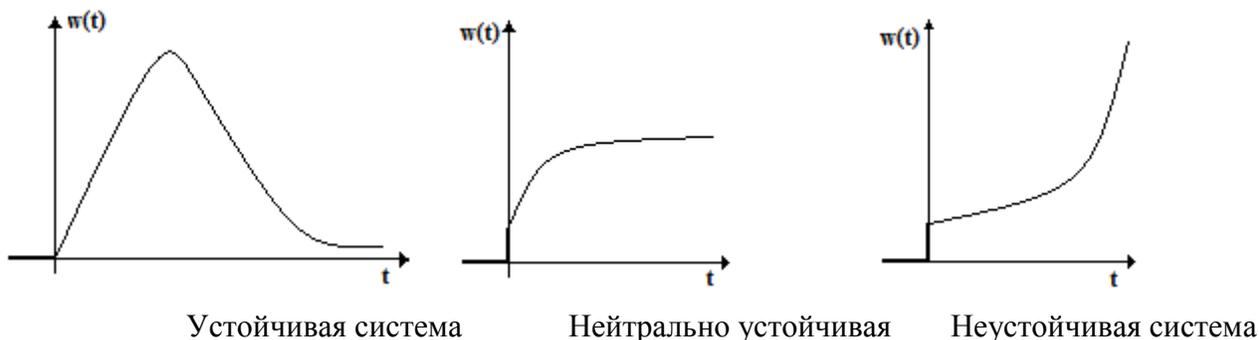


Рис.4.2. Понятие устойчивости на примере поведения весовых функций САУ

4.2. Необходимые и достаточные условия устойчивости систем

Рассмотрим необходимые и достаточные условия устойчивости системы, описываемой передаточной функцией: $W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$, весовая функция которой имеет вид:

$$w(p) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p)}{A'(p)} \Big|_{p_i} e^{p_i t} + h(o)\delta(t)$$

Из формулы разложения для весовой функции видно, что устойчивость зависит от положения корней характеристического полинома $A(p)$, которое, в общем виде, можно представить в виде диаграммы:

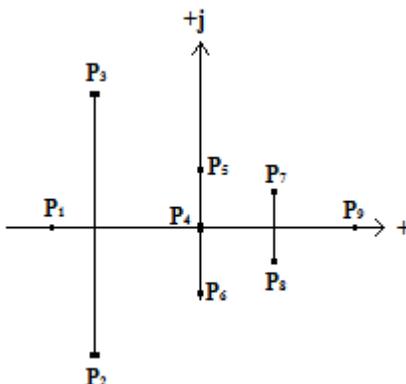


Рис.4.3. Возможное расположение полюсов передаточной функции САУ

Представив весовую функцию в виде суммы весовых функций, определяемых корнями различного вида:

$$w(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

Рассмотрим вклад 7-го и 8-го корня в весовую функцию системы, поскольку это расположение является наиболее общим и из него можно получить все остальные составляющие приравниванием нулю тех или других параметров корней:

$p_{7,8} = \alpha \pm j\beta$. Следует отметить, что коэффициенты $C_{7,8}$ являются комплексно сопряженными, которые в общем виде можно представить в виде: $\gamma \pm j\delta$. Тогда

$$w_{7,8} = C_7 e^{p_7 t} + C_8 e^{p_8 t} = (\gamma + j\delta) e^{(\alpha + j\beta)t} + (\gamma - j\delta) e^{(\alpha - j\beta)t} = |C_{7,8} = \gamma \pm j\delta|$$

$$= (\gamma + j\delta) e^{\alpha t} (\cos \beta t + j \sin \beta t) + (\gamma - j\delta) e^{\alpha t} (\cos \beta t - j \sin \beta t)$$

$$w_{7,8} = e^{\alpha t} 2(\gamma \cos \beta t - \delta \sin \beta t) = e^{\alpha t} 2\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \cos \beta t - \frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \sin \beta t \right)$$

$$= 2e^{\alpha t} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \cos(\beta t + \varphi)$$

1. $p_1 = -\alpha$

$\beta = 0$

$w_1(t) = C_1 e^{-\alpha t}$

2,3. $p_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$

$w_{2,3}(t) = C_{2,3} e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$

4. $p_4 = 0; \quad \alpha = 0 \quad \beta = 0$

$w_4(t) = C_4$

5,6. $p_{5,6} = \pm j\beta; \quad \alpha = 0$

$w_{5,6}(t) = C_{5,6} \cos(\beta t + \varphi)$

7,8. $w_{7,8}(t) = C_{7,8} e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$

9. $p_9 = +\alpha$

$w_9(t) = C_9 e^{\alpha t}$

Представим вклад каждой составляющей весовой функции в весовую функцию системы в целом (рис.4.4):

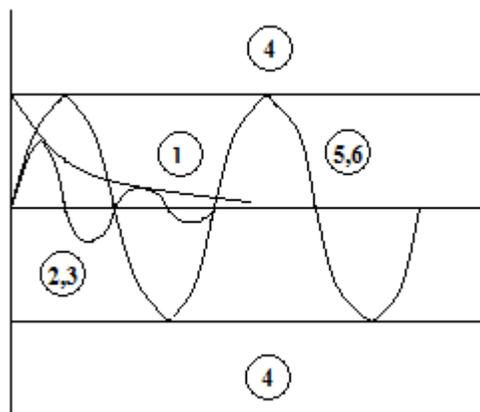


Рис. 4.4а. Устойчивые и нейтральные составляющие весовой функции

Таким образом, 1,2,3 составляющие являются устойчивыми;

4,5,6 – нейтральными.

Из рисунка видно, что

- для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы корни её характеристического полинома лежали в левой части комплексной плоскости.
- Система является чисто нейтральной, если корни её характеристического полинома лежат на мнимой оси.
- Система является нейтрально устойчивой, если корни её характеристического полинома лежат в левой части комплексной плоскости на мнимой оси.

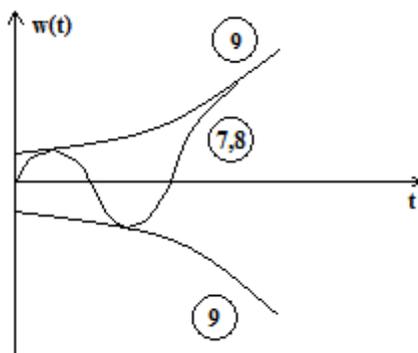


Рис. 4.46. Неустойчивые составляющие весовой функции

Из рисунка видно, что система неустойчива, если хотя бы один корень характеристического полинома лежит в правой части комплексной плоскости.

4.3. Критерии устойчивости

Критерии позволяют исследовать устойчивость системы по её некоторым характеристикам.

Известны алгебраические и частотные критерии устойчивости.

- 1) Алгебраические (Гурвица, Рауса, D-разбиения).
- 2) Частотные (Михайлова, Найквиста, логарифмический)

4.3.1. Критерий устойчивости Гурвица.

Позволяет следить за устойчивостью системы по коэффициентам её характеристического полинома.

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & a_1 & a_3 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

По главной диагонали записываются коэффициенты характеристического полинома, начиная с a_1 . Выше главной диагонали коэффициенты увеличиваются, ниже – уменьшаются. Коэффициенты с несуществующими индексами записываются как – “0”. Из главного определителя формируются определители меньшего порядка выделением строк и столбцов в левом верхнем углу главного определителя Гурвица, а именно:

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

Последний определитель можно найти разложением главного определителя Гурвица по последнему столбцу:

$$\Delta = a_1 * \Delta_{n-1}$$

Сформулируем критерий устойчивости Гурвица:

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы a_i и Δ_i были одного и того же знака ($i=1 \div n$) (для определённости >0).

Система неустойчива, если хотя бы один определитель Гурвица <0 .

Система нейтральна, если последний определитель $= 0$, что может произойти при двух условиях: $\Delta_n = 0$ при $a_n = 0, \Delta_{n-1} = 0$. В первом случае говорят, что система находится на границе апериодической устойчивости, а во втором – колебательной.

Частные случаи (1-й, 2-й и 3-й порядки).

1. $n=1$

$$A_1(p) = a_0 p + a_1$$

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$a_0 > 0 \quad a_1 > 0$$

2. $n=2$

$$A_2(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2$$

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$a_0, a_1, a_2 > 0$$

Таким образом, система 1-го и 2-го порядка устойчива, если коэффициенты характеристического полинома положительны.

3. $n=3$

$$A_3(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = |a_1| > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0$$

Условие устойчивости системы 3го порядка $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ и $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$, т.е. все коэффициенты характеристического уравнения положительные и второй определитель Гурвицы больше нуля.

Задача. Для САУ, структурная схема которой представлена на рис.4.5. найти предельный коэффициент усиления

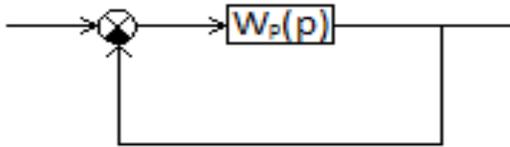


Рис.4.5. структурная схема замкнутой САУ

Предельным называется такой коэффициент усиления, при котором замкнутая система находится на грани устойчивости – $K_{пред}$. Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)}$$

Найдем передаточную функцию замкнутой системы и запишем ее характеристический полином:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{\frac{k}{(s)(s)}(s)}{1 + \frac{k}{(s)(s)}} = \frac{k}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3) + k}$$

$$A_3(p) = (1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3) + k$$

$$A_3(p) = T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + k + 1$$

где $a_0 = T_1 T_2 T_3$, $a_1 = (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)$, $a_2 = k$.

Запишем определитель Гурвица, выделим определители 1-го, 2-го и 3-го порядков и запишем для них условия устойчивости:

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = |a_1| > 0 \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} > 0 \quad \Delta_3 = a_2 \Delta_2 > 0 \quad a_0 > 0$$

$$a_i > 0 \quad i=1 \div 3$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$(k+1) T_1 T_2 T_3 < (T_1 + T_2 + T_3)(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)$$

$$k < T_1 T_2 T_3 \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1 = K_{пред}$$

Проанализируем полученное выражение:

- 1) $K_{пред}$ не изменится, если постоянные времени умножить или разделить на одно и то же число.
- 2) Устойчивость не зависит от размерности постоянных времени.
- 3) Наихудшая ситуация для устойчивости, когда $T_1 = T_2 = T_3$:
 $3T \left(\frac{3}{T} \right) - 1 = 8 = K_{пред \min}$
- 4) Наиболее устойчивой является система, у которой постоянные времени сильно различаются.

4.3.2. Принцип аргумента. Лекция 13.

Лекция 13

Принцип аргумента лежит в основе частотных критериев устойчивости.

Пусть известен характеристический полином исследуемой системы:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

Где p_1, p_2, \dots, p_n - корни характеристического полинома.

Рассмотрим поведение характеристического полинома на комплексной плоскости, заменив p на $j\omega$: $A(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)$ и рассмотрим поведение его аргумента:

$$\Delta \arg A(j\omega) = a_0 \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - p_i) \quad (\text{в предположении, что } a_0 > 0).$$

Из полученного выражения можно записать изменение аргумента:

$$\Delta \arg A(j\omega) = a_0 \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - p_i)$$

$$-\infty < \omega < \infty \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$0 \leq \omega < \infty \quad 0 \leq \omega < \infty$$

В принципе аргумента исследуется, каково будет приращение аргумента вектора $A(j\omega)$ при различном расположении корней p_1, p_2, \dots, p_n .

Рассмотрим возможное расположение корней на комплексной плоскости (рис.4.6) в предположении, что l корней лежит справа от мнимой оси, а $n-l$ - слева:

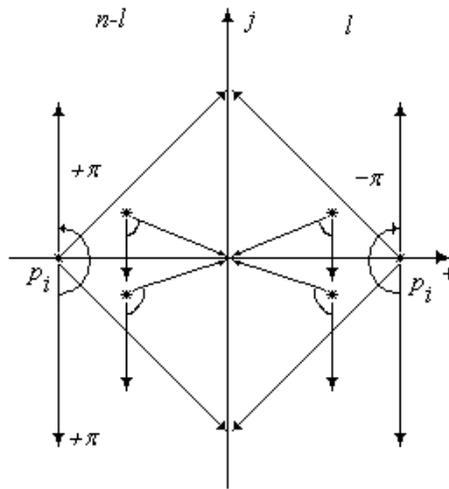


Рис.4.6. Изменение положение векторов $j\omega - p_i$ на комплексной плоскости

Таким образом, $n-l$ векторов повернулись на угол $+\pi$ при изменении частоты от $-\infty$ до ∞ и l векторов – на угол $-\pi$, т.е.

$$\Delta \arg A(j\omega) = a_0 \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - p_i) = (n-l)\pi + l(-\pi) = (n-2l)\pi ;$$

$$-\infty < \omega < \infty \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$\Delta \arg A(j\omega) = a_0 \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - p_i) = (n-l)\frac{\pi}{2} + l(-\frac{\pi}{2}) = (n-2l)\frac{\pi}{2} .$$

$$0 \leq \omega < \infty \quad 0 \leq \omega < \infty$$

4.3.3. Критерий устойчивости Михайлова

Является геометрической интерпретацией принципа аргумента и определяет условие устойчивости системы, т.е. отсутствие корней характеристического полинома в правой части комплексной плоскости ($l=0$). Таким образом, для устойчивой системы справедливо равенство:

$$\Delta \arg A(j\omega) = n \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

Продемонстрируем, как должен вести себя годограф Михайлова (геометрическое место точек конца вектора $A(j\omega)$ при изменении частоты в диапазоне $0 \leq \omega < \infty$) для устойчивой системы (рис.4.7).

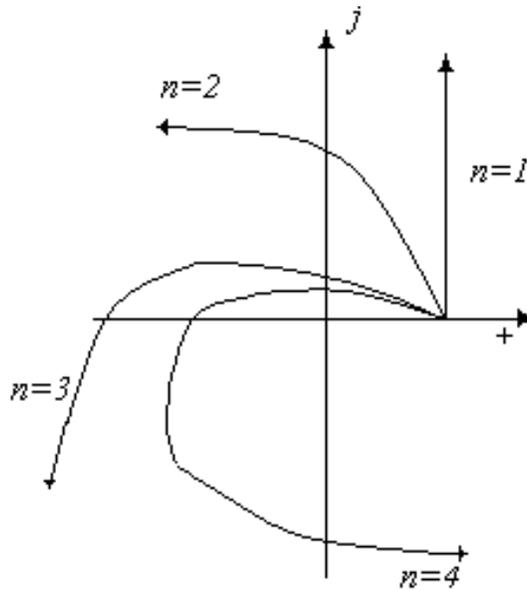


Рис.4.7. Примеры годографов Михайлова устойчивых систем

Таким образом, в соответствии с критерием Михайлова система устойчива, если годограф $A(j\omega)$ при изменении частот в диапазоне $0 \leq \omega < \infty$, начинаясь на действительной положительной оси, обходит последовательно n квадрантов, где n - порядок характеристического полинома исследуемой системы.

4.3.4. Критерий устойчивости Найквиста

Позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно – фазовой характеристике разомкнутой системы (годографу Найквиста), которая к тому же может быть построена экспериментально.

Рассмотрим передаточную функцию разомкнутой системы в виде: $W_p(p) = \frac{B(p)}{C(p)}$, где

$B(p)$ - полином степени m , а $C(p)$ - степени n . При этом из условия физической реализуемости $m \leq n$. Передаточную функцию можно записать в виде

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{B(p)}{B(p) + C(p)} = \frac{B(p)}{A(p)}, \text{ где } A(p) \text{ - характеристический полином}$$

замкнутой системы степени n .

$$\text{Введем в рассмотрение функцию } F(p) = 1 + W_p(p) = 1 + \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{A(p)}{C(p)}.$$

Таким образом, функция $F(p)$ связывает характеристические полиномы замкнутой и разомкнутой систем порядков, равных n . Применим к функции $F(p)$ принцип аргумента:

$$\begin{aligned} \Delta \arg F(j\omega) &= \Delta \arg A(j\omega) - \Delta \arg C(j\omega) \\ -\infty < \omega < \infty & \quad -\infty < \omega < \infty \quad -\infty < \omega < \infty \\ 0 \leq \omega < \infty & \quad 0 \leq \omega < \infty \quad 0 \leq \omega < \infty \end{aligned}$$

Критерий Найквиста определяет условия устойчивости замкнутой системы, т.е. такие при которых в характеристическом полиноме замкнутой системы $A(p)$ нет корней, лежащих в правой части комплексной плоскости. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \arg F(j\omega) &= (n - (n - 2l))\pi = l \cdot 2\pi \\ -\infty < \omega < \infty \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \Delta \arg F(j\omega) &= (n - (n - 2l)) \frac{\pi}{2} = \frac{l}{2} \cdot 2\pi \\ 0 \leq \omega < \infty \end{aligned}$$

На этих равенствах основан критерий Найквиста. Рассмотрим его частные случаи:

1. Критерий устойчивости Найквиста для устойчивой в разомкнутом состоянии системы

($C(p)$ не имеет правых корней, $l=0$).

В этом случае для устойчивой замкнутой системы справедливо равенства:

$$\begin{aligned} \Delta \arg F(j\omega) &= (n - n)\pi = 0 & \Delta \arg F(j\omega) &= (n - n) \frac{\pi}{2} = 0 \\ -\infty < \omega < \infty & & 0 \leq \omega < \infty \end{aligned}$$

Рассмотрим, как должен вести себя вектор $F(j\omega)$ в этом случае (рис.4.8):

1. Изменения аргумента вектора I равны нулю, следовательно, замкнутая система, соответствующая построенному вектору устойчива.
2. Изменения аргумента вектора II равны -2π , следовательно, замкнутая система, соответствующая построенному вектору неустойчива.

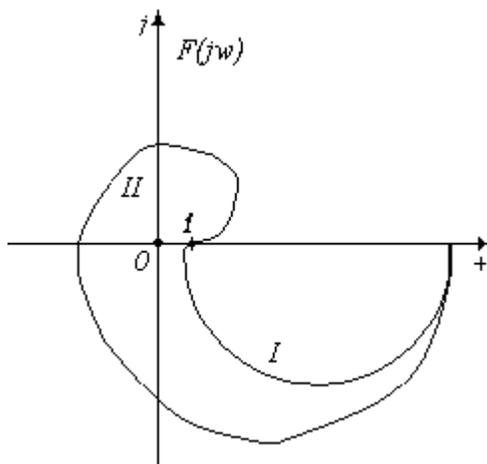


Рис. 4.8. Поведение вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞

Следует отметить, что более естественно определять устойчивость замкнутой системы не по $F(j\omega)$, а по годографу Найквиста разомкнутой системы $W_p(j\omega)$. В этом случае изменении аргумента следует рассматривать относительно точки с координатами $(-1;j0)$ (рис.4.9). В этом случае, годограф I не охватывает точку $(-1;j0)$ - замкнутая система устойчивая, а годограф II – охватывает – замкнутая система неустойчивая.

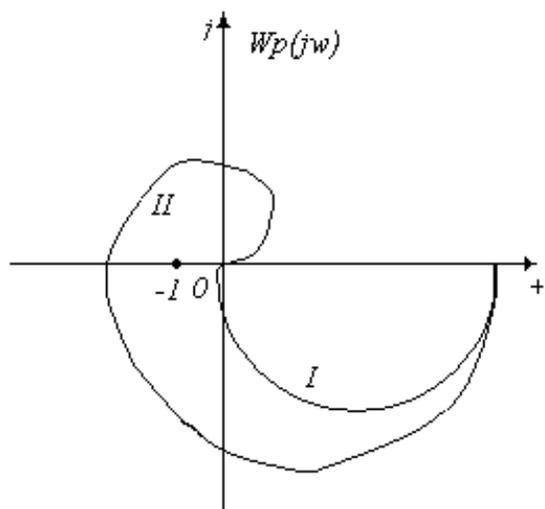


Рис. 4.9. Поведение вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ .

Формулировка критерия Найквиста: Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой системы не охватывал точку с координатами $(-1, j0)$.

2. Критерий устойчивости Найквиста для неустойчивой в разомкнутом состоянии системы

В этом случае для устойчивой замкнутой системы справедливо равенства:

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - (n - 2l))\pi = l \cdot 2\pi$$

$$-\infty < \omega < \infty$$

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - (n - 2l)) \frac{\pi}{2} = \frac{l}{2} \cdot 2\pi$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

Рассмотрим, как должен вести себя вектор $F(j\omega)$ в этом случае (рис.4.10):

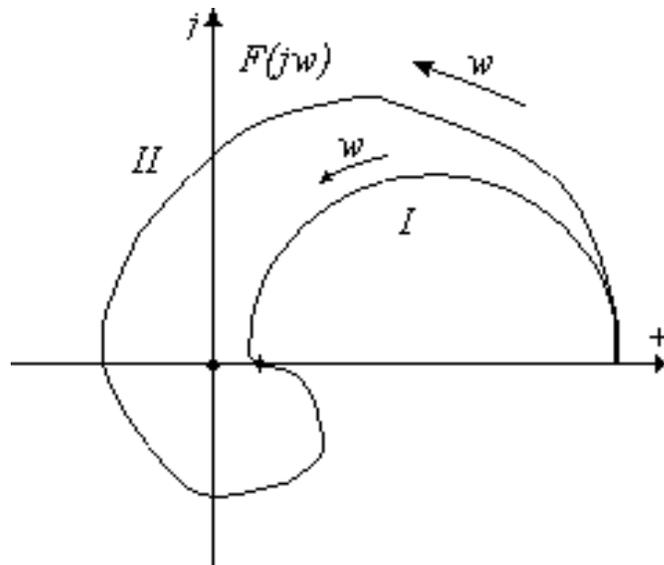


Рис.4.10. Поведение вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞

Рассмотрим, как должен вести себя вектор $F(j\omega)$ в этом случае:

1. Вектор I не охватывает точку 0, следовательно, при $l \neq 0$ замкнутая система неустойчива.
2. Вектор II охватывает точку 0 (аргумент изменяется на значение 2π при изменении частоты от 0 до ∞), следовательно, замкнутая система устойчива, если число корней характеристического полинома разомкнутой системы равно 2.

Более естественно определять устойчивость замкнутой системы не по $F(j\omega)$, а по годографу Найквиста разомкнутой системы $W_p(j\omega)$. В этом случае изменение аргумента следует рассматривать относительно точки с координатами $(-1; j0)$ (рис.4.11). В этом случае, годограф I не охватывает точку $(-1; j0)$ - замкнутая система неустойчивая,

а годограф II – охватывает – замкнутая система устойчивая при количестве правых полюсов передаточной функции разомкнутой системы, равном двум.

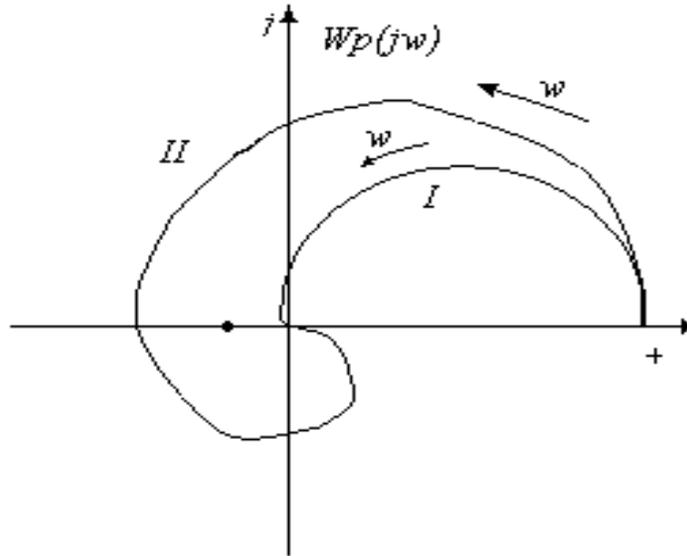


Рис.4.11. Поведение годографа Найквиста при изменении частоты от 0 до ∞

Формулировка критерия Найквиста: Если разомкнутая система неустойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой системы охватывал точку с координатами $(-1, j0)$ l раз при изменении частоты от $-\infty$ до ∞ или $l/2$ раз при изменении частоты от 0 до ∞ в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки, где l – число корней характеристического полинома разомкнутой системы в правой части комплексной плоскости.

Лекция 14

4.3.5. Примеры применения критерия Найквиста. Лекция 14.

Для всех рассматриваемых систем предполагается следующая структурная схема:

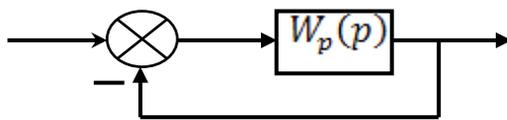


Рис.4.12. Структурная схема замкнутой системы

Пример 1. Разомкнутая система устойчива

Рассмотрим устойчивость замкнутой системы, структурная схема которой приведена на рисунке. $W_p(p) = \frac{K}{(pT_1+1)(pT_2+1)(pT_3+1)}, T_1 > T_2 > T_3$

Найдем полюса передаточной функции разомкнутой системы и построим амплитудную и фазовую частотные характеристики:

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad p_3 = -\frac{1}{T_3}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2} \sqrt{1+(\omega T_2)^2} \sqrt{1+(\omega T_3)^2}}$$

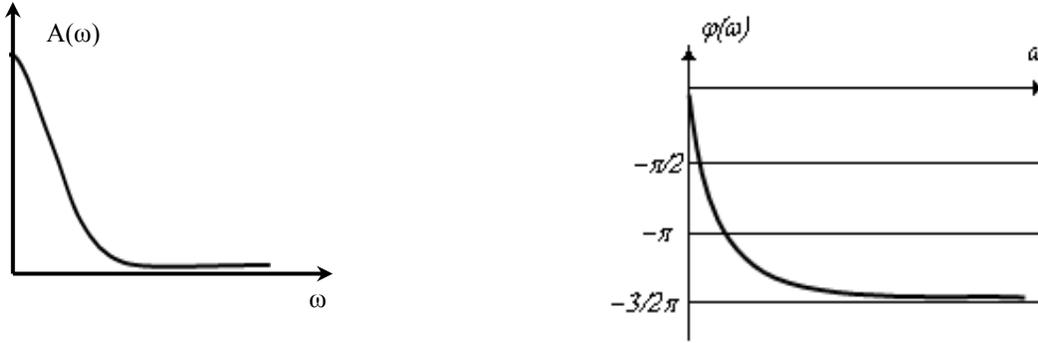


Рис.4.13. Амплитудная и фазовая частотные характеристики

Для построения годографа определим начальную и конечную точки годографа:

$$\begin{aligned} \omega = 0 \quad A(\omega) = K, \quad \varphi(\omega) = 0 \\ \omega = \infty \quad A(\omega) = 0, \quad \varphi(\omega) = -\frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

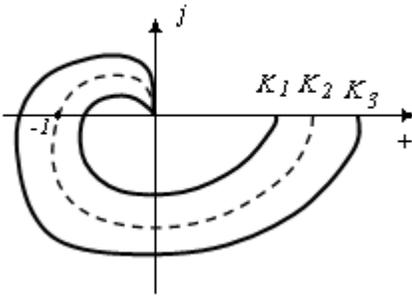


Рис.4.14. Годографы разомкнутых систем

K_1 - замкнутая система устойчива.

K_2 - замкнутая система неустойчива.

K_3 - замкнутая система на границе устойчивости.

Пример 2. Разомкнутая система неустойчивая.

Рассмотрим устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией $W_p(p)$, имеющей один правый полюс:

$$W_p(p) = \frac{K}{(pT_1 - 1)(pT_2 + 1)(pT_3 + 1)}, T_1 > T_2 > T_3$$

$$p_1 = \frac{1}{T_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad p_3 = -\frac{1}{T_3}, \quad l = 1$$

$$\begin{aligned} W_p(j\omega) &= \frac{K}{(j\omega T_1 - 1)(j\omega T_2 + 1)(j\omega T_3 + 1)} = \\ &= \frac{K e^{j0}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} e^{j(\pi - \arctg(\omega T_1))} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2} e^{j\arctg(\omega T_2)} \sqrt{1 + (\omega T_3)^2} e^{j\arctg(\omega T_3)}} \end{aligned}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2} \sqrt{1 + (\omega T_3)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\pi + \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3$$

Амплитудная частотная характеристика, как видно из выражения для $A(\omega)$, не изменилась, а фазовая частотная характеристика определяется множителем $j\omega T_1 - 1$, для которого можно записать амплитуду и фазу: $A = \sqrt{(\omega T_1)^2 + 1}$; $\varphi = \pi - \arctg \omega T_1$

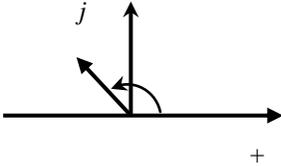
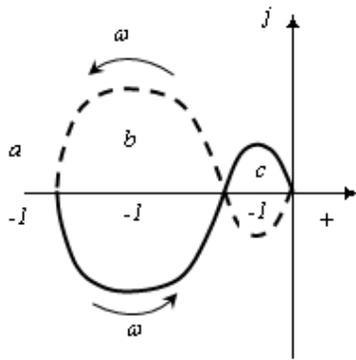


Рис.4.15. Положение вектора на комплексной плоскости

Построим годограф Найквиста и определим условия устойчивости замкнутой системы для трех случаев (а,б,с), т.е. для разных положений точки $(-1, j0)$:



- а) Замкнутая система неустойчива (критерий Найквиста).
- б) Замкнутая система устойчива.
- с) замкнутая система неустойчива (охватывает «-1» в положительном направлении).

Рис.4.16. Годограф Найквиста исследуемой системы

Пример 3. Разомкнутая система нейтрально устойчивая.

а) Рассмотрим устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией $W_p(p)$,

имеющей **один полюс на оси ординат**:

$$W_p(p) = \frac{K}{p(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)}$$

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad p_3 = 0$$

p_3 заменяем на маленький отрицательный полюс $-\alpha$:

$$W_p'(p) = \frac{K}{(p + \alpha)(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)} = \frac{K/\alpha}{(\frac{p}{\alpha} + 1)(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)}$$

$$W_p(p) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} W_p'(p)$$

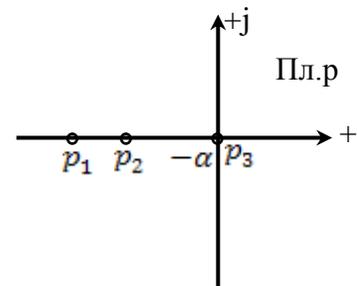


Рис.4.17. Положение полюсов $W_p(p)$

$$W_p(j\omega) = \frac{K/a \cdot e^{j0}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} e^{j \cdot \arctg(\omega T_1)} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2} \cdot \sqrt{1 + (\omega T_3)^2} e^{j \frac{\pi}{2}}}$$

$$A_p(\omega) = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}}$$

$$\varphi_p(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$$

Построим амплитудную и фазовую частотные характеристики разомкнутой системы:

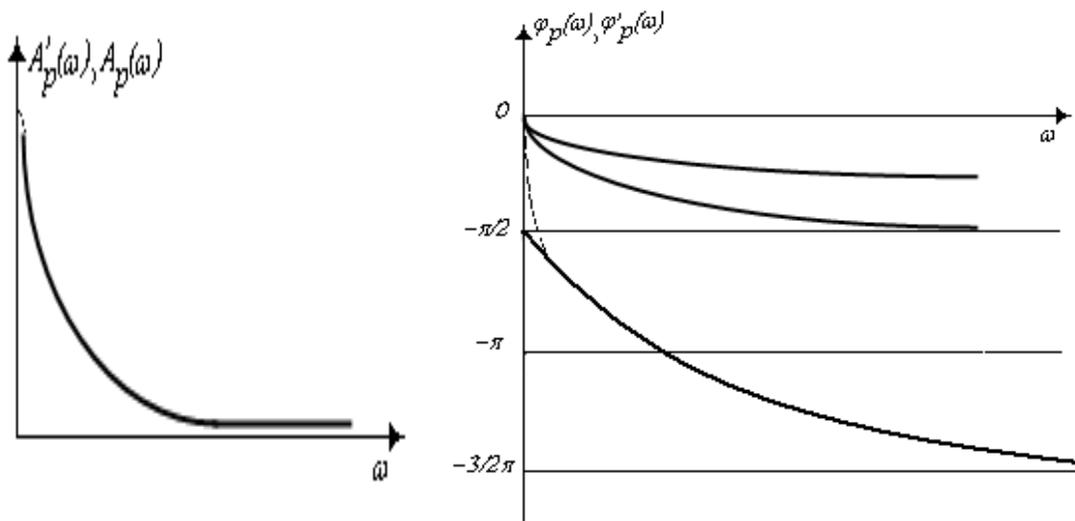
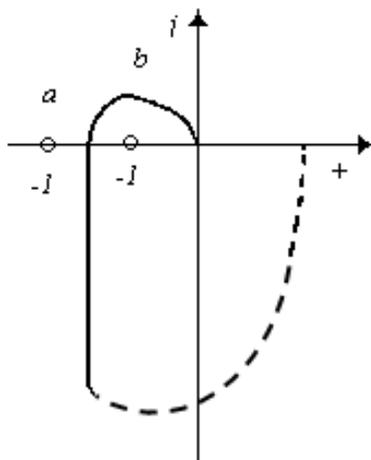


Рис.4.18. Амплитудная и фазовая частотные характеристики

На рисунках пунктиром представлены части характеристик, относящиеся к $W_p'(j\omega)$.

Построим амплитудно – фазовую характеристику (годограф Найквиста) и определим устойчивость замкнутой системы



Дуга бесконечно большого радиуса длиной

$\frac{\pi}{2} \cdot \nu$ ($0 < \omega < \infty$) называется дополнением в бесконечности. ν – кол-во полюсов разомкнутой системы на мнимой оси.

В соответствии с критерием Найквиста для нейтрально устойчивых разомкнутых систем (если разомкнутая система нейтрально устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой системы с дополнением в бесконечности не охватывал т. $(-1, j0)$) делаем выводы:

Рис.4.19. Годограф исследуемой системы

а) – замкнутая система устойчива,

в) – замкнутая система неустойчива.

б) Рассмотрим устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией $W_p(p)$, имеющей два полюса на оси ординат:

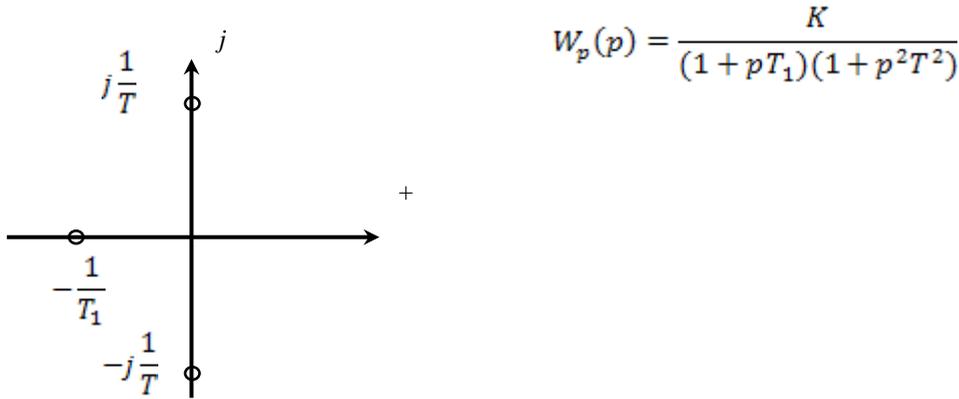


Рис.4.20. Положение полюсов $W_p(p)$

$$p_1 = -\frac{1}{T_1} \quad p^2T^2 = -1 \quad p_{2,3} = \pm j \cdot \frac{1}{T}$$

Для определения устойчивости замкнутой системы заменим передаточную функцию разомкнутой системы близкой к ней передаточной функцией

$$W'_p(p) = \frac{K}{(1 + pT_1)(1 + 2T\xi p + p^2T^2)}$$

Очевидно, что $W_p(p) = \lim_{\xi \rightarrow 0} W'_p(p)$.

Найдем полюса передаточной функции разомкнутой системы $W'_p(p)$:

$$p_1 = -\frac{1}{T_1};$$

$$p_{2,3} = \frac{-T\xi \pm \sqrt{T^2\xi^2 - T^2}}{T^2} = -\frac{\xi}{T} \pm j\frac{1}{T}\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$W_p(j\omega) = \frac{K e^{j0}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} e^{j \arctg(\omega T_1)} (1 - \omega^2 T^2) e^{j\varphi_k}}, \quad \varphi_k = \begin{cases} 0, \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi, \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

$1 + p^2T^2|_{j\omega} = 1 - \omega^2T^2$ можно представить на комплексной плоскости:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_1 - \varphi_k$$

$$\omega > \frac{1}{T} \qquad \omega \leq \frac{1}{T}$$

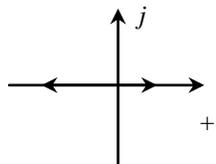


Рис.4.21. Положение вектора на комплексной плоскости

Построим амплитудную частотную, фазовую частотную характеристики разомкнутой системы и ее годограф, отмечая пунктиром участки характеристик, относящиеся к $W_p'(j\omega)$.

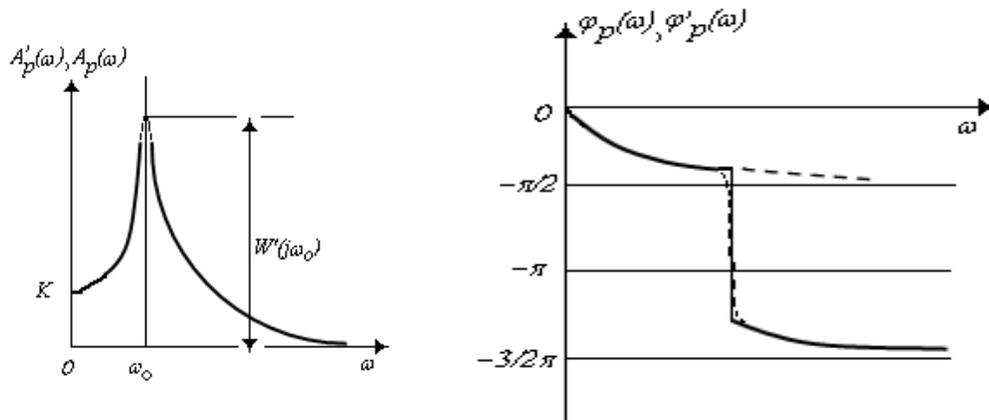


Рис.4.22. Амплитудная и фазовая частотные характеристики

Построим амплитудно – фазовую характеристику разомкнутой системы и определим устойчивость замкнутой системы по критерию Найквиста.

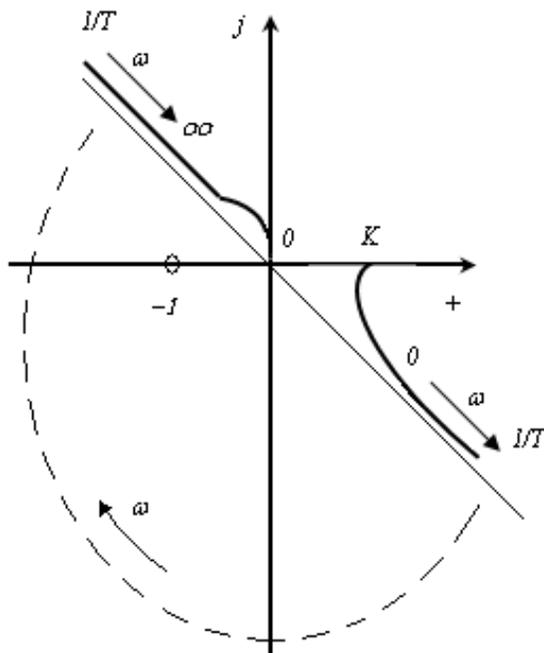


Рис.4.23. Годограф исследуемой системы

Как видно из рисунка, годограф Найквиста вместе с дополнением в бесконечности (дугой бесконечно большого радиуса длиной π) охватывает точку с координатами $(-1; j0)$, следовательно замкнутая система является неустойчивой при любом коэффициенте усиления разомкнутой системы, т.е. является структурно неустойчивой.

Замкнутая система неустойчива, так как годограф разомкнутой системы, вместе с дополнением в бесконечности, охватывает точку $(-1, j_0)$.

Системы неустойчивые ни при каком коэффициенте усиления называются *структурно неустойчивыми системами*.

4.3.6. Общая формулировка критерия Найквиста.

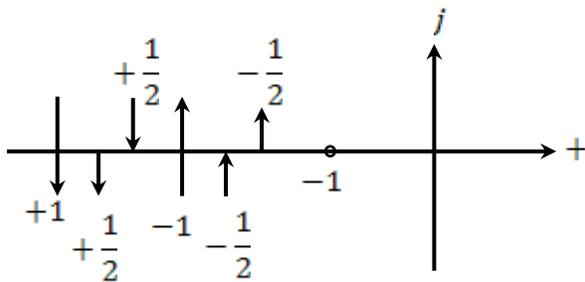


Рис.4.24. Переходы через действительную ось годографом разомкнутой системы

Общая формулировка:

Замкнутая система устойчивая, если алгебраическая сумма числа переходов годографом разомкнутой системы (с дополнением в бесконечности) отрезка действительной оси от -1 до $-\infty$ равна $\frac{l}{2}$ ($0 < \omega < +\infty$), l ($-\infty < \omega < +\infty$), где l – число правых полюсов передаточной функции разомкнутой системы. (рис.4.24)

Пример применения: рассмотренный ранее пример с неустойчивой в разомкнутом состоянии системой (рис.4.25):

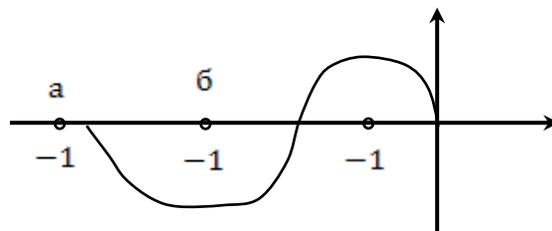


Рис.4.25. Пример применения общей формулировки критерия Найквиста

Рассчитаем алгебраическую сумму числа переходов отрезка действительной оси годографом разомкнутой системы и проверим выполнение равенства ее числу правых полюсов $l=1$:

а) $\Sigma = 0 \rightarrow$ замкнутая система неустойчива, так как число переходов равно 0, а $l = 1$

- а) $\Sigma = +\frac{1}{2} \rightarrow$ замкнутая система устойчива, так как число переходов равно числу правых полюсов: $\frac{l}{2} = \frac{1}{2}$
- в) $\Sigma = -\frac{1}{2} \rightarrow$ замкнутая система неустойчива, так как алгебраическая сумма числа переходов равна -1: $l = 1 \quad \frac{l}{2} = -\frac{1}{2}$.

Лекция 15

4.3.7. Логарифмический критерий устойчивости. Лекция 15.

Логарифмический критерий устойчивости позволяет определить устойчивость замкнутой системы по логарифмическим характеристикам разомкнутой системы и является, в общем, перенесением общей формулировки критерия Найквиста на логарифмические частотные характеристики.

Таким образом, критерий Найквиста рассматривает число переходов годографом разомкнутой системы отрезка действительной оси от $-\infty$ до -1, что означает

$$A_p(\omega) > 1 \quad \varphi_p(\omega) = -\pi, -3\pi, -5\pi \dots \text{ Для логарифмических характеристик это означает, что}$$

$$L(\omega) > 0 \quad \text{и} \quad \varphi_p(\omega) = -\pi, -3\pi, -5\pi \dots$$

Переход сверху вниз отрезка действительной оси означает, что фазовая характеристика переходит в направлении от более отрицательного значения фазы к менее отрицательному, т.е. для фазовой частотной характеристики разомкнутой системы это равносильно пересечению прямых $-\pi, -3\pi, -5\pi \dots$ в направлении снизу вверх, и наоборот, отрицательному переходу будет соответствовать переход фазовой частотной характеристики разомкнутой системы прямых сверху вниз.

Формулировка критерия: *Замкнутая систем устойчива, если алгебраическая сумма числа переходов фазовой частотной характеристикой разомкнутой системы (вместе с дополнением в бесконечности) на участках частот, для которых логарифмическая амплитудная частотная характеристика положительна, равна $l/2$, где l – число правых полюсов передаточной функции разомкнутой системы.*

Дополнение в бесконечности соответствует дополнению в бесконечности для годографов при использовании критерия Найквиста.

Продemonстрируем это на примере приведенных ниже логарифмических характеристик (рис.4.26).

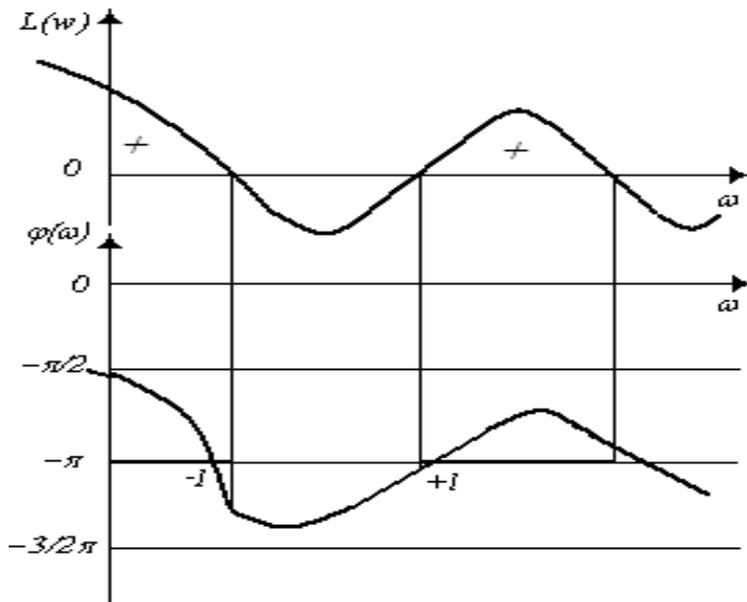


Рис.4.26. Пример применения логарифмического критерия устойчивости

Для приведенного выше примера алгебраическая сумма переходов фазовой частотной характеристикой разомкнутой системы прямой $-\pi$ равна 0 на участках частот, для которых логарифмическая амплитудная частотная характеристика положительна, следовательно, замкнутая системы устойчива в том случае, когда в передаточной функции разомкнутой системы нет правых полюсов.

5. Качество систем автоматического управления

Устойчивость – это необходимое, но недостаточное условие функционирования систем автоматического управления (САУ). Важным является качество САУ.

Качество – комплекс характеристик, обеспечивающий требуемые свойства системы. Одним из основных свойств является точность обработки типовых входных сигналов. Продемонстрируем это на примере типовой структурной схемы.

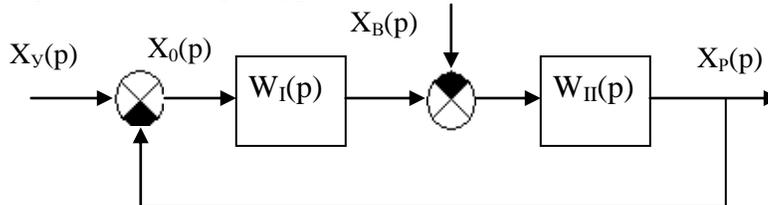


Рис.5.1. Типовая структурная схема САУ

Целью системы является обработка заданного управляющего сигнала с наибольшей точностью, т.е. добиться равенства $x_p(t) \cong x_y(t)$ или, иными словами, минимизировать сигнал

ошибки $x_0(t) = x_y(t) - x_p(t)$. Вспомним, что $x_0(t) = L^{-1}\{X_0(p)\}$, а

$$X_0(p) = \frac{1}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} X_y(p) + \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)} X_e(p). \text{ Точность САУ определяется тем,}$$

насколько различаются управляющий сигнал и сигнал на выходе системы. Эту задачу можно решать в динамике, вводя в систему дополнительные корректирующие устройства или в статике, достигая точности системы в установившемся режиме при отработке типовых входных сигналов, т.е. $x_{0,уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t)$.

5.1. Точность систем в установившемся режиме

Для определения ошибки системы в установившемся режиме $x_{0,уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$ воспользуемся теоремой о предельном переходе $x_{0,уст} = \lim_{p \rightarrow 0} pX_0(p)$ при $p \rightarrow 0$.

Для определения установившегося значения ошибки представим передаточные функции в

следующем виде: $W_I(p) = \frac{B_I(p)}{p^{\nu_I} \cdot A_I(p)}$, где $B_I(0) \neq 0$; $A_I(0) \neq 0$;

$$W_{II}(p) = \frac{B_{II}(p)}{p^{\nu_{II}} \cdot A_{II}(p)}, \text{ где } B_{II}(0) \neq 0; \quad A_{II}(0) \neq 0;$$

ν_I – разность числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев в передаточной функции $W_I(p)$;

ν_{II} – разность числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев в передаточной функции $W_{II}(p)$;

$$W_p^y(p) = W_I(p)W_{II}(p) = \frac{B_I(p)B_{II}(p)}{p^{\nu_I} \cdot p^{\nu_{II}} \cdot A_I(p) \cdot A_{II}(p)} = \frac{B(p)}{p^{\nu} \cdot A(p)}, \text{ где } \nu = \nu_I + \nu_{II}$$

$$B(0) \neq 0 \quad A(0) \neq 0 \quad \frac{B(0)}{A(0)} = k_p \quad \frac{B_I(0)}{A_I(0)} = k_I \quad \frac{B_{II}(0)}{A_{II}(0)} = k_{II}$$

5.1.1. Ошибки по управляющему воздействию

$$x_{0,уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + W_p^y(p)} \cdot X_y(p)$$

$$\frac{1}{1 + W_p^y(p)} = \frac{1}{1 + \frac{B(p)}{p^{\nu} A(p)}} = \frac{p^{\nu}}{p^{\nu} + \frac{B(p)}{A(p)}}.$$

Рассмотрим типовые входные воздействия и их изображения; при этом ограничимся степенными входными сигналами:

Степенные входные сигналы

$f(t)$	$F(p)$
$1(t)$	$1/p$
$t \cdot 1(t)$	$1/p^2$
$t^n/n!$	$1/p^{n+1}$

Если уровень входного сигнала равен a , то изображение по Лапласу также умножается на a ,

таким образом, $\frac{at^n}{n!} \div \frac{a}{p^{n+1}}$.

Если $n=0$, то входным сигналом является единичная ступенчатая функция $1(t)$ и при его отработке возникает статическая ошибка. Таким образом, *статической ошибкой* по какому-либо воздействию называется ошибка, возникающая при отработке этого постоянного входного воздействия.

Если $n=1$, то входным сигналом является линейная возрастающая функция $t \cdot 1(t)$ и при его отработке возникает кинетическая ошибка. Таким образом, *кинетической ошибкой* по какому-либо воздействию называется ошибка, возникающая при отработке этого линейно возрастающего входного воздействия.

Если $n=2$, то входным сигналом является квадратичная функция $t^2 \cdot 1(t)$ и при его отработке возникает ошибка, которая называется *ошибкой по ускорению*. Таким образом, *ошибкой по ускорению* по какому-либо воздействию называется ошибка, возникающая при отработке этого квадратичного входного воздействия.

Примем в качестве входного управляющего сигнала сигнал вида $x_y(t) = \frac{a \cdot t^\mu}{\mu!} \cdot 1(t)$, для

которого изображение по Лапласу имеет вид: $X_y(p) = \frac{a}{p^{\mu+1}}$. Тогда ошибку по управлению

можно записать в виде:

$$x_{0,уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + W_p^y(p)} \cdot X_y(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{p^\nu}{p^\nu + \frac{B(p)}{A(p)}}} \cdot \frac{a}{p^{\mu+1}} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{p^\nu}{p^\nu + \frac{B(p)}{A(p)}}} \cdot \frac{a}{p^{\mu+1}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p^\nu}{p^\nu + \frac{B(0)}{A(0)}} \cdot \frac{a}{p^{\mu+1}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\nu+1}}{p^\nu + k_p} \cdot \frac{a}{p^{\mu+1}}$$

Как видно из приведенной формулы, ошибка при обработке степенного управляющего воздействия зависит от уровня входного сигнала a , коэффициента усиления разомкнутой системы и соотношения между ν и μ .

Результат можно свести в таблицу:

$\nu \backslash \mu$	0	1	2	Примечания
0	$a/(1+k_p)$	0	0	Статическая ошибка по управлению
1	∞	a/k_p	0	Кинетическая ошибка по управлению
2	∞	∞	a/k_p	Ошибка по ускорению (по управлению)
Примечания	Статическая САУ по управлению	Астатическая САУ по управлению	САУ с астатизмом 2-го порядка по управлению	

Введем некоторые определения:

Статической называется САУ, обрабатывающая постоянный сигнал с конечной ошибкой.

Кинетической называется САУ, обрабатывающая линейно возрастающий сигнал с конечной ошибкой.

Системой с астатизмом 2-го порядка называется САУ, обрабатывающая линейно возрастающий сигнал с конечной ошибкой.

Системой с астатизмом ν -го порядка называется САУ, обрабатывающая степенной сигнал ν -го порядка с конечной ошибкой.

Конечные значения ошибок прямо пропорциональны уровню входного сигнала, обратно пропорциональны коэффициенту усиления разомкнутой системы по управлению. При

соотношении $\nu > \mu$ ошибка принимает нулевое значение, а при соотношении $\nu < \mu$ ошибка в установившемся режиме бесконечна, т.е. система не обрабатывает входного управляющего сигнала и отклонение со временем увеличивается.

Величина ν называется *порядком астатизма по управлению* и равна разности числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев, лежащих в цепи обратной связи между сигналом ошибки и управляющим входным воздействием, т.е. лежащих в $W_p^y(p)$.

5.1.2. Ошибки по возмущающему воздействию

$$x_{0,уст}^e = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)} \cdot X_e(p)$$

$$\frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)} = \frac{\frac{B_{II}(p)}{p^{\nu_{II}} A_{II}(p)}}{1 + \frac{B(p)}{p^\nu A(p)}} = \frac{p^{\nu - \nu_{II}} \cdot \frac{B_{II}(p)}{A_{II}(p)}}{p^\nu + \frac{B(p)}{A(p)}} = \frac{p^{\nu_I} \cdot \frac{B_{II}(p)}{A_{II}(p)}}{p^\nu + \frac{B(p)}{A(p)}}$$

Рассмотрим типовые входные возмущающие воздействия и их изображения; при этом ограничимся степенными входными сигналами:

Если уровень входного возмущающего сигнала равен b , то изображение по Лапласу также умножается на b , таким образом, $\frac{bt^n}{n!} \div \frac{b}{p^{n+1}}$.

Если $n=0$, то входным возмущающим сигналом является единичная ступенчатая функция $I(t)$ и при его обработке возникает статическая ошибка по возмущению. Таким образом, *статической ошибкой* по возмущающему воздействию называется ошибка, возникающая при обработке этого постоянного возмущающего входного воздействия.

Если $n=1$, то входным возмущающим сигналом является линейная возрастающая функция $t \cdot I(t)$ и при его обработке возникает кинетическая ошибка по возмущению. Таким образом, *кинетической ошибкой* по возмущающему воздействию называется ошибка, возникающая при обработке этого линейно возрастающего входного возмущающего воздействия.

Если $n=2$, то входным возмущающим сигналом является квадратичная функция $t^2 \cdot I(t)$ и при его обработке возникает ошибка, которая называется *ошибкой по ускорению* (по возмущению). Таким образом, *ошибкой по ускорению* по возмущающему воздействию называется ошибка, возникающая при обработке этого квадратичного возмущающего входного воздействия.

Примем в качестве входного управляющего сигнала сигнал вида $x_{\epsilon}(t) = \frac{b \cdot t^{\mu}}{\mu!} \cdot 1(t)$, для

которого изображение по Лапласу имеет вид: $X_{\epsilon}(p) = \frac{b}{p^{\mu+1}}$. Тогда ошибку по возмущению

можно записать в виде:

$$x_{0,уст}^{\epsilon} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)} \cdot X_{\epsilon}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p^{\nu_I} \cdot \frac{B_{II}(p)}{A_{II}(p)}}{p^{\nu} + \frac{B(p)}{A(p)}} \cdot \frac{b}{p^{\mu+1}} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\nu_I+1} \cdot \frac{B_{II}(0)}{A_{II}(0)}}{p^{\nu} + \frac{B(0)}{A(0)}} \cdot \frac{b}{p^{\mu+1}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\nu_I+1} \cdot k_{II}}{p^{\nu} + k_p} \cdot \frac{b}{p^{\mu+1}}$$

Как видно из приведенной формулы, ошибка при обработке степенного управляющего воздействия зависит от уровня входного возмущающего сигнала b , коэффициента усиления разомкнутой по возмущению k_I системы и соотношения между ν_I и μ .

Результат можно свести в таблицу:

$\mu \backslash \nu_I$	0	1	2	Примечания
0	$b \cdot k_{II} / ([1] + k_p)$	0	0	Статическая ошибка по возмущению
1	∞	$b \cdot k_{II} / ([1] + k_p)$	0	Кинетическая ошибка по возмущению
2	∞	∞	$b \cdot k_{II} / ([1] + k_p)$	Ошибка по ускорению (по возмущению)
Примечания	Статическая САУ по возмущению	Астатическая САУ по возмущению	САУ с астатизмом 2-го порядка по возмущению	

Квадратные скобки учитывают ситуацию, когда $\nu = 0$, а $\nu_I \neq 0$ ($0^0 = 1$).

Введем некоторые определения:

Статической по возмущению называется САУ, обрабатывающая постоянный возмущающий сигнал с конечной ошибкой.

Кинетической по возмущению называется САУ, отрабатывающая линейно возрастающий возмущающий сигнал с конечной ошибкой.

Системой с астатизмом 2-го порядка (по возмущению) называется САУ, отрабатывающая линейно возрастающий возмущающий сигнал с конечной ошибкой.

Системой с астатизмом ν -го порядка (по возмущению) называется САУ, отрабатывающая степенной возмущающий сигнал ν -го порядка с конечной ошибкой.

Конечные значения ошибок прямо пропорциональны уровню входного сигнала, обратно пропорциональны коэффициенту усиления разомкнутой системы по возмущению (k_I). При соотношении $\nu_I > \mu$ ошибка принимает нулевое значение, а при соотношении $\nu_I < \mu$ ошибка в установившемся режиме бесконечна, т.е. система не отрабатывает входного управляющего сигнала и отклонение со временем увеличивается.

Величина ν_I называется *порядком астатизма по возмущению* и равна разности числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев, лежащих в цепи обратной связи между сигналом ошибки и возмущающим входным воздействием, т.е. лежащих в $W_I(p)$. Лекция 16

5.1.3. Пример расчета ошибок системы автоматического управления. Лекция 16.

Рассчитаем ошибки системы, представленной структурной схемой:

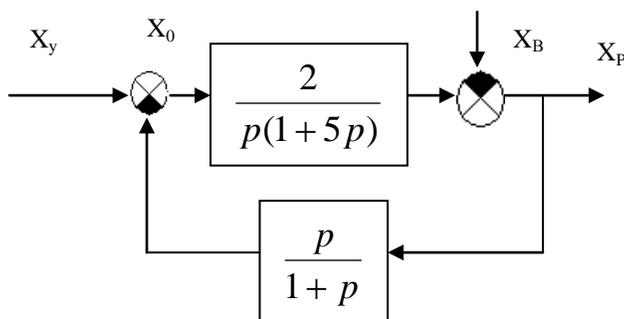


Рис.5.2. Структурная схема САУ

Для вычисления ошибки по управляющему сигналу запишем передаточную функцию ошибки по управлению:

$$W_0^y(p) = \frac{X_0^y(p)}{X_y(p)} = \frac{1}{1 + W_p^y(p)}$$

$$W_p^y(p) = \frac{2p}{p(1+p)(1+5p)} = \frac{2}{(1+p)(1+5p)}$$

Статическая ошибка по управлению: $x_{o,уст}^y = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{(1+p)(1+5p)}} \cdot \frac{a}{p} = \frac{a}{3}$;

$$\text{Кинетическая ошибка по управлению: } x_{o,уст}^y = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{(1+p)(1+5p)}} \cdot \frac{a}{p^2} = \infty;$$

Для вычисления ошибки по возмущающему сигналу запишем передаточную функцию ошибки по возмущению:

$$W_0^e(p) = \frac{X_0^e(p)}{X_e(p)} = \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)}; \quad W_{II}(p) = \frac{p}{1+p}$$

$$W_0^e(p) = \frac{\frac{p}{1+p}}{1 + \frac{2}{(1+p)(1+5p)}} = \frac{p \cdot (1+5p)}{(1+p)(1+5p) + 2};$$

$$\text{Статическая ошибка по возмущению: } x_{o,уст}^e = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p \cdot (1+5p)}{(1+p)(1+5p) + 2} \cdot \frac{b}{p} = 0;$$

$$\text{Кинетическая ошибка по управлению: } x_{o,уст}^e = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p \cdot (1+5p)}{(1+p)(1+5p) + 2} \cdot \frac{b}{p^2} = \frac{b}{2};$$

$$\text{Ошибка по ускорению: } x_{o,уст}^e = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p \cdot (1+5p)}{(1+p)(1+5p) + 2} \cdot \frac{b}{p^3} = \infty.$$

Таким образом, система является статической по управляющему воздействию и астатической по возмущающему воздействию, что соответствует приведенным ранее таблицам.

5.2. Точность систем в динамическом режиме

Временные показатели качества

Основное условие работоспособности систем автоматического управления заключается в ее устойчивости. Однако устойчивость - недостаточное условие ее практического применения. Наряду с этим выдвигаются определенные требования к качеству процессов регулирования. Комплекс требований, определяющих поведение системы в установившемся и переходном режимах отработки заданного воздействия определяется показателями качества работы САУ: прямыми показателями качества (быстродействием и характером переходного процесса), определяемыми по переходной характеристике САУ, косвенными (запасами устойчивости по амплитуде и фазе), точностью.

Показатели качества процесса отработки входного воздействия будем рассматривать для системы, структурная схема которой изображена на рисунке. Приведенном ниже.

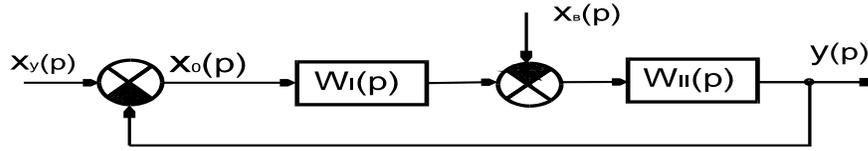


Рис.5.3. Структурная схема САУ

В динамическом режиме поведение замкнутой системы определяется ее удалением от состояния неустойчивости, которое можно определить по частотным характеристикам разомкнутой системы (по запасам устойчивости) или временным характеристикам замкнутой системы (прямым показателям качества).

Лекция 17

5.2.1. Запасы устойчивости по амплитуде и фазе. Лекция 17.

Замкнутая система должна быть не просто устойчивой, а обладать определенными запасами устойчивости по амплитуде и по фазе. Запас устойчивости по амплитуде определяется ее удалением годографа разомкнутой системы от критической точки $(-1;j0)$, а именно величиной $\Delta A = 1 - A_\pi$, где A_π – значение амплитудной частотной характеристики на частоте ω_π , при которой $\varphi(\omega_\pi) = -\pi$.

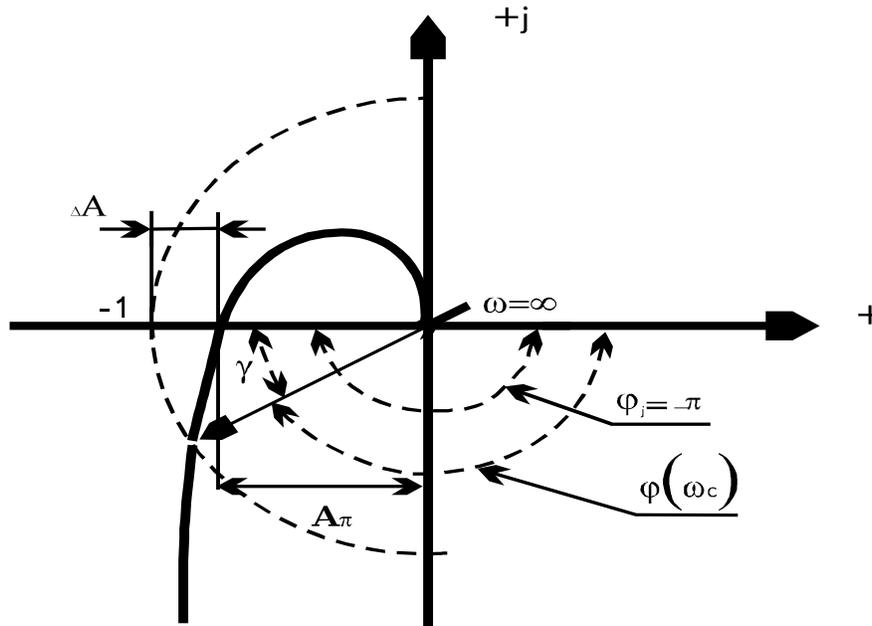


Рис.5.4. Определение запаса устойчивости по фазе γ и модулю ΔA ($1/A_\pi$)

Запас устойчивости по фазе обозначается γ и определяется на частоте среза ω_c , при которой амплитуда $A(\omega_c) = 1$, таким образом, с учетом отрицательного значения $\varphi(\omega_c)$,

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c), \quad (2.1)$$

где $\varphi(\omega_c)$ - значение аргумента вектора $W_p(j\omega)$ при $\omega = \omega_c$.

Изображенные на рис.2.2 годограф $W_p(j\omega)$ показывает, что система в замкнутом состоянии устойчива и обладает запасом устойчивости по фазе $\gamma > 0$ и по амплитуде $\Delta A > 0$.

Запасы устойчивости можно определить и по логарифмическим АЛ характеристикам, при этом логарифмический запас устойчивости по амплитуде определяется как $\Delta L = 0 - L_\pi = 0 - 20 \cdot \lg(A_\pi) = 20 \cdot \lg(1/A_\pi) > 0$ для устойчивой системы ($1/A_\pi > 1$) (в логарифмических единицах $L_\pi = 20 \cdot \lg(A_\pi)$ [дБ]), где A_π - значение модуля вектора $W_p(j\omega)$, аргумент которого равен $\varphi = -\pi$ (рис.2.2).

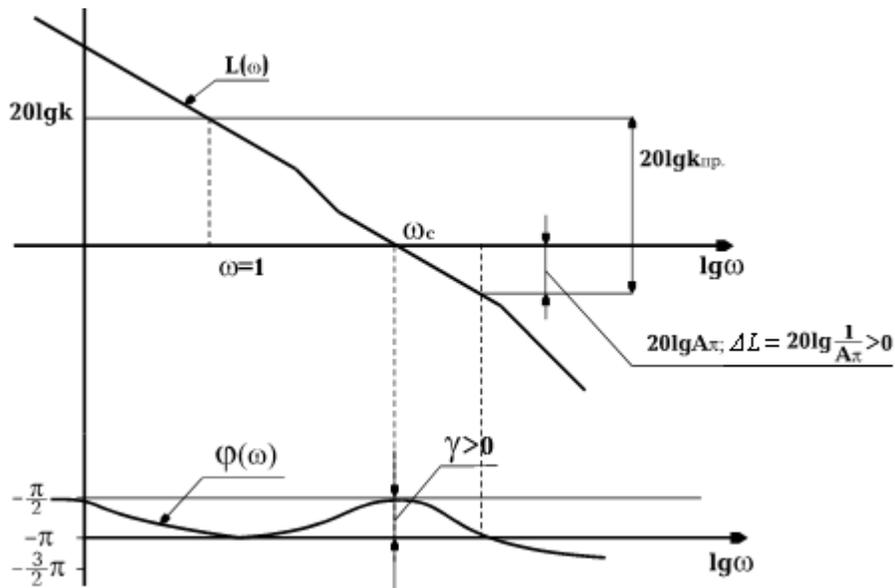


Рис.5.5. Определение запаса устойчивости по ЛАЧХ и ЛФЧХ

Коэффициент усиления, при котором замкнутая САУ находится на границе колебательной устойчивости называется предельным $K_{пред}$.

На основании критерия устойчивости Найквиста предельный коэффициент усиления может быть определен соотношением

$$K_{пред} = K \cdot (1/A_\pi).$$

Предельный коэффициент усиления САУ можно определить по логарифмическим частотным характеристикам (рис.5.5.)

$$20 \cdot \lg K_{пред} = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg A_\pi.$$

Если коэффициент усиления разомкнутой системы меньше предельного коэффициента $K_{пред}$, то система устойчива и обладает запасом устойчивости (по фазе, модулю). В противном случае - система неустойчива.

5.2.2. Характер переходного процесса и быстродействие САУ

Характеристики САУ определяются по ее реакции на единичную ступенчатую функцию, т.е. по переходной характеристике системы. При этом определяются *прямые показатели качества системы*.

Время регулирования t_p служит основной характеристикой быстродействия системы. Быстродействие вычисляется от момента подачи входного воздействия, до момента, когда отклонение функции $h(t)$ не выходит за пределы некоторой заданной зоны $\pm \Delta$ (рис.5.6):

$h(t) - h_{уст.} \leq \Delta$, где Δ – значение, определяемое заданной точностью системы. Обычно Δ задается в пределах (3-5)% от установившегося значения $h_{уст.} = h(\infty)$ (рис.2.4).

$$h_{уст.} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_3(p) \cdot \frac{1}{p},$$

где $W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}$ - передаточная функция замкнутой системы.

Установившееся значение переходной функции для статической системы ($\nu = 0$):

$$h_{уст.} = \frac{W_p(0)}{1 + W_p(0)} = \frac{k}{1 + k} \approx 1, \text{ где } k \text{ - коэффициент усиления разомкнутой системы,}$$

($k \gg 1$).

Для астатической системы $\nu = 1$: $h_{уст.} = 1$, так как $\lim_{p \rightarrow 0} W_p(p) \rightarrow \infty$.

Как видно из рис.5.6, характер переходного процесса может быть колебательным и апериодическим. Колебательный процесс характеризуется:

1. Временем регулирования t_p ;
2. Максимальным перерегулированием $\varepsilon_m = h_m - h_{уст.}$.
3. Относительным перерегулированием σ :

$$\sigma = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} \cong h_m - 1; h_\infty = h_{уст.}.$$

4. Временем достижения первого максимума - t_m ;
5. Числом колебаний N за время регулирования t_p ;
6. Точность замкнутой системы Δ в установившемся режиме, о котором мы уже говорили ранее.

Таким образом, прямыми показателями качества переходного процесса являются: время регулирования t_p , перерегулирование ε_m , $\sigma(h_m)$, время достижения первого максимума t_m , число колебаний N , точность системы, которые определяются непосредственно по переходной характеристике $h(t)$.

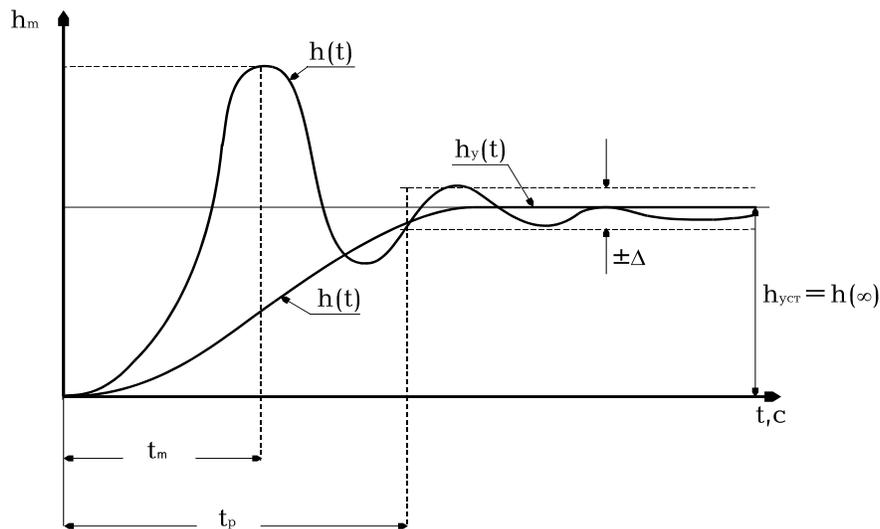


Рис.5.6. Переходная функция $h(t)$ и ее параметры

Для апериодического переходного процесса прямыми показателями качества являются время регулирования и точность системы. Переходная функция системы $h(t)$ может быть получена классическим методом по передаточной функции САУ:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W_3(p)}{p} \right].$$

где $\frac{1}{p}$ - изображение по Лапласу единичной ступенчатой функции и экспериментально для реальной исследуемой системы или для ее модели. При этом на вход системы (модели) подается единичный скачок. Реакция на выходе и будет являться переходной функцией $y(t) = h(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.-288 с.
2. Ягодкина Т.В., Смагина И.А., Митрофанов В.Е., Анализ линейных непрерывных систем автоматического управления. Практические и расчетные задания: методическое пособие / М.: Издательский дом МЭИ, 2010. – 80 с.
3. Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А., Беседин В.М., Исследование САУ с использованием прикладного пакета Matlab, лабораторный практикум по курсу «основы автоматического управления». -М.: Изд-во МЭИ, 2006. – 76 с.
4. С.А.Хризолитова, Т.В.Ягодкина, О.С.Колосов, О.А. Бондин. Учебно-лабораторный практикум по курсу «Основы теории управления». – М.:Изд-во МЭИ, 2006. – 76 с.
5. Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А., Бондин О.А., Применение Mathcad для решения задач теории автоматического управления: учебное пособие. – М.: Издательство МЭИ, 2004. – 52 с.