

РЯЗАНСКОЕ ВЫСШЕЕ ВОЗДУШНО-ДЕСАНТНОЕ КОМАНДНОЕ
УЧИЛИЩЕ ИМЕНИ ГЕНЕРАЛА АРМИИ В.Ф.МАРГЕЛОВА
Кафедра информационных технологий и общеобразовательных
дисциплин

Н. С. Селиверстова

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения

Рязань 2016

И55

Селиверстова Н. С.

Методические рекомендации по изучению дисциплины «Теоретическая механика» [Текст]: учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения / Н. С. Селиверстова. – Рязань: РВВДКУ, 2016. – 58 с. – илл.

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов заочной формы обучения в рамках основной профессиональной образовательной программы по специальности 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» при изучении дисциплины «Теоретическая механика».

. Оно содержит выдержки из учебной программы курса, методические рекомендации по изучению дисциплины, список литературы, рекомендованной для самостоятельной работы. Особое внимание в пособии уделено организации работы над контрольным заданием, выполняемым самостоятельно. Приведены требования к оформлению контрольного задания и методические указания по его выполнению.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ 23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И КОМПЛЕКСОВ».....	5
УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА».....	7
Целевая установка.....	7
Содержание разделов и тем.....	7
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	8
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И СДАЧЕ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ.....	9
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.....	11
Статика.....	11
Кинематика.....	13
Динамика.....	20
КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 1.....	26
ТАБЛИЦЫ И СХЕМЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ.....	26
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ.....	31
ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ЗАЩИТЫ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ И СДАЧИ ЗАЧЕТА.....	43
КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 2.....	44.
ТАБЛИЦЫ И СХЕМЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ.....	46
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ.....	48
ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ЗАЩИТЫ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ И СДАЧИ ЭКЗАМЕНА.....	57

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов заочной формы обучения по специальности 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» при изучении дисциплины «Теоретическая механика». Оно содержит выдержки из учебной программы курса, методические рекомендации по изучению дисциплины, список литературы, рекомендованной для самостоятельной работы.

Особое внимание в пособии уделено организации работы над контрольным заданием, выполняемым самостоятельно. Приведены требования к оформлению контрольного задания и методические указания по его выполнению.

Настоящее контрольное задание посвящено расчетам реакций опор, кинематическому анализу плоского механизма, решению задачи динамики. Это связано с тем, что только при знании реакций опор можно определить максимальные внутренние силы, а по ним и максимальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях деталей. Опыт проведения кинематического анализа механизмов, полученный при выполнении настоящего задания, будет востребован при изучении последующих учебных дисциплин, выполнении курсовых работ и курсовых проектов по ряду специальных дисциплин и при выполнении дипломного проекта. Умение решать задачи динамики точки и механической системы также имеет существенное значение в подготовке современного бакалавра.

Пособие содержит также примерный перечень теоретических вопросов для подготовки к сдаче отчетностей (контрольного задания и экзамена в третьем семестре).

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И КОМПЛЕКСОВ»

Теоретическая механика является одной из важнейших фундаментальных общенаучных дисциплин. Она играет существенную роль в подготовке бакалавров специальности 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов». На результатах теоретической механики базируются общеинженерные дисциплины: сопротивление материалов, детали машин, теория механизмов и машин и другие.

Дисциплина «Теоретическая механика» изучается в течение трех семестров на лекциях, практических и лабораторных занятиях, при выполнении контрольного задания и во время самостоятельной работы. Изучение дисциплины заканчивается зачетом в третьем семестре и экзаменом в четвертом семестре.

В основе теоретической механики лежат законы, подтвержденные практикой, отражающие определенный класс явлений природы, связанных с движением и взаимодействием материальных объектов. Эти законы, проверенные многовековой практикой, формулируются в виде аксиом и вместе с рядом основных понятий составляют научную основу теоретической механики.

Предметом изучения теоретической механики является механическое движение и взаимодействие материальных объектов.

Весь курс теоретической механики традиционно делится на три раздела: статику, кинематику, динамику.

Лекции по теоретической механике посвящены изложению содержания курса, анализу основных понятий, законов механики и методов решения тех или иных классов задач. При этом предполагается, что с частью понятий, соотношений и теорем обучаемые знакомы из математики или физики. В порядке исключения допускается выносить краткие выводы некоторых положений или формул на самостоятельную проработку по учебнику, например, выражений проекций главного вектора и главного момента сил инерции вращающегося твёрдого тела на декартовы оси.

Практические и лабораторные занятия по курсу теоретической механики имеют весьма важное значение. В основном эти занятия должны быть посвящены решению задач, в том числе задач, связанных с будущей специальностью выпускника вуза. Особое внимание при проведении занятий уделяется:

- формированию и развитию навыков естественно-научного, инженерного мышления;
- привитию навыков построения и анализа моделей простейших реальных задач;
- выработке умений решать несложные прикладные задачи, связанные с автомобильной тематикой;

– методам контроля правильности решения задачи.

Для усвоения материала теоретической механики самостоятельная работа студентов заочного отделения является определяющей. Самостоятельная работа состоит из работы по самостоятельному изучению отдельных тем курса, по выполнению текущих заданий и работы по выполнению контрольных заданий по целым разделам (темам) дисциплины.

Система контроля работы студентов. Текущий контроль знаний студентов осуществляется опросом на практических занятиях по содержанию лекций, проверкой выполнения текущих заданий, проведением самостоятельных и контрольных работ, сдачей экзамена. Контроль над выполнением контрольного задания проводится в два этапа: 1) предварительная проверка правильности письменных отчетов; 2) защита контрольного задания в письменной или устной форме.

Окончательный итог подводится при сдаче экзамена за весь курс.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Раздел 1. СТАТИКА

Тема 1. Аксиомы статики. Системы сил. Пара сил

Связи и их реакции. Момент силы относительно точки и оси. Условия равновесия плоской и пространственной систем сил. Теория пар сил. Центр системы параллельных сил. Центр тяжести. Трение.

Раздел 2. КИНЕМАТИКА

Тема 2. Кинематика точки

Способы задания движения точки. Кинематические характеристики движения точки. Частные случаи движения точки.

Тема 3. Кинематика твердого тела

Поступательное, вращательное, плоское движение твердого тела. Сложное движение.

Раздел 3. ДИНАМИКА

Тема 4. Динамика материальной точки

Законы механики Галилея-Ньютона. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Тема 5. Общие теоремы динамики

Центр масс механической системы. Теорема о движении центра масс. Силы внешние и внутренние. Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения. Кинетический момент механической системы. Осевые и центробежные моменты инерции. Теорема об изменении кинетического момента. Дифференциальные уравнения поступательного и вращательного движения твердого тела. Работа и мощность. Закон сохранения механической энергии.

Тема 6. Общие принципы и методы решения задач динамики

Метод кинетостатики. Принцип Даламбера для материальной точки и несвободной механической системы. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики. Явление удара. Ударный импульс. Расчет работы при ударе. Теорема о потере кинетической энергии при ударе.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная:

1 Цывилевский В. Л. Теоретическая механика: Учебник / В.Л.Цывилевский. – 4-е издание, перераб. и доп. – М.: КУРС : ИНФРА-М, 2016. – 368 с.

2 Теоретическая механика[Текст]: Сборник контрольных заданий / под общей редакцией В.И. Кулюгина. – Рязань: РВАИ, 2007. – 127 с.

3 Теоретическая механика. Курс лекций. Электронное учебное пособие. – Рязань: РВАИ, 2005.

Дополнительная:

1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, (2004).

2. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Ч. 1. Статика. – Рязань: РВАИ, 2005. – 132 с.

3. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Ч. 2. Кинематика. – Рязань: РВАИ, 2004. – 92 с.

4. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Ч.3. Динамика. – Рязань: РВАИ, 2005. – 233 с.

5. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учебное пособие. – Санкт-Петербург: изд. «Лань», 2004. – 448 с.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

1. ISBN 978 – 5– 369 – 00757 – 0 (РИОР)

ISBN 978 – 5– 16 – 0045245 (ИНФРА-М)

Механика: Учеб. пособие для вузов/ В.А. Волосухин [и др.]. – ISBN 978 – 5– 369 – 00757 – 0 (РИОР)

.РИОР; ИНФРА-М, 2011 – 512 с.

2. ISBN 978 – 5– 222 – 22787 – 9

Теоретическая механика: учебник/ Н.Г. Васьюко [и др.] – изд. 2-е, испр. и доп. – Ростов н/Д: Феникс – 2015 – 302 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И СДАЧЕ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Контрольное задание №1 состоит из двух задач, контрольное задание №2 предполагает решение задачи «Динамика механической системы». Студенты заочной формы обучения выбирают варианты задач согласно своему порядковому номеру в журнале из ТАБЛИЦЫ И СХЕМЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ следующим образом: первая цифра номера по списку соответствует номеру схемы (рисунка), вторая цифра – строке в таблице с данными.

Приступая к решению задачи, в первую очередь нужно повторить соответствующие разделы курса, внимательно изучить, а при необходимости выписать важнейшие формулы, используя курс лекций [3] или учебники [1,2], и ознакомиться с решениями задач и упражнений, приведенных в соответствующих подразделах практикумов (дополнительная литература) [2,3,4].

Затем нужно тщательно проанализировать задачу и четко уяснить, что представляют собой неизвестные, что дано, в чем состоит условие задачи (какова связь между данными и неизвестными). Выписать известные в задаче величины. В числе известных необходимо отразить и те величины, которые не заданы явно в виде чисел, а только оговариваются или подразумеваются. Например, если в условии задачи сказано, что движение равномерное, а числовое значение скорости не задано, все-таки следует записать: $v = \text{const}$, $\alpha = 0$. Выписанные «неявно заданные» условия помогают глубже проанализировать и лучше понять задачу.

После чего следует записать буквенные обозначения всех величин, значения которых требуется найти.

После внимательного изучения задачи нужно уметь пересказать ее, выделив неизвестные и данные, и своими словами пояснить условие.

Прежде чем записать те или иные формулы или уравнения и приступить к их преобразованиям или вычислениям, нужно наметить общий план решения задачи, представить себе в общих чертах логические и математические операции, которые нужно выполнить для того, чтобы на основе имеющихся данных найти неизвестные, справочные данные, которые необходимо для этого добавить к заданным величинам.

Рекомендуется решать задачу в общем виде (в буквенных выражениях), подставляя числовые значения только при подсчете окончательных результатов.

Расчеты следует выполнять с помощью калькуляторов или ЭВМ. Допуская какие-либо округления или упрощения, нужно отчетливо представлять, как они будут влиять на окончательный результат. Все расчеты следует вести в единицах СИ. Необходимо указывать единицы измерения величин.

При защите выполненного контрольного задания необходимо:

знать все формулы, встречающиеся в изученных темах, знать области их применения;

уметь пользоваться этими формулами при решении задач;

понимать физический смысл каждой входящей в формулы буквы, каждого знака;

уметь объяснить логику решения предложенной в задании задачи, обосновать найденное решение;

уметь решать задачи по темам курса, которые охватываются заданием.

Если после многих попыток найти решение задачи все же не удалось, можно обратиться к дополнительной литературе.

Однако при этом следует учитывать, что обычно причиной неудач оказывается не малое число просмотренных книг, а недостаточно твердое знание основного материала. Поэтому прежде чем обращаться к новым источникам, следует еще раз проверить свои знания по учебнику.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Статика.

Статика – раздел теоретической механики, изучающий методы эквивалентного преобразования систем сил, в частности, их максимального упрощения, и определения условий равновесия систем сил.

1.1. Реакции опор.

Связь – это тело, ограничивающее свободу перемещений объекта.

Реакция связи – это сила, действующая на объект со стороны связи.

При решении задач статики применяют принцип освобожденности от связей – несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями.

Виды связей и их реакции:

Нить, шарнирный стержень – реакция нити (стержня) направлена по нити (по стержню) (рис. 1).

Гладкая поверхность – реакция направлена перпендикулярно общей касательной плоскости, проведенной к соприкасающимся поверхностям тела и связи (рис. 2).

Неподвижный цилиндрический шарнир – реакция проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и имеет произвольное направление в плоскости, перпендикулярной оси (рис. 3).

Подвижный цилиндрический шарнир – реакция проходит через центр шарнира перпендикулярно его оси и плоскости опирания (рис. 4).

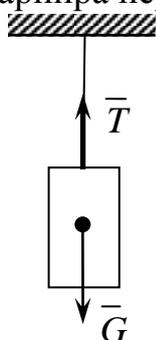


Рис. 1.

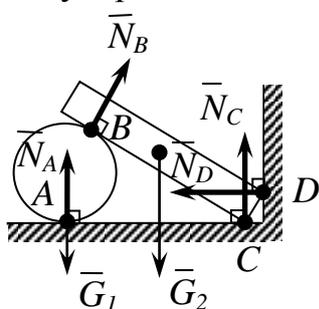


Рис. 2.

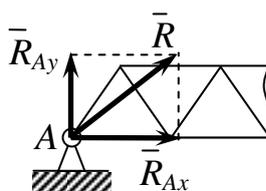


Рис. 3.

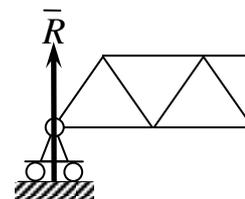


Рис. 4.

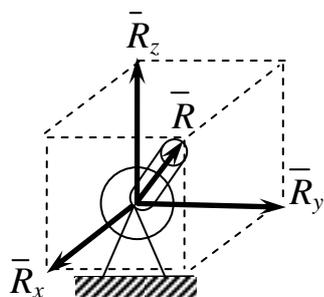


Рис. 5.

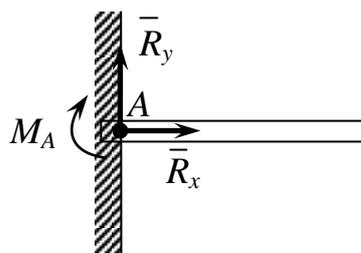


Рис. 6.

Неподвижный сферический шарнир – реакция проходит через центр шарнира и имеет произвольное направление в пространстве (рис. 5).

Жесткая плоская заделка (консоль) – возникает три реактивных усилия: две составляющие реактивные силы \bar{R}_x и \bar{R}_y , а также реактивный момент (пара сил) M_A (рис. 6).

Если связь препятствует одному или нескольким перемещениям, то по направлению именно этих и только этих перемещений возникают соответствующие реакции (силы и моменты).

1.2. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

В теоретической механике сила рассматривается как векторная величина и изображается направленным отрезком.

Прямая, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия этой силы*.

При решении многих задач бывает необходимо находить проекции силы на координатные оси.

Проекцией силы \vec{F} , изображенной вектором \vec{AB} , на ось Ox , называется алгебраическая величина F_x , равная величине отрезка ab , заключенного между проекциями a и b начала и конца вектора \vec{F} на эту ось (рис.1). Проекция положительна ($F_x > 0$), если направление от a , проекции начала вектора, к b , проекции его конца, совпадает с направлением оси Ox , и отрицательна ($F_x < 0$), если эти направления противоположны.

Из рис.1 очевидно, что, если угол α между осью Ox и силой \vec{F} отсчитывать от направления оси против хода часовой стрелки, то проекция силы на ось равняется модулю силы, умноженному на косинус угла между направлением вектора и положительным направлением оси

$$F_x = |F| \cos \alpha,$$

Аналогично

$$F_y = |F| \sin \alpha.$$

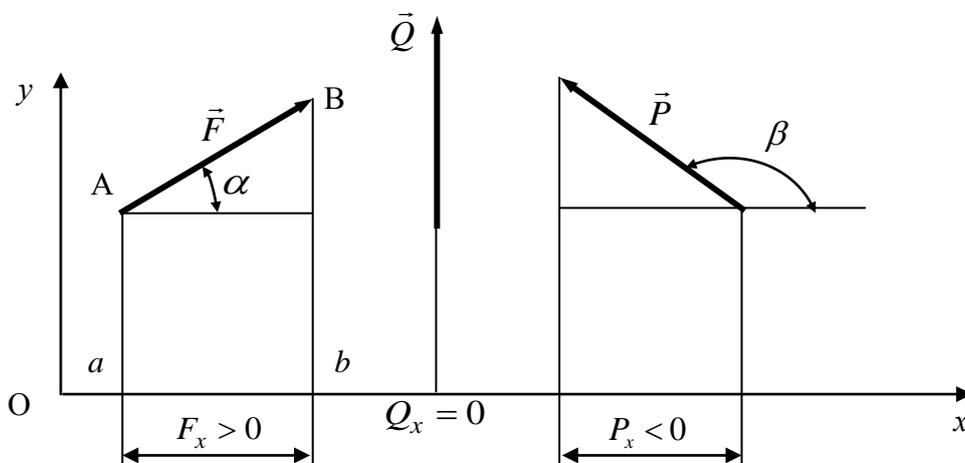


Рис.1.

Совокупность сил, действующих на данное тело, принято называть системой сил.

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой сходящихся сил.

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Математически это условие записывается в виде трех уравнений равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0.$$

Для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух координатных осей, лежащих в плоскости действия сил системы, были равны нулю

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0.$$

Иногда при решении задач используется теорема о трех силах.

Если свободное тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Для системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$, линии действия которых произвольным образом расположены в одной плоскости, можно привести такое определение момента:

Момент силы относительно центра, лежащего в плоскости действия сил, есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на ее плечо относительно этого центра, взятая со знаком плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг этого центра против хода часовой стрелки и со знаком минус, – если по ходу (рис.2).

$$m_0(\vec{F}) = \pm |\vec{F}| \cdot h,$$

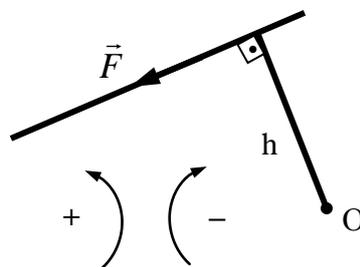


Рис.2.

где $m_0(\vec{F})$ – величина момента силы \vec{F} относительно центра O, Нм;

$|\vec{F}|$ – модуль силы \vec{F} , Н;

h – плечо силы \vec{F} относительно центра O , м.

Для плоской системы сил теорема Вариньона формулируется так:

Если плоская система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра в плоскости действия сил равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно того же центра, то есть

$$m_0(\vec{R}) = \sum m_0(\vec{F}_K).$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил можно записать в одной из следующих трех форм.

Первая форма условий равновесия:

для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю, то есть выполнялись три равенства

$$\sum F_{Kx} = 0, \quad \sum F_{Ky} = 0, \quad \sum m_0(\vec{F}_K) = 0.$$

Вторая форма условий равновесия:

для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекций на ось, перпендикулярную к прямой AB были равны нулю, то есть

$$\sum F_{Kx} = 0, \quad \sum m_A(\vec{F}_K) = 0, \quad \sum m_B(\vec{F}_K) = 0 \quad (\text{Ox} \perp AB).$$

Третья форма условий равновесия:

для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров, лежащих в плоскости действия сил системы и не лежащих на одной прямой, были равны нулю, то есть

$$\sum m_0(\vec{F}_K) = 0, \quad \sum m_B(\vec{F}_K) = 0, \quad \sum m_C(\vec{F}_K) = 0 \quad (C \notin AB).$$

2. Кинематика.

Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных объектов (точек, тел) с геометрической точки зрения, то есть вне связи с причинами, порождающими это движение.

2.1. Поступательное и вращательное движение тела.

Движение механической системы считается кинематически заданным, если известно положение этой системы относительно выбранной системы отсчёта в каждый момент времени. Векторное уравнение движения точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

где \vec{r} – радиус вектор движущейся точки, t – время.

Скорость \vec{v} точки в данный момент есть векторная величина, равная первой производной по времени от её радиуса-вектора:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Ускорение \vec{a} точки в данный момент равно первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

При координатном способе движение задаётся с помощью уравнений

$$\begin{array}{lll} x = x(t) & x = x(t) & x = x(t) \\ y = y(t) & y = y(t) & \\ z = z(t) & & \end{array}$$

в зависимости от того, движется ли точка по пространственной или по плоской кривой или по прямой Ox .

Данные уравнения представляют собой одновременно и уравнения траектории точки в параметрической форме. Исключив из уравнений движения параметр t , можно найти уравнения траектории в обычной форме, то есть в виде зависимостей между её координатами x, y, z .

Проекция вектора скорости на неподвижные координатные оси Ox, Oy, Oz равны производным по времени от соответствующих координат.

Аналогично, проекции вектора ускорения на неподвижные координатные оси равны производным по времени от соответствующих проекций скорости или вторым производным по времени от соответствующих координат

$$\begin{array}{ll} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, & a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}, \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, & a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}, \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}; & a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}. \end{array}$$

Тогда модуль вектора скорости и вектора ускорения найдётся по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора скорости можно определить по его направляющим косинусам:

$$\begin{array}{ll} \cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v}; & \cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}; \\ \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v}; & \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}; \\ \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{v_k}{v}. & \cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{a}. \end{array}$$

Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором две жестко связанные с ним точки остаются неподвижными в течение всего времени движения.

Прямую, жёстко связанную с телом, все точки которой при вращении тела остаются неподвижными, называют осью вращения тела.

Угол φ между неподвижной полуплоскостью, проходящей через ось вращения, и полуплоскостью, жёстко связанной с вращающимся телом и также проходящей через ось вращения, называется углом поворота или иначе угловым перемещением тела.

Угол поворота тела считается положительным, если он отсчитывается от неподвижной полуплоскости в сторону, противоположную ходу часовой стрелки, если смотреть на него со стороны положительного направления оси вращения и отрицательным в противном случае.

Кинематическое уравнение вращательного движения тела имеет вид

$$\varphi = \varphi(t).$$

Угловая скорость тела ω равна по величине производной от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Если угловая скорость n задана в об/мин, то в радианах/секунду она будет равна

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

Угловая скорость – это вектор $\vec{\omega}$, модуль которого равен абсолютной величине угловой скорости и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение тела ε равно по величине первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения тела в ту же сторону, что и угловая скорость при ускоренном вращении и против направления угловой скорости – при замедленном.

Если угловое ускорение тела в течение всего времени движения остаётся равным нулю, то вращение тела называется равномерным.

При равномерном движении связь между углом поворота тела φ , величиной угловой скорости ω определяется следующими зависимостями:

$$\omega = \omega_0 = const,$$
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t,$$

где ω_0 и φ_0 – начальные угловая скорость и угол поворота тела.

Если угловое ускорение в течение всего времени движения остаётся постоянным, то вращение тела называют равнопеременным.

В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 = \text{const}, \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon_0 t, \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_0 \frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

При вращательном движении тела величина скорости V любой его точки равна произведению угловой скорости на расстояние R от точки до оси вращения

$$V = \omega \cdot R.$$

Скорость любой точки твердого тела, вращающегося около неподвижной оси, равна векторному произведению угловой скорости на радиус - вектор, проведённый в эту точку из произвольно выбранного на оси центра

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Последняя формула носит название формулы Л. Эйлера.

Касательное ускорение точки вращающегося тела по величине равно произведению углового ускорения на расстояние от этой точки до оси вращения

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R.$$

Нормальное ускорение точки вращающегося тела равно по величине произведению квадрата угловой скорости на расстояние от этой точки до оси вращения

$$a_n = \omega^2 \cdot R.$$

Угол μ , который вектор ускорения образует с радиусом окружности, описываемой точкой, определяется зависимостью:

$$\text{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Плоским (плоскопараллельным) называется такое движение твердого тела, при котором каждая его точка движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

2.2. Уравнения движения плоской фигуры.

Скорости и ускорения при плоском движении.

Рассмотрим перемещение фигуры из положения I в положение II (рис.1). Это перемещение можно представить, как последовательное поступательное перемещение фигуры вместе с отрезком сначала из положения AB в положение A_1B_2 , и затем поворот на угол φ в положение A_1B_1 . Можно переместить фигуру и иначе: сначала поступательно в положение A_2B_1 , а затем поворот вокруг точки B_1 на тот же угол φ в том же направлении (по часовой стрелке). Вариантов перемещений фигуры – бесконечное множество, так как за точку,

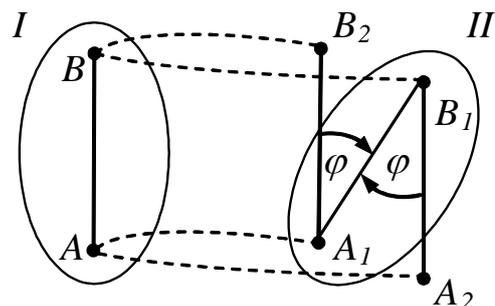


Рис.1.

вместе с которой фигура перемещается поступательно, а затем поворачивается вокруг нее, можно принять любую точку фигуры. Точку плоской фигуры, относительно которой осуществляется поворот, называют *полюсом*. Таким образом, перемещение плоской фигуры из некоторого положения *I* в положение *II* можно представить, как последовательное осуществление поступательного движения вместе с полюсом *A*, а затем поворот на некоторый угол φ вокруг полюса.

На деле поступательное движение и вращение фигуры происходят одновременно. При этом поступательная часть движения зависит от выбора полюса, а вращательная – нет.

В свете изложенного, *уравнениями движения плоской фигуры* будут:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t), \quad (x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t)), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Первые два уравнения описывают движение полюса *A*, третье – вращение фигуры вокруг полюса.

Зная уравнения движения, можно рассчитать скорость v_A и ускорение a_A полюса, а также угловую скорость ω и угловое ускорение ε вращения фигуры вокруг полюса.

Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее вращении вокруг полюса.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}.$$

Модуль скорости v_{BA} :

$$v_{BA} = \omega \cdot AB.$$

Если известен угол между векторами \vec{v}_A и \vec{v}_{AA} , то скорость точки *B* можно подсчитать по теореме косинусов:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A v_{BA} \cos \gamma}.$$

Проекции скоростей точек плоской фигуры на линию, проходящую через эти точки, алгебраически равны.

Концы скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками отрезка.

Ускорение любой точки плоской фигуры складывается геометрически из ускорения полюса и ускорения, которое точка получает при вращении фигуры вокруг полюса с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε .

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^{\tau},$$

где $a_{MA}^n = \omega^2 \cdot l_{AM}$ и $\vec{a}_{MA}^n \parallel MA$; $a_{MA}^{\tau} = \varepsilon^2 \cdot l_{AM}$ и $\vec{a}_{MA}^{\tau} \parallel AM$.

Нормальное ускорение \vec{a}_{MA}^n точки *M*, которое она получает за счёт вращательной составляющей плоского движения вокруг полюса *A*, направлено от *M* к *A* и равно произведению квадрата угловой скорости на величину расстояния точки *M* от полюса *A*.

Касательное (тангенциальное) ускорение \vec{a}_{MA}^{τ} точки M , которое она получает при вращении плоской фигуры вокруг полюса A , направлено перпендикулярно к отрезку AM и равно произведению величины углового ускорения на величину расстояния точки M от полюса.

2.3. Мгновенный центр скоростей (МЦС).

В каждый момент времени существует точка плоской фигуры P , скорость которой равна нулю. Эту точку называют *мгновенным центром скоростей* (МЦС).

$$AP = v_A / \omega.$$

Для определения положения мгновенного центра скоростей необходимо полупрямую, выходящую из полюса A в направлении вектора \vec{v}_A повернуть на 90° в сторону вращения плоской фигуры и на этом перпендикуляре отложить отрезок $AP = v_A / \omega$.

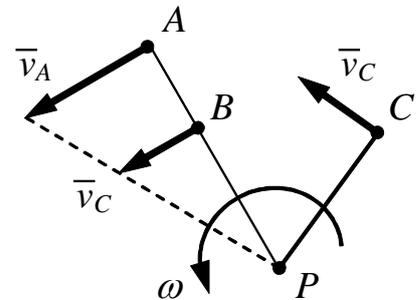


Рис.2.

Зная скорость некоторой точки A и расстояния от точек B, C, \dots , до МЦС P , можно рассчитать скорости этих точек. Направление вращения фигуры и векторов скоростей определим по направлению вектора скорости точки A , как вращательной вокруг МЦС P (рис.2).

Способы определения МЦС:

а) Известна скорость некоторой точки A и направление движения точки B (рис.3). Проводим перпендикуляры через точки A и B к направлениям их движения до взаимного пересечения в точке P , которая и будет являться МЦС. Определяем расстояния от точек A и B до МЦС – AP и BP . Угловую скорость фигуры определим по формуле $\omega = v_A / AP$, направление вращения – по направлению вектора \vec{v}_A . Скорость точки B найдем по формуле $v_B = \omega \cdot BP$, либо $v_B = v_A (BP / AP)$. Направлен вектор \vec{v}_B согласно направлению вращения фигуры.

б) Скорости двух точек A и B параллельны между собой, а сами точки расположены на перпендикуляре к скоростям (рис.4). Для определения МЦС должны быть известны модули скоростей точек. Так как $v_B / v_A = AP / BP$, то концы векторов скоростей лежат на прямой, проходящей через МЦС (рис.4а,4б). Если скорости точек в какой-то момент времени равны между собой и параллельны, то перпендикуляры к ним пересекаются в бесконечности и угловая скорость $\omega = 0$ (рис.4в).

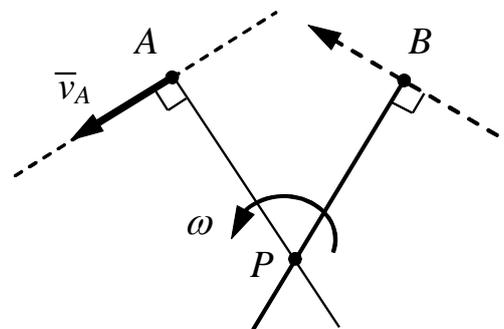


Рис.3.

в) Если скорости двух точек A и B

плоской фигуры равны и параллельны между собой, но не перпендикулярны AB (рис.5), то МЦС лежит в бесконечности. При этом $\omega = v_A / \infty = 0$. Следовательно, расстояния от всех точек фигуры до МЦС равно бесконечности, и скорости всех ее точек равны. Если такое положение имеет место в некоторый промежуток времени, то движение тела в нем является поступательным. Если же это имеет место лишь для некоторого момента времени, то такое движение называют *мгновенно-поступательным*.

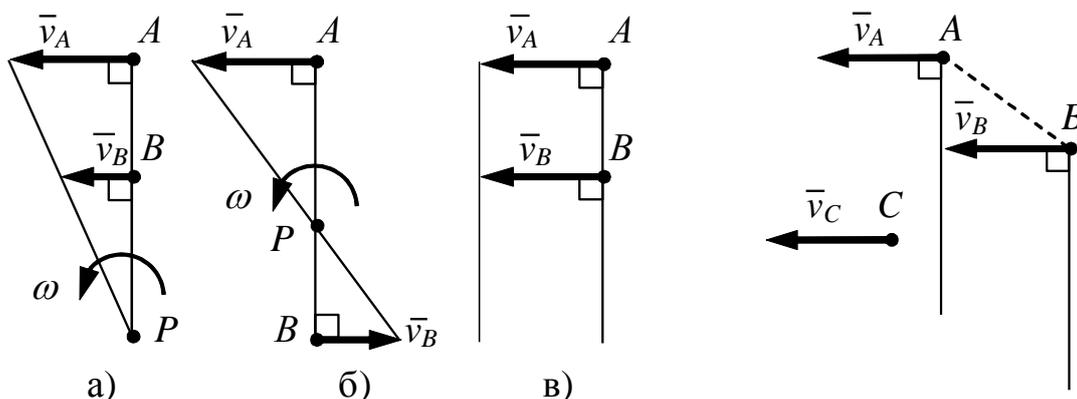


Рис.4.

Рис.5.

3. Динамика.

Динамика – раздел теоретической механики, в которой изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил. Силы в динамике в общем случае – величины переменные. Предметом динамики является изучение движения материальных объектов в связи с силами, действующими на эти объекты. К последним в теоретической механике относят материальную точку, твердое тело, механическую систему (систему твердых тел). Важнейшей характеристикой механических тел является их масса.

3.1. Законы (аксиомы) динамики. Задачи динамики.

Законы (аксиомы) динамики:

1. Закон инерции.

Изолированная от внешнего воздействия точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения (движения по инерции) до тех пор, пока приложенные к ней силы не заставят ее изменить это состояние.

2. Основной закон динамики (закон Ньютона).

Произведение массы материальной точки на ее ускорение равно по модулю силе, действующей на эту точку, а направление ускорения совпадает с направлением действия силы.

Математически этот закон выражается следующим векторным уравнением:

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

Зависимость между модулем ускорения и силы следующая:

$$ma = F.$$

Из выражения (1) следует, что $a = F/m$, и чем больше масса точки (тела), тем меньше ее ускорение при одной и той же силе. Таким образом, масса является мерой инертности точки (тела).

При действии на точку одновременно нескольких сил (системы сходящихся сил)

$$m\bar{a} = \bar{R},$$

где

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$$

3. Закон равенства действия и противодействия.

Две материальные точки (тела) действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

4. Закон независимости действия сил.

Ускорение, получаемое точкой при действии на нее системы сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщаемых этой точке каждой силой по отдельности.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Уравнения в декартовой системе координат.

$$ma_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix};$$

$$ma_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy};$$

$$ma_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Уравнения в естественной системе координат.

$$ma_\tau = F_{1\tau} + F_{2\tau} + \bar{F}_{3\tau} + \dots + \bar{F}_{n\tau} = \sum_{i=1}^n F_{i\tau};$$

$$ma_n = F_{1n} + F_{2n} + F_{3n} + \dots + F_{nn} = \sum_{i=1}^n F_{in};$$

$$ma_b = F_{1b} + F_{2b} + F_{3b} + \dots + F_{nb} = \sum_{i=1}^n F_{ib},$$

где $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, $a_b = 0$.

Две основные задачи динамики:

Первая задача динамики – зная массу точки и уравнения ее движения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, определить модуль и направление равнодействующей R системы сил, приложенных к точке.

Вторая задача динамики материальной точки в канонической форме формулируется так: зная массу материальной точки, приложенные к ней силы и начальные условия ее движения, определить кинематические уравнения движения точки. Однако при решении конкретных задач возможны и некоторые отклонения от этой формулировки. Вообще же ко второй относят задачи, которые требуют для их решения интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

Часто дифференциальные уравнения движения точки в естественных осях координат оказывается легче проинтегрировать, чем дифференциальные уравнения в декартовых координатах. Однако естественные уравнения можно использовать только в тех случаях, когда заранее известен радиус кривизны траектории точки в интересующем нас положении или его легко найти по условиям задачи.

Общая методика решения второй задачи динамики.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых осях координат имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ m\ddot{y} &= \sum_{i=1}^n F_{iy}, \\ m\ddot{z} &= \sum_{i=1}^n F_{iz}. \end{aligned}$$

Для решения первого уравнения запишем ускорение как производную от скорости:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \sum F_{ix}.$$

Разделяем переменные. Это разделение зависит от конкретных зависимостей сил F_{ix} . Предположим, что силы постоянные или зависят от времени. Тогда уравнение примет вид:

$$mdv_x = \sum F_{ix} dt.$$

Можно уравнение предварительно разделить на m .

После чего можем написать интегралы (берем неопределенные интегралы):

$$\int mdv_x = \int \sum F_{ix} dt.$$

Предположим, что интеграл в правой части берется (решается в квадратурах). Имеем

$$mv_x = \Phi_x(t, C_1). \quad (1)$$

Величина C_1 – произвольная постоянная, которую следует определить по *начальным условиям*. В качестве таковых берутся начальное время t_0 (часто полагают $t_0 = 0$), начальная координата x_0 и начальная скорость точки v_{0x} .

Подставляя v_{0x} в уравнение (1), получаем:

$$mv_{0x} = \hat{O}_x(t_0, C_1).$$

Из данного выражения определяем C_1 .

Далее записываем скорость v_x как dx/dt и уравнение (1)

$$m \frac{dx}{dt} = \Phi_x(t, C_1).$$

Вновь разделяем переменные и интегрируем

$$\int m dx = \int \Phi_x(t, C_1).$$

Взяв интегралы в левой и правой частях уравнения, получим:

$$mx = Q_x(t, C_1, C_2). \quad (2)$$

В уравнении (2) C_2 – вторая произвольная постоянная. Для ее определения используем начальное время и начальную координату – t_0 и x_0 .

Получим уравнение

$$mx_0 = Q_x(t_0, C_1, C_2),$$

из которого находим постоянную интегрирования C_2 . Таким образом, первое уравнение движения точки имеет вид

$$x = \frac{1}{m} Q_x(t, v_0, x_0).$$

Аналогично решаем второе и третье уравнения системы. Таким образом, получаем систему уравнений движения точки в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m} Q_x(t, v_0, x_0), \\ y &= \frac{1}{m} Q_y(t, v_0, y_0), \\ z &= \frac{1}{m} Q_z(t, v_0, z_0). \end{aligned}$$

3.2. Механическая система. Центр масс механической системы.

Механическая система (система материальных точек) – такая совокупность материальных точек, положение и движение каждой из которых зависит от положения и движения остальных. Механическая система, как система материальных точек, может быть *свободной* и *несвободной*.

Примеры свободной механической системы: солнечная система, система спутников и т.д.

Примеры несвободной механической системы: любой механизм, машина.

Параметры механической системы:

1. Масса системы:

$$M = \sum_i m_i,$$

где m_i – масса i -той точки системы.

Координаты центра масс системы определяются по формулам:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{M}; \quad x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}. \quad (1)$$

Скорость центра масс получим, дифференцируя формулы (1) по времени:

$$\bar{v}_C = \frac{\sum_i m_i \bar{v}_i}{M}; \quad \dot{x}_C = \frac{\sum_i m_i v_{ix}}{M}, \quad \dot{y}_C = \frac{\sum_i m_i v_{iy}}{M}, \quad \dot{z}_C = \frac{\sum_i m_i v_{iz}}{M}. \quad (2)$$

Ускорение центра масс получим, дифференцируя формулы (2) по времени:

$$\bar{a}_C = \frac{\sum_i m_i \bar{a}_i}{M}; \quad \ddot{x}_C = \frac{\sum_i m_i a_{ix}}{M}, \quad \ddot{y}_C = \frac{\sum_i m_i a_{iy}}{M}, \quad \ddot{z}_C = \frac{\sum_i m_i a_{iz}}{M}. \quad (3)$$

Центр масс – точка геометрическая.

Силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил.

Внешние – это силы, действующие на точки рассматриваемой системы со стороны точек и тел, не входящих в эту систему. *Внутренние* – это силы, действующие на точки рассматриваемой системы со стороны точек и тел этой же системы. Обозначим внешние силы верхним индексом (e), а внутренние – индексом (i).

Свойства внутренних сил.

Геометрическая сумма внутренних сил равна нулю:

$$\bar{R}^{(i)} = \sum_i \bar{F}_i^{(i)} = 0.$$

Иначе: главный вектор внутренних сил равен нулю. Проецируя на оси декартовой системы координат, получим три скалярных уравнения:

$$R_{x(y,z)}^{(i)} = \sum_I F_{ix(y,z)}^{(i)} = 0.$$

Геометрическая сумма моментов внутренних сил относительно любой точки равна нулю:

$$\bar{M}_O^{(i)} = \sum_i \bar{M}_{iO}^{(i)}.$$

Дифференциальные уравнения движения свободной механической системы:

$$m_i \ddot{x}_i = P_{ix}^{(e)} + P_{ix}^{(i)},$$

$$m_i \ddot{y}_i = P_{iy}^{(e)} + P_{iy}^{(i)},$$

$$m_i \ddot{z}_i = P_{iz}^{(e)} + P_{iz}^{(i)}.$$

Для каждого уравнения необходимо задать два начальных условия – начальную скорость и начальную координату. Итого – 6n начальных условий плюс начальное время.

Теорема о движении центра масс системы:

$$M\bar{a}_C = \sum_i \bar{P}_i^{(e)}.$$

Центр масс системы движется как материальная точка, имеющая массу системы, и к которой приложены все действующие на нее внешние силы.

В проекциях на оси декартовой системы координат:

$$Ma_{Cx(y,z)} = \sum_i P_i^{(e)}{}_{x(y,z)}.$$

Из формул (6) и (7) следует, что внутренние силы не влияют на движение центра масс системы.

Следствия из теоремы.

Если $\sum_i \bar{P}_i^{(e)} = 0$ то $\bar{a}_C = 0$ и $\bar{v}_C = const$.

Если $\sum_i P_i^{(e)}{}_{ix(y,z)} = 0$ то $a_{Cx(y,z)} = 0$ и $v_{Cx(y,z)} = const$.

Эти следствия носят название *законов сохранения движения центра масс*.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 1

Задача 1: определить реакции опор балки (рис.1, табл.1).

Задача 2: найти скорость \vec{v}_B и ускорение \vec{a}_B ползуна, а также угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 шатуна в изображенном на рисунке 2 положении кривошипно-ползунного механизма (рис.2, табл.2).

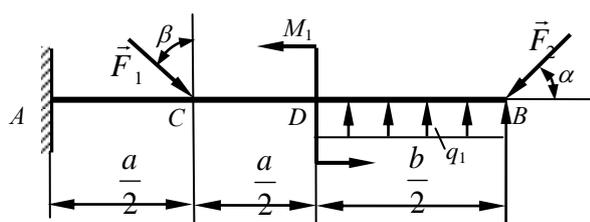
ТАБЛИЦЫ И СХЕМЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ

К задаче 1.

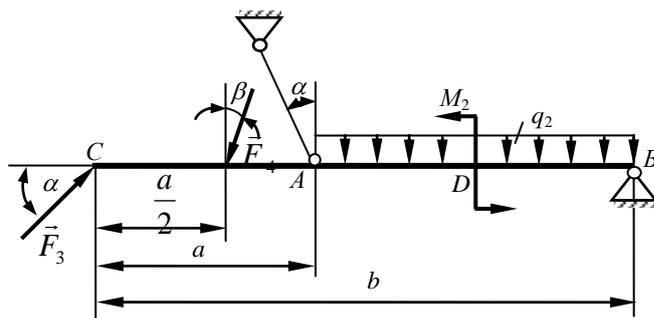
Таблица 1.

Номер строки	Геометрические параметры				Параметры нагрузки				Параметры нагрузки				Параметры нагрузки							
	ϵ , м	a , м	α , град	β , град	F_1 , кН	F_2 , кН	M_1 , кНм	q , кН/м	F_3 , кН	F_4 , кН	M_2 , кНм	q_2 , кН/м	F_5 , кН	F_6 , кН	M_3 , кНм	q_3 , кН/м	F_7 , кН	F_8 , кН	M_4 , кНм	q_4 , кН/м
1	7	1	30	30	16	-8	-8	5	0	8	-6	2	4	8	5	3	2	4	4	2
2	6	2	30	60	12	6	12	2	7	0	-5	3	6	2	0	4	4	-6	-3	-2
3	8	1,4	60	30	16	10	-4	3	5	6	-4	5	3	-2	7	0	3	4	2	4
4	5	1	120	60	8	4	-12	-2	3	2	0	4	4	0	-4	1	2	5	6	3
5	7	2	30	120	12	-8	0	4	1	-6	4	0	5	6	-7	2	-1	3	3	2
6	5	1	45	30	4	6	10	-3	7	10	5	3	3	2	-4	6	4	-2	5	0
7	6	1,4	60	45	20	0	-6	-4	9	4	7	2	4	-5	3	0	3	4	-2	3
8	8	1	150	30	20	4	0	2,4	3	-2	9	-2	6	4	-8	1	0	1	3	4
9	5	2	30	150	10	5	-16	0	4	-8	6	0	8	2	0	4	7	8	2	0
0	6	1,4	60	60	10	-10	6	3,6	4	4	-3	1	5	-5	6	2	6	0	4	4

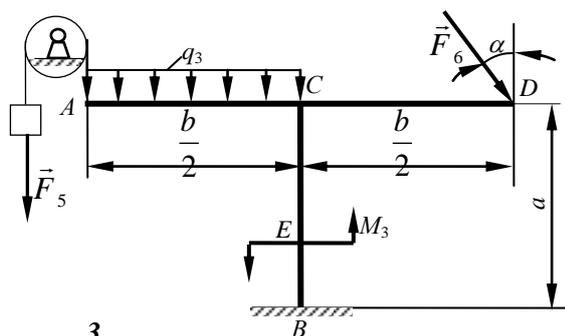
Примечание – Знак минус у силы или момента пары сил указывает, что направление этой силы или момента противоположно направлению, указанному на рисунке 1



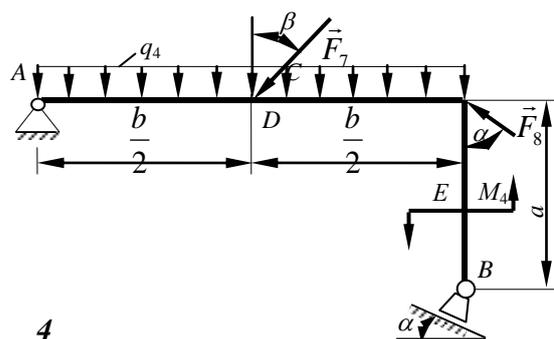
1



2

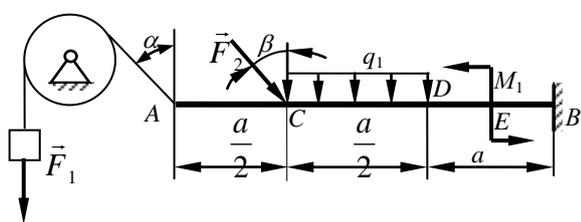


3

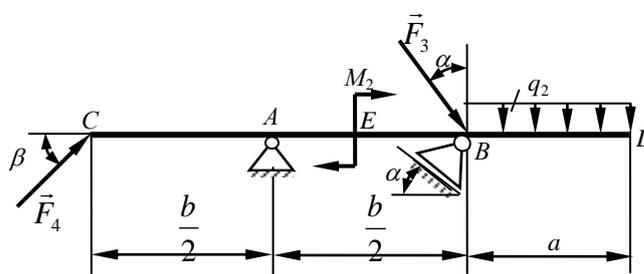


4

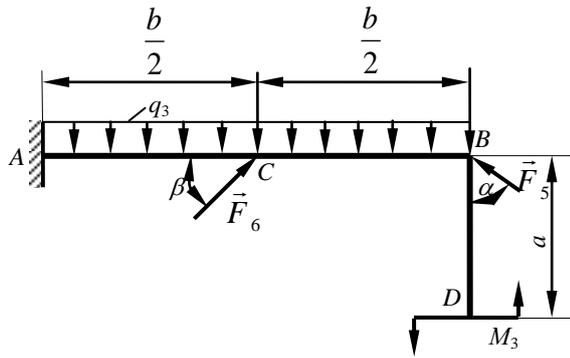
Рисунок 1.



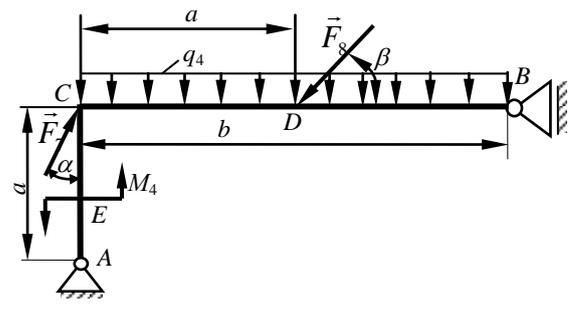
5



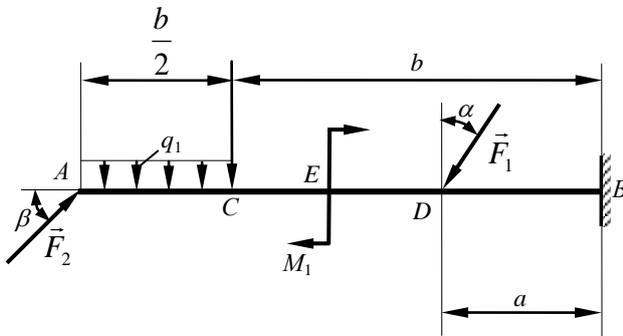
6



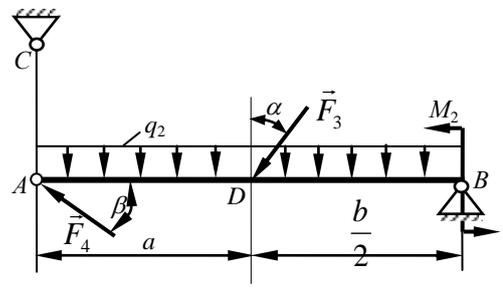
7



8



9



0

Рисунок 1.

К задаче 2.

Таблица 2.

Номер строки	l_{OA} , м	l_{AB} , м	ω_1 , рад/с	γ , град	β , град
1	0,22	0,30	1	30	30
2	0,24	0,36	2	45	45
3	0,30	0,40	3	60	60
4	0,36	0,48	4	30	15
5	0,40	0,52	5	45	15
6	0,48	0,56	6	60	15
7	0,50	0,60	7	30	15
8	0,56	0,64	8	45	60
9	0,60	0,70	9	60	45

Номер строки	l_{OA} , м	l_{AB} , м	ω_1 , рад/с	γ , град	β , град
0	0,64	0,72	10	30	60

$$\varepsilon_1 = 5 \text{ рад/с}^2$$

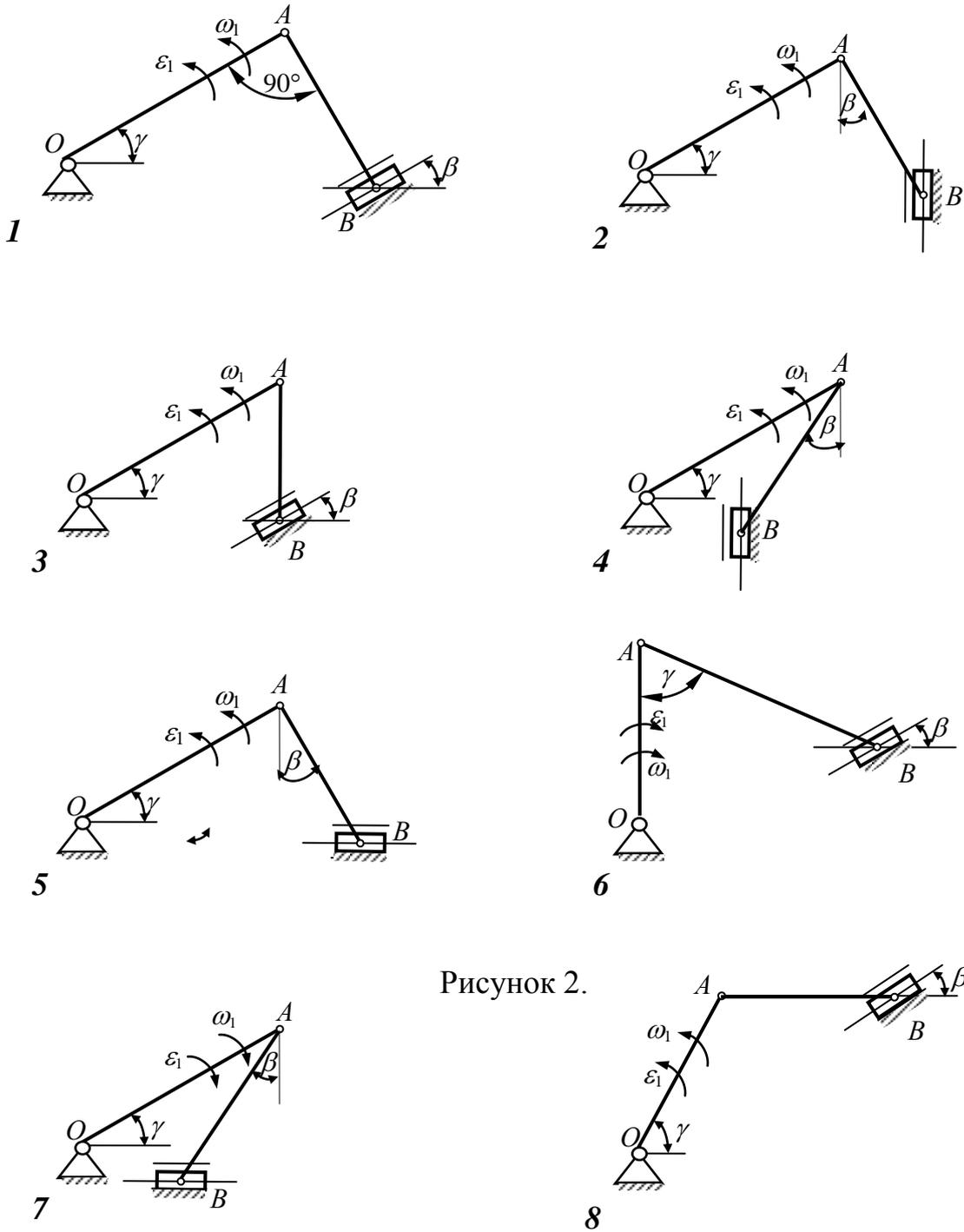


Рисунок 2.

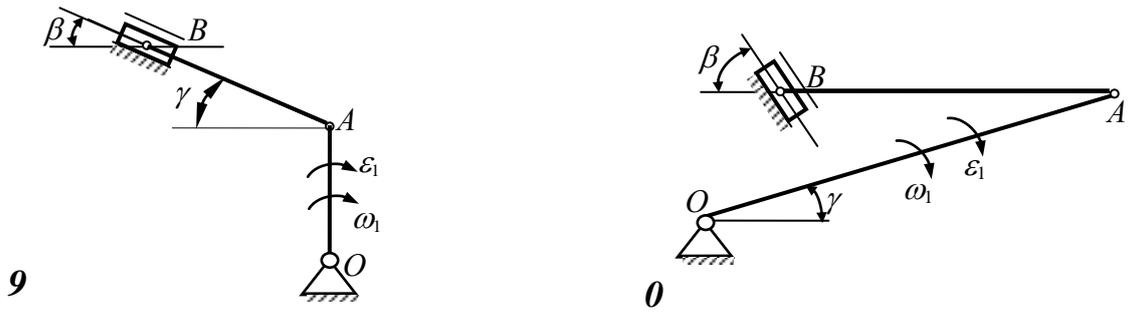


Рисунок 2.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

РЯЗАНСКОЕ ВЫСШЕЕ ВОЗДУШНО-ДЕСАНТНОЕ КОМАНДНОЕ
УЧИЛИЩЕ ИМЕНИ ГЕНЕРАЛА АРМИИ В.Ф.МАРГЕЛОВА
Кафедра информационных технологий и общеобразовательных
дисциплин

Контрольное задание
по дисциплине «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР БАЛОК.
КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА.

Вариант _____

Выполнил _____
(Фамилия, инициалы, подпись)

« _____ » _____ 2016 г.

Проверил преподаватель _____ Селиверстова Н.С.
(подпись)

« _____ » _____ 2016 г.

Рязань 2016

Пример выполнения контрольного задания

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	
Задача 1.....	
Задача 2.....	
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	

Пример выполнения контрольного задания

ВВЕДЕНИЕ

При выполнении расчетов на прочность и жесткость деталей, в том числе и деталей автомобильной техники и средств ее обслуживания, необходимо, как правило, в первую очередь определить реакции опор, так как только при знании реакций опор можно определить максимальные внутренние силы, а по ним и максимальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях деталей.

Вторая задача посвящена кинематическому анализу – определению скоростей и ускорений ползуна и шатуна кривошипно-ползунного механизма, нашедшему широкое применение в автомобиле и средствах его обслуживания. В частности, он используется в двигателе внутреннего сгорания, в компрессоре, в насосах, в приводах различных систем автомобиля.

Опыт проведения кинематического анализа механизмов, полученный при выполнении настоящего задания, будет востребован при изучении последующих учебных дисциплин, выполнении курсовых работ и курсовых проектов по ряду специальных дисциплин и при выполнении дипломного проекта.

Умение решать задачи динамики точки также имеет существенное значение в подготовке современного инженера. В третьем задании необходимо решить вторую (основную) задачу динамики точки, то есть по заданным массе и силам, действующим на тело, принимаемое за материальную точку, нужно найти уравнения ее движения и затем, используя приемы кинематики, вычислить искомые параметры.

Пример выполнения контрольного задания

Задача 1. Определить реакцию заделки консольной балки, приведенной на рисунке 1, при следующих исходных данных:

величины сил	$F_1=1$ кН, $F_2=2$ кН;
момент пары сил	$M=3$ кНм,
интенсивность распределенной нагрузки	$q=1$ кН/м,
размеры конструкции	$a=3$ м, $b=5$ м,
угол	$\alpha=30^\circ$.

Решение: 1. Составим расчетную схему. Изобразим балку в масштабе

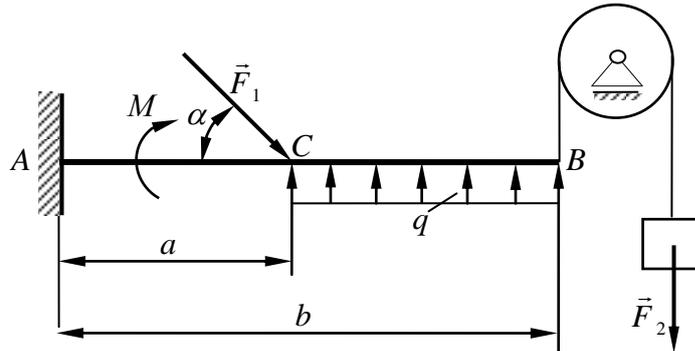


Рисунок 1.

и приложим к ней активные силы \vec{F}_1 , M и \vec{Q} – равнодействующую распределенной нагрузки ($Q=q \cdot (b-a)=1 \cdot 2=2$ кНм) и реакции связей: \vec{F}_2 , \vec{X}_A , \vec{Y}_A и M_A (рисунок 2).

Силу \vec{F}_1 разложим на составляющие \vec{F}_{1X} и \vec{F}_{1Y} , величины которых $F_{1X}=F_1 \cos \alpha$ и $F_{1Y}=F_1 \sin \alpha$.

2. Составим уравнения равновесия балки:

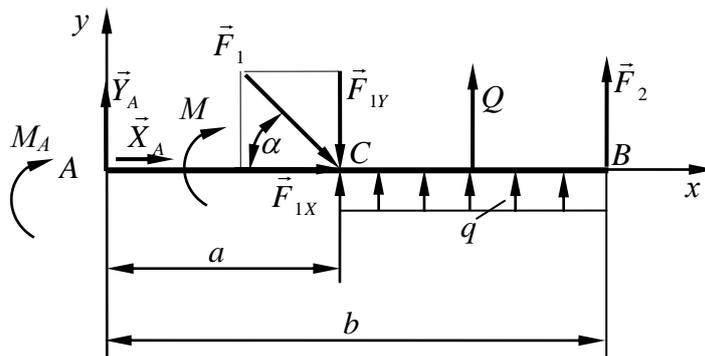


Рисунок 2.

$$\sum F_{KX} = 0 \quad X_A + F_1 \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0 \quad Y_A - F_1 \sin \alpha + Q + F_2 = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_K) = 0 \quad -M_A - M - F_1 \sin \alpha \cdot a + Q \left(a + \frac{b-a}{2} \right) + F_2 \cdot b = 0. \quad (3)$$

Пример выполнения контрольного задания

3. Решаем систему уравнений.

Из уравнения (1) находим

$$X_A = -F_1 \cos 30^\circ = -1 \cdot 0,866 = -0,866 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2) находим

$$Y_A = F_1 \sin 30^\circ - Q - F_2 = 1 \cdot 0,5 - 2 - 2 = -3,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3) находим

$$M_A = -M - F_1 \sin 30^\circ \cdot a + Q \left(a + \frac{b-a}{2} \right) + F_2 \cdot b = -3 - 1 \cdot 0,5 \cdot 3 + 2 \left(3 + \frac{5-3}{2} \right) + 2 \cdot 5 = 13,5 \text{ кНм.}$$

Знак минус указывает, что истинные направления X_A и Y_A противоположны указанным на рисунке 2.

4. Проверка правильности вычислений.

Вспользуемся для проверки уравнением

$$\sum m_B(\vec{F}_K) = 0 \quad -M_A - Y_A b - M + F_1 \sin 30^\circ (b-a) - Q \frac{b-a}{2} = 0.$$

Откуда

$$13,5 - (-3,5) \cdot 5 - 3 + 1 \cdot 0,5 \cdot (5 - 3) - 2 \cdot \left(\frac{5-3}{2} \right) = 0, \\ 0 = 0.$$

Проверка подтвердила правильность полученных результатов.

Пример выполнения контрольного задания

Задача 2. Найти угловую скорость ω_{BC} и угловое ускорение ε_{BC} шатуна BC и скорость \vec{v}_C и ускорение \vec{a}_C ползуна C кривошипно-ползунного механизма (рисунок 3) при следующих исходных данных:

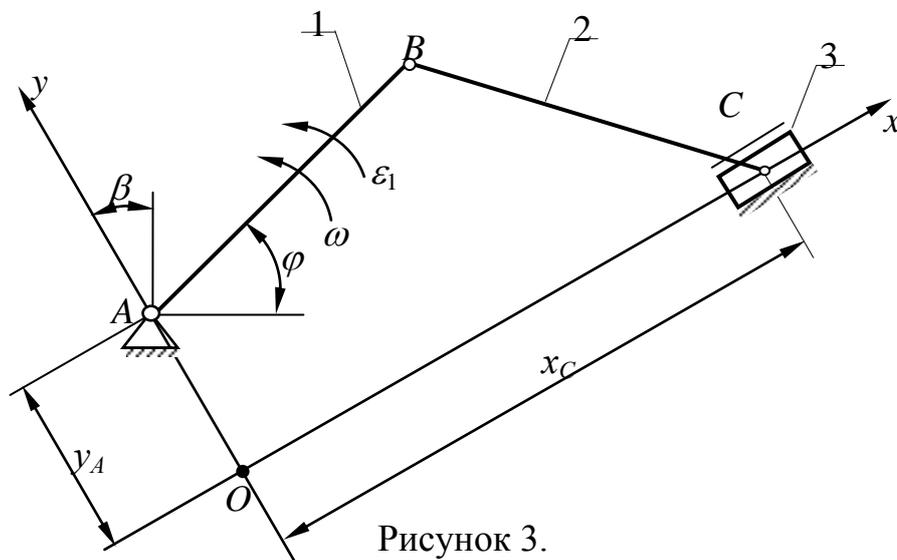


Рисунок 3.

угол наклона осей координат

$$\beta=135^\circ;$$

координаты шарниров A и C :

$$y_A=0,09 \text{ м}, x_C=-0,4 \text{ м}, y_C=0,09 \text{ м};$$

угол наклона кривошипа к горизонту

$$\varphi=30^\circ;$$

длина кривошипа AB

$$l_{AB}=0,24 \text{ м};$$

угловая скорость кривошипа

$$\omega_1=160 \text{ рад/с};$$

угловое ускорение кривошипа

$$\varepsilon_1=10 \text{ рад/с}.$$

Решение: 1. Построим схему (план) механизма в масштабе

$\mu_l=200 \frac{\text{мм}}{\text{м}}$ (рисунок 3) в следующей последовательности. Из произвольного

центра O восстановим вертикаль Oy_1 , под углом $\beta=135^\circ$ к которой проведем ось Oy , а затем перпендикулярно к ней ось Ox . Отложив вдоль оси Oy отрезок $OA=\mu_l y_A$, найдем положение центра шарнира A , через который проведем горизонталь Ax_1 . Под углом φ к горизонтали Ax_1 проведем луч, на котором отложим отрезок $AB=\mu_l l_{AB}$, который изображает кривошип AB .

Отложив на оси Ox отрезок $OC=\mu_l x_C$ с учетом знака минус, найдем положение точки C – центра одноименного шарнира, а, следовательно, и положение ползуна C .

Соединив отрезком прямой точки B и C , завершим построение схемы механизма.

2. Найдем длину l_{BC} шатуна и его положение – угол φ (рисунок 4).

Для этого соединим со звеньями механизма векторы \vec{l}_{OA} , \vec{l}_{AB} , \vec{l}_{BC} и \vec{x}_C так, как показано на рисунке 5. Условие замкнутости векторного контура $OABCO$ имеет вид:

$$\vec{x}_C = \vec{y}_A + \vec{l}_{AB} + \vec{l}_{BC}. \quad (1)$$

Пример выполнения контрольного задания

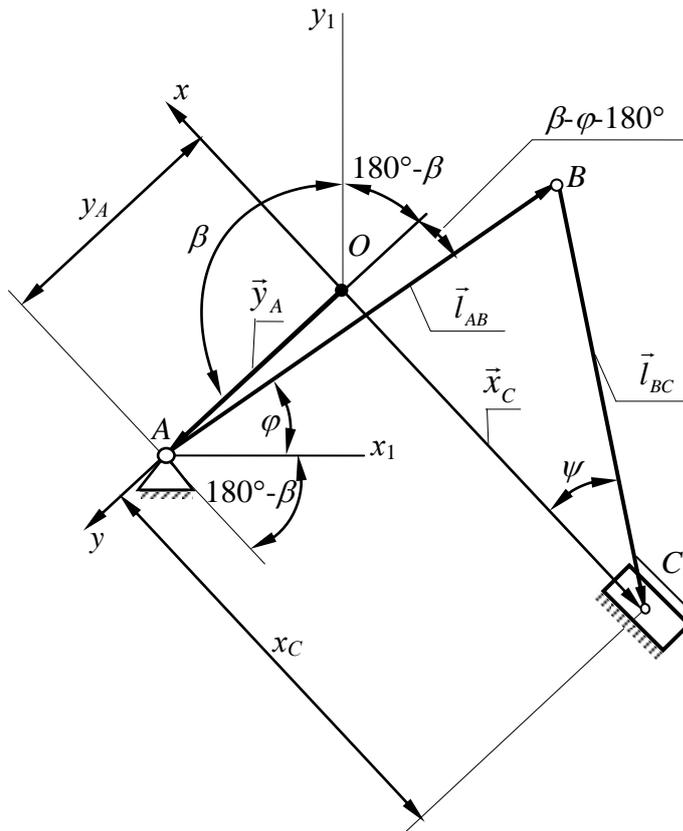


Рисунок 4.

Проецируя уравнение (1) на оси Ox и Oy получим:

$$\left. \begin{aligned} -x_C &= 0 - l_{AB} \sin(\beta - \varphi - 90^\circ) - l_{BC} \cos \psi, \\ 0 &= y_A - l_{AB} \cos(\beta - \varphi - 90^\circ) + l_{BC} \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Неизвестными в системе уравнений (2) являются l_{BC} и ψ . Подставляя в нее исходные данные, получим:

$$\left. \begin{aligned} l_{BC} \cos \psi &= 0,4 - 0,24 \sin(135^\circ - 30^\circ - 90^\circ), \\ l_{BC} \sin \psi &= 0,24 \cos(135^\circ - 30^\circ - 90^\circ) - 0,09. \end{aligned} \right\}$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} l_{BC} \cos \psi &= 0,338, \\ l_{BC} \sin \psi &= 0,142. \end{aligned} \right\}$$

Разделив нижнее равенство на верхнее, найдем:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{0,142}{0,338} = 0,42 \text{ или } \psi = 22,77^\circ; \sin \psi = 0,387, \cos \psi = 0,922;$$

$$l_{BC} = \frac{0,142}{\sin \psi} = \frac{0,142}{0,387} = 0,37 \text{ м.}$$

Пример выполнения контрольного задания

Нашли l_{BC} и ψ аналитическим методом. Правильность полученных результатов легко проверить непосредственным измерением l_{BC} и ψ на плане механизма: $\psi \approx 23^\circ$; $l_{BC} = \frac{BC}{\mu_e} = \frac{73,8}{200} = 0,369$ м.

3. Найдем скорости точек и звеньев механизма, используя рисунок 5.

Для кривошипа AB :

$$\omega_1 = 160 \text{ рад/с}, v_A = 0, v_B = \omega_1 l_{AB} = 160 \cdot 0,24 = 38,4 \text{ м/с}, \vec{v}_B \perp AB.$$

Для шатуна BC :

$$\begin{aligned} v_B = 38,4 \text{ м/с}, \vec{v}_B \perp AB, \vec{v}_C \parallel OC, \\ \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\vec{v}_{CB} \perp BC$.

Проецируя векторное уравнение (3) на оси координатной системы Oxy , получим:

$$\left. \begin{aligned} v_C &= v_B \sin(180^\circ - \beta + \varphi) - v_{CB} \sin \psi = 38,4 \sin(180^\circ - 135^\circ + 30^\circ) - v_{CB} \cdot 0,387, \\ 0 &= -v_B \cos(180^\circ - \beta + \varphi) - v_{CB} \cos \psi = -38,4 \cos(180^\circ - 135^\circ + 30^\circ) - v_{CB} \cdot 0,922. \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения системы находим v_{CB} :

$$v_{CB} = -\frac{38,4}{0,922} \cos 75^\circ = -10,78 \text{ м/с},$$

а из первого уравнения системы находим v_C :

$$v_C = 38,4 \sin 75^\circ - (-10,78) \cdot 0,387 = 41,263 \text{ м/с}.$$

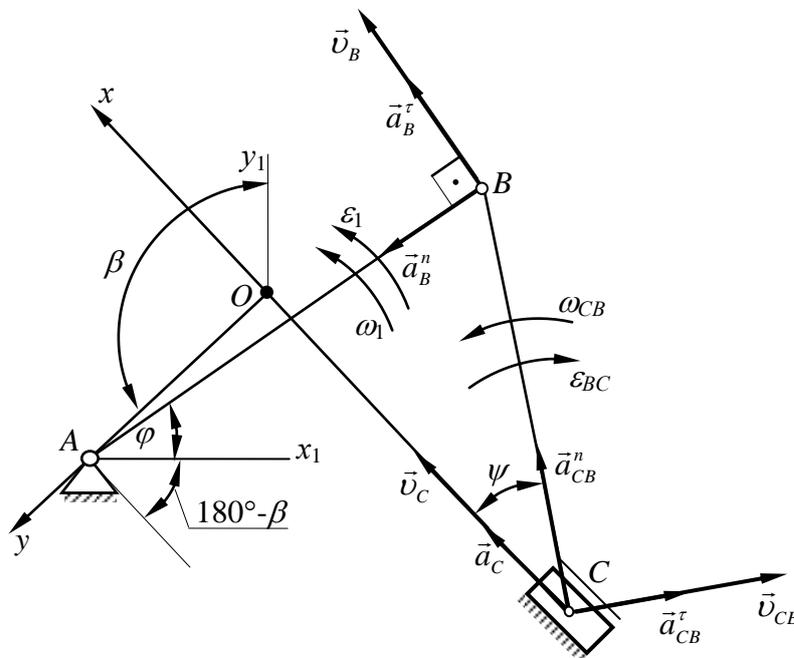


Рисунок 5.

Пример выполнения контрольного задания

Знак минус у v_{CB} говорит о том, что истинное направление вектора \vec{v}_{CB} противоположно указанному на рисунке 5.

Пример выполнения контрольного задания

Угловая скорость ω_{BC} шатуна

$$\omega_{BC} = \frac{v_{CB}}{l_{CB}} = \frac{10,78}{0,37} = 29,135 \text{ рад/с.}$$

Она направлена по ходу часовой стрелки, что согласуется с правильным направлением вектора \vec{v}_{CB} .

4. Найдем ускорения точек и звеньев механизма.

Для кривошипа AB : $\varepsilon_1 = 10$ рад/с, $a_A = 0$,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau,$$

где $a_B^n = \omega_1^2 l_{AB} = 160^2 \cdot 0,24 = 6144$ м/с², $\vec{a}_B^n \parallel AB$ и направлен от B к A ;

$a_B^\tau = \varepsilon_1 l_{AB} = 10 \cdot 0,24 = 2,4$ м/с², $\vec{a}_B^\tau \perp AB$ и направлен по ε_1 .

Для шатуна BC :

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau, \quad (4)$$

$a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 l_{BC} = 29,135^2 \cdot 0,37 = 313,97$ м/с², $\vec{a}_{CB}^n \parallel CB$ от C к B ; $\vec{a}_{CB}^\tau \parallel CB$.

Проецируя векторное уравнение (4) на оси координатной системы Oxy , получим:

$$a_C = a_B^n \cos 75^\circ + a_B^\tau \sin 75^\circ + a_{CB}^n \cos \psi - a_{CB}^\tau \sin \psi = 6144 \cos 75^\circ + 2,4 \sin 75^\circ + 313,97 \cdot 0,922 - a_{CB}^\tau \cdot 0,387,$$

$$0 = a_B^n \sin 75^\circ - a_B^\tau \cos 75^\circ - a_{CB}^n \sin \psi - a_{CB}^\tau \cos \psi = 6144 \sin 75^\circ - 2,4 \cos 75^\circ - 313,97 \cdot 0,387 - a_{CB}^\tau \cdot 0,922.$$

Из второго уравнения полученной системы уравнений находим:

$$a_{CB}^\tau = \frac{6144 \cdot 0,966 - 2,4 \cdot 0,2588 - 121,506}{0,922} = 6304,75 \text{ м/с}^2,$$

а из первого уравнения – модуль ускорения a_C :

$$a_C = 6144 \cdot 0,2588 + 2,4 \cdot 0,966 + 289,48 - 6304,75 \cdot 0,387 = -558,135 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус указывает, что направление вектора \vec{a}_C противоположно указанному на рисунке 5.

Угловое ускорение ε_{BC} шатуна

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{BC}} = \frac{6304,75}{0,37} = 17037,84 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ε_{BC} противоположно ходу часовой стрелки.

Пример выполнения контрольного задания

Пример выполнения контрольного задания

$$5 = \frac{9,81 \cdot 0,525^2}{2} + 8 \cdot 0,525 \cdot \sin 60^\circ,$$

$$5 \approx 4,989.$$

Принимаем окончательно $T=0,53$ с.

Скорость камня в точке С

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (gT + v_B \sin \alpha)^2} = \\ &= \sqrt{(8 \cos 60^\circ)^2 + (9,81 \cdot 0,53 + 8 \sin 60^\circ)^2} = 12,8 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного расчета в задаче 1 определены реакции всех внешних связей, наложенных на балку, что позволяет, в частности, перейти к выполнению прочностного расчета, как самих балок, так и их опор.

При решении задачи 2 был проведен кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма, в результате чего найдены скорости и ускорения всех звеньев и длина шатуна. Скорости звеньев механизма определялись методом мгновенного центра скоростей, а ускорения методом полюса.

В третьем задании решена вторая задача динамики точки, то есть по заданным массе и силам, действующим на тело, найдены уравнения ее движения и затем, вычислены искомые параметры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Цывильский В. Л. Теоретическая механика: Учебник / В.Л.Цывильский. – 4-е издание, перераб. и доп. – М.: КУРС : ИНФРА-М, 2016. – 368 с.
- 2 Теоретическая механика[Текст]: Сборник контрольных заданий / под общей редакцией В.И. Кулюгина. – Рязань: РВАИ, 2007. – 127 с.
- 3 Теоретическая механика. Курс лекций. Электронное учебное пособие. – Рязань: РВАИ, 2005.
- 4 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, (2004).

5. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Ч. 1. Статика. – Рязань: РВАИ, 2005. – 132 с.
6. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Ч. 2. Кинематика. – Рязань: РВАИ, 2004. – 92 с.
7. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Ч.3. Динамика. – Рязань: РВАИ, 2005. – 233 с.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ЗАЩИТЫ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ И СДАЧИ ЗАЧЕТА

1. Основные понятия и аксиомы статики.
2. Связи. Две задачи статики.
3. Приведение систем сил к простейшему виду.
4. Условия равновесия систем сил. Трение.
5. Центр тяжести твердого тела и его координаты. Методы нахождения центра тяжести.
6. Основные понятия кинематики. Векторный способ задания движения точки. Координатный способ задания движения точки. Естественный способ задания движения точки.
7. Поступательное движение.
8. Вращение тела вокруг неподвижной оси.
9. Плоское движение тела и движение плоской фигуры в ее плоскости.
10. Сложное движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движения.
11. Ускорение Кориолиса.
12. Законы механики (аксиомы динамики) Галилея-Ньютона.
13. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
14. Две задачи динамики точки.
15. Колебания материальной точки.
16. Относительное движение материальной точки.
17. Осевые и центробежные моменты инерции.
18. Силы внешние и внутренние. Дифференциальные уравнения движения механической системы.
19. Кинетическая энергия материальной точки и системы.
20. Работа и мощность силы.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 2

В задании исследуется система, состоящая из прямоугольной вертикальной плиты 1 массой m_1 , движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза 2 массой m_2 (рисунок 2). В момент $t=0$, когда плита имеет скорость v_0 , груз под действием внутренних сил начинает двигаться по имеющемуся на плите желобу. На схемах, приведенных на рисунке 2(1,2,3,4), желоб KE прямолинейный и при движении груза расстояние $s=AD$ изменяется по закону $s=f_1(t)$, а на схемах, приведенных на рисунке 2 (5,6,7,8,9,0), ось желоба – окружность радиуса R и при движении груза угол $\varphi=\angle AOD$ изменяется по

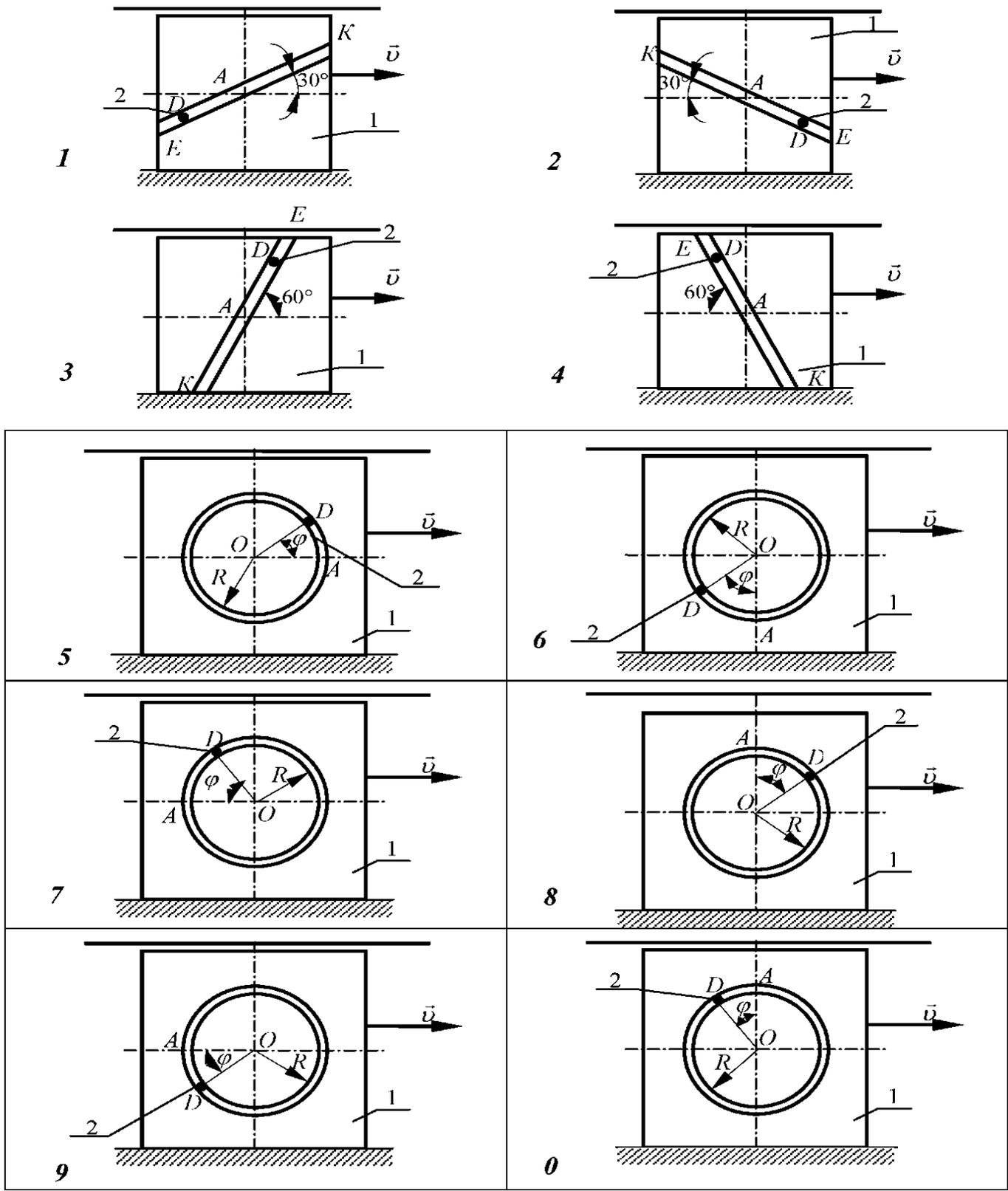


Рисунок 1

закону $\varphi = f_2(t)$. В таблице 1 эти зависимости приведены для каждой схемы в развернутом виде. Груз следует считать материальной точкой. Всеми сопротивлениями пренебречь. Необходимые для выполнения задания данные приводятся в таблицах 1, 2, 3. Величины, которые нужно найти в момент $t_1=1$ с:

L – перемещение плиты с начала движения, м;

v_1 – скорость плиты, м/с;

a_1 – ускорение плиты, м/с²;

N – нормальную реакцию направляющих, Н.

Вариант задания – число, являющееся последней цифрой номера зачетной книжки. Это число указывает номер схемы на рисунке 1, номер строки из таблиц 1 и 2, номер столбца из таблицы 3.

ТАБЛИЦЫ И СХЕМЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ

Таблица 1.

Номер строки	$S=f_1(t), м$		$\varphi=f(t), рад$		
	для схем 1 и 2	для схем 3 и 4	для схем 5 и 6	для схем 7 и 8	для схем 9 и 0
0	$0,4(2t^2-1)$	$0,2(1-3t^2)$	$(\pi/3)(3-2t^2)$	$(\pi/4)(1-3t^2)$	$(\pi/3)(1-4t^2)$
1	$0,8\cos[(\pi/6)t^2]$	$0,4\sin[(\pi/3)t^2]$	$(\pi/3)(t^2+1)$	$(\pi/6)(t^2-3)$	$(\pi/4)t^2$
2	$0,2\cos\pi t^2$	$1,8\cos(\pi/3)t$	$(\pi/6)(1+2t^2)$	$(\pi/2)t^2$	$\pi(2-t^2)$
3	$0,5(2-3t^2)$	$0,3(6t^2-5)$	$(\pi/3)(1-3t^2)$	$(\pi/6)(3-4t^2)$	$(\pi/4)(5t^2-1)$
4	$0,8\sin[(\pi/2)t^2]$	$0,4\cos(\pi/2)t^2$	$(\pi/2)(t^2-2)$	$\pi(2t^2-1)$	$(\pi/6)(4t^2-1)$
5	$0,6\cos(\pi/3)t$	$1,2\sin[(\pi/6)t^2]$	$(\pi/3)(t^2+3)$	$(\pi/6)(5-t^2)$	$(\pi/4)(t^2+2)$
6	$0,2(4-7t^2)$	$0,6(1-2t^2)$	$(\pi/6)(3+4t^2)$	$(\pi/3)t^2$	$(\pi/6)(3t^2-1)$
7	$1,2\cos[(\pi/2)t^2]$	$0,6\sin\pi t^2$	$(\pi/3)(t^2-4)$	$(\pi/4)(5-3t^2)$	$(\pi/2)(t^2+1)$
8	$0,5\sin\pi t^2$	$1,8\cos(\pi/6)t^2$	$(\pi/6)(t^2+2)$	$(\pi/4)(t^2+1)$	πt^2
9	$1,2\sin[(\pi/4)t^2]$	$0,8\cos(\pi/4)t^2$	$(\pi/4)(2-t^2)$	$(\pi/6)(1-5t^2)$	$(\pi/3)(3+t^2)$

Таблица 2

Номер строки	$m_1, кг$	$m_2, кг$	$v_0, м/с$	$R, м$
0	18	6	2	0,8
1	20	8	3	0,9
2	16	4	4	1,0
3	22	4	2	1,2
4	18	6	2	0,8
5	20	8	3	0,9
6	16	4	4	1,0
7	22	4	2	1,2
8	18	6	2	0,8
9	20	8	3	0,9

Примечание – для схем приведенных на рисунке 1 (1,2,3,4)

Таблица 3

НОМЕР СТОЛБЦА	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Рисунок схемы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Прежде чем приступить к выполнению задания, нужно проработать материал, изложенный на лекциях или изучить § 101, 106-109 учебника [2], усвоить смысл вводимых в них понятий и определений, запомнить уравнения и формулы и разобрать решенные в подразделе 13.4 практикума [5] примеры и задачи.

Пример выполнения и оформления подобного задания приведен в данном пособии.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

РЯЗАНСКОЕ ВЫСШЕЕ ВОЗДУШНО-ДЕСАНТНОЕ КОМАНДНОЕ
УЧИЛИЩЕ ИМЕНИ ГЕНЕРАЛА АРМИИ В.Ф.МАРГЕЛОВА
Кафедра информационных технологий и общеобразовательных
дисциплин

Контрольное задание
по дисциплине «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Вариант _____

Выполнил _____
(Фамилия, инициалы, подпись)

« _____ » _____ 2016 г.

Проверил преподаватель _____ Селиверстова Н.С..
(подпись)

« _____ » _____ 2016 г.

Рязань 2016

Пример выполнения контрольного задания

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	
Задача 1.....	
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	

Пример выполнения контрольного задания

ВВЕДЕНИЕ

Любой механизм, двигатель, автомобиль, станок и тому подобное - все это механические системы большей или меньшей сложности. Для того, чтобы на стадии их проектирования предсказать их технические характеристики, уровень надежности и долговечности или объяснить причины отказов на стадии их эксплуатации, нужно уметь их исследовать. Второе задание и посвящено освоению некоторых приемов исследования механических систем. Конечно, исследовать реальную систему в задании нецелесообразно. Это займет очень много времени и может вызвать серьезные трудности как вследствие своей сложности и громоздкости, так и вследствие недостатка опыта у курсантов. Кроме того, для исследования могут потребоваться знания не только теоретической механики, но и специальных дисциплин. Но методика применения общих теорем динамики для изучения движения не зависит от степени сложности системы. Поэтому начальные навыки исследования можно получить и на примере таких простейших систем, как в данном задании.

Пример выполнения контрольного задания

Задача 1. Механическая система (рисунок 1) состоит из вертикальной плиты 1, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза 2, принимаемого за материальную точку и движущегося по имеющемуся на плите желобу, ось которого представляет собой окружность радиуса R . В момент времени $t=0$ груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу.

Найти в момент времени t величину нормальной реакции N направляющих на плиту, скорость плиты u_1 , перемещение плиты L , ускорение плиты a_1 при следующих исходных данных:

масса плиты 1	$m_1=18$ кг;
масса груза 2	$m_2=6$ кг;
радиус желоба	$R=0,8$ м;
закон изменения угла ($\varphi=\angle AOD$)	$\varphi=\pi/6 \cdot (1-t^2)$
время движения	$t=1$ с
начальные условия:	
при $t=0$ скорость движения плиты	$v_0=2$ м/с;
скорость груза относительно плиты	$v_2'=0$
Всеми сопротивлениями пренебречь.	

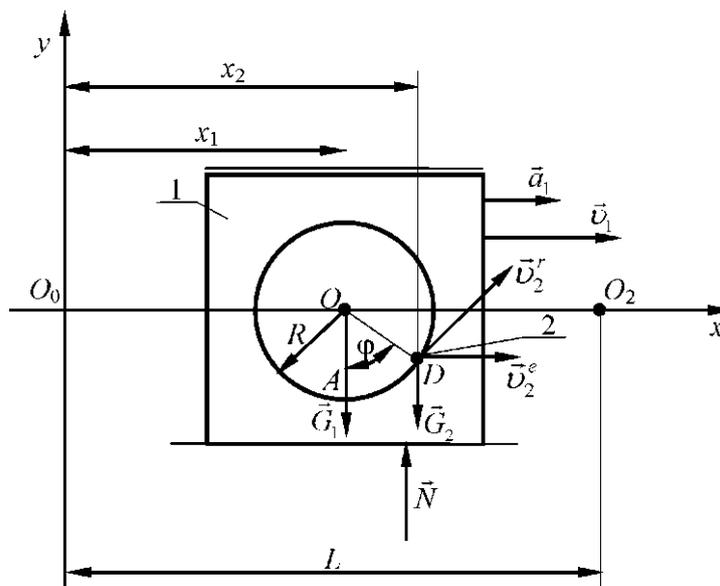


Рисунок 2. Схема механической системы в произвольном положении

Решение: 1 Составим расчетную схему для произвольного положения t механической системы (рисунок 2). Покажем на ней:

G_1 - силу тяжести плиты, $G_1 = m_1 g$;

G_2 - силу тяжести груза, $G_2 = m_2 g$;

x_1 - координату центра масс плиты в произвольном положении механической системы;

v_1, a_1 – скорость и ускорение плиты в том же положении;

v_2', v_2'' – относительную и переносную скорости груза в том же положении;

O_0 и O_2 – начальное и конечное положения центра масс плиты.

За координатную ось O_0x примем траекторию движения центра масс плиты, выбрав за начало координат его начальное положение. Ось O_0y направим вертикально вверх.

РЕШЕНИЕ

2.1 Запишем теорему о движении центра масс

$$M \cdot \vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e \Rightarrow \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{G}_2 \quad (1)$$

2.2 Спроектируем векторное уравнение (1) на оси координат

$$\left. \begin{array}{l} M \cdot a_{cx} = 0 \\ M \cdot a_{cy} = N - G_1 - G_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, M \neq 0 \\ M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = N - G_1 - G_2 \end{array} \right\}$$

2.3 Приведем полученные дифференциальные уравнения движения центра масс системы к наиболее простому виду

$$\frac{dV_{cx}}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{y}_c = N - m_1 g - m_2 g = N - (m_1 + m_2)g \quad (3)$$

2.4 Найдём координаты центра масс системы.

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{M},$$

но (рисунок 1)

$$x_2 = x_1 + R \sin \varphi; \quad y_1 = 0;$$

$$y_2 = -R \cos \varphi.$$

Поэтому

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 (x_1 + R \sin \varphi)}{M} = \frac{(m_1 + m_2)x_1 + m_2 R \sin \varphi}{m_1 + m_2};$$

$$y_c = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 (-R \cos \varphi)}{M};$$

$$x_c = x_1 + \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \cdot \sin \varphi; \quad (4)$$

$$y_c = -\frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \cdot \cos \varphi \quad (5)$$

2.5 Найдем первую и вторую производные от координат центра масс системы.

$$\dot{x}_c = \dot{x}_1 + \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \dot{\varphi} \cos \varphi; \quad \ddot{x}_c = \ddot{x}_1 + \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi); \quad (6)$$

$$\dot{y}_c = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \dot{\varphi} \sin \varphi; \quad \ddot{y}_c = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

2.6 Найдем значения угла φ и его первой и второй производных по времени в начале и в конце движения.

$$\varphi = \frac{\pi}{6} (1 - t^2); \quad \dot{\varphi} = \frac{\pi}{6} (-2t) = -\frac{\pi}{3} t; \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\pi}{3};$$

$$\text{при } t=0 \quad \varphi = \frac{\pi}{6}; \quad \dot{\varphi} = 0; \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{при } t=1 \text{ с} \quad \varphi = 0; \quad \dot{\varphi} = -\frac{\pi}{3}; \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\pi}{3}.$$

2.7 Найдем силу давления плиты на основание.

Учтем, что сила, с которой плита давит на основание, равна силе, о которой основание давит на плиту. Из уравнения (3) получим

$$N = (m_1 + m_2) \ddot{y}_c + (m_1 + m_2) g = (m_1 + m_2) \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + (m_1 + m_2) g;$$

$$\text{при } t=1 \text{ с} \quad N = m_2 \cdot R (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + (m_1 + m_2) g =$$

$$= 6 \cdot 0,8 \left(-\frac{\pi}{3} \sin 0^0 + \left(-\frac{\pi}{3} \right)^2 \cos 0^0 \right) + (18 + 6) \cdot 9,81 = 240,7 \text{ Н}.$$

Найдем скорость плиты.

$$\text{Из уравнения (2) получим } \frac{dV_{cx}}{dt} = 0 \Rightarrow V_{cx} = const, \quad \text{но при } t=0 \quad V_{cx} = U_c \Rightarrow$$

и при $t \neq 0$ $V_{cx} = U_0$, т.е. $\dot{x}_c = U_0 \Rightarrow U_0 = \dot{x}_1 + \frac{m_2 r}{m_1 + m_2} \dot{\varphi} \cos \varphi$

$$V_1 = \dot{x}_1 = U_0 - \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi;$$

$$\text{при } t=1\text{с} \quad V_1 = 2 - \frac{6 \cdot 0,8}{18+6} \left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos 0^0 = 2,21 \text{ М/с}.$$

2.8 Найдем величину перемещения плиты.

Так как $V_{cx} = U_0 = const$, величина проекции перемещения центра тяжести системы на ось x равняется

$$\xi_{cx} = U_0 \cdot t = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м}.$$

Кроме того, при $t = 0$ точка C_1 совпадает с началом координат и её координата $x_{c_1} = 0$, поэтому при $t = 0$ по формуле (4)

$$x_{c_0} = 0 + \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}.$$

при $t=1\text{с}$

$$\dot{x}_c = x_{c_0} + \xi_{cx} = \frac{m_2 \cdot R}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \quad (7)$$

а из (4) при $t=1\text{с}$ находим

$$x_{c_1} = L + \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \sin 0^0 = L \quad (8)$$

приравняв левые и правые части равенств (7) и (8), получим

$$\frac{m_2 \cdot R}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{2} + 2 = L; \quad L = 2 + \frac{6 \cdot 0,8}{18+6} \cdot \frac{1}{2} = 2,1 \text{ м}.$$

2.9 Найдем ускорение плиты.

Из равенства (6) получим, с учетом того, что $\ddot{x}_c = 0$ и $\ddot{x}_1 = a_1$

$$0 = a_1 + \frac{m_2 \cdot R}{m_1 + m_2} \cdot (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi);$$

$$a_1 = -\frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \cdot (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi);$$

$$\text{при } t=1\text{c} \quad a_1 = -\frac{6 \cdot 0,8}{18+6} \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \cos 0^0 - \left(-\frac{\pi}{3} \right)^2 \sin 0^0 \right) = 0,21 \frac{\text{M}}{\text{c}^2}$$

3 ПРОВЕРКА

3.1 Для проверки используем теорему об изменении количества движения в дифференциальной форме

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{G}_2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dK_x}{dt} = 0; \Rightarrow K_x = \text{const} \Rightarrow K_{1x} = K_{0x} & (9) \\ \frac{dK_y}{dt} = N - g(m_1 + m_2) & (10) \end{cases}$$

3.2 Найдем проекции количества движения механической системы на оси координат

$$\vec{K} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2; \quad \text{но } \vec{V}_2 = \vec{V}_2^e + \vec{V}_2^r;$$

$$\vec{K} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2^e + m_2 \vec{V}_2^r, \quad \text{где } \vec{V}_2^e = \vec{V}_1; \quad \vec{V}_2^r = \omega \cdot R = \dot{\varphi} \cdot R;$$

тогда (смотри рисунок 1).

$$K_x = m_1 V_1 + m_2 V_1 + m_2 V_{2x}^r = (m_1 + m_2) V_1 + m_2 \cdot \dot{\varphi} \cdot R \cdot \cos \varphi; \quad (11)$$

$$K_y = m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 + m_2 \cdot V_{2y}^r = m_2 \cdot \dot{\varphi} \cdot R \cdot \sin \varphi \quad (12)$$

3.3 Определим силу давления плиты на основание из (10) и (12)

$$\frac{d}{dt} (m_2 \cdot \dot{\varphi} \cdot R \cdot \sin \varphi) = N - g(m_1 + m_2);$$

$$m_2 \cdot R (\ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi) = N - g(m_1 + m_2);$$

$$N = m_2 \cdot R \cdot (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + g(m_1 + m_2)$$

$$\text{при } t=1\text{c} \quad N = 6 \cdot 0,8 \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \cdot \sin 0^0 + \left(-\frac{\pi}{3} \right)^2 \cos 0^0 \right) + 9,81 \cdot (18 + 6) = 240,7 \text{H}.$$

3.4 Воспользуемся теоремой об изменении количества движения в проекции на ось Oх:

$$\text{при } t=0 \quad V_2^r = 0 \Rightarrow V_1 = U_0 \quad \text{и} \quad K_{0x} = (m_1 + m_2) U_0;$$

при $t \neq 0$ из равенства (9) и (11) получим

$$(m_1 + m_2) V_1 + m_2 \cdot \dot{\varphi} \cdot R \cdot \cos \varphi = (m_1 + m_2) U_0$$

3.5 Найдем скорость плиты в момент $t=1\text{с}$.

$$V_1 = U_0 - \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (13)$$

$$\text{при } t=1\text{с} \quad V_1 = 2 - \frac{6 \cdot 0,8}{18 + 6} \left(-\frac{\pi}{3} \right) \cos 0^0 = 2,21\text{м}$$

3.6 Определим перемещение плиты за время $t=1\text{с}$.

Из (13) получим

$$\frac{dx_1}{dt} = U_0 - \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi;$$

$$\int_0^x dx_1 = U_0 \int_0^1 dt - \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos \varphi d\varphi.$$

$$x_1 = U_0 \cdot 1 - \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \left(\sin 0^0 - \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot 1 + \frac{6 \cdot 0,8}{18 + 6} \sin \frac{\pi}{6} = 2,1\text{м}.$$

3.7 Дифференцируя по времени равенство (13), найдем

$$\dot{V}_1 = \dot{U}_0 - \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

$$\text{а так как } \dot{V}_1 = a_1, \quad U_0 = \text{const} \Rightarrow \dot{U}_0 = 0$$

$$a_1 = -\frac{m_2 R}{m_1 + m_2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

$$\text{при } t = 1\text{с}, \quad a_1 = -\frac{6 \cdot 0,8}{18 + 6} \left(-\frac{\pi}{3} \cos 0^0 - \left(-\frac{\pi}{3} \right)^2 \cdot \sin 0^0 \right) = 0,21 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате расчетов получили следующие значения искомым характеристик движения плиты:

сила давления плиты на основание $N=240,7 \text{ Н}$;

скорость движения плиты $V_1 = 2,21 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

величина перемещения плиты $x_1 = 2,1\text{м}$;

ускорение плиты $a_1 = 0,21 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Проверка подтвердила правильность полученных результатов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Цывилевский В. Л. Теоретическая механика: Учебник / В.Л.Цывилевский. – 4-е издание, перераб. и доп. – М.: КУРС : ИНФРА-М, 2016. – 368 с.
- 2 Теоретическая механика[Текст]: Сборник контрольных заданий / под общей редакцией В.И. Кулюгина. – Рязань: РВАИ, 2007. – 127 с.
- 3 Теоретическая механика. Курс лекций. Электронное учебное пособие. – Рязань: РВАИ, 2005.
- 4 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, (2004).
5. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Ч. 1. Статика. – Рязань: РВАИ, 2005. – 132 с.
6. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Ч. 2. Кинематика. – Рязань: РВАИ, 2004. – 92 с.
7. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Ч.3. Динамика. – Рязань: РВАИ, 2005. – 233 с.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ЗАЩИТЫ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ И СДАЧИ ЭКЗАМЕНА

21. Законы механики (аксиомы динамики) Галилея-Ньютона.
22. Теорема о движении центра масс.
23. Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения.
24. Кинетический момент. Теорема об изменении кинетического момента.
25. Осевые и центробежные моменты инерции.
26. Силы внешние и внутренние. Дифференциальные уравнения движения механической системы.
27. Кинетическая энергия материальной точки и системы. Закон сохранения механической энергии.
28. Работа и мощность силы.
29. Принцип Д'Аламбера. Метод кинетостатики.
30. Принцип возможных перемещений.
31. Элементарная теория удара.

Селиверстова Надежда Сергеевна

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

учебно-методическое пособие для студентов очной и заочной форм обучения

В авторской редакции

Компьютерная верстка Селиверстова Н.С.