Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Кафедра Электроснабжение железнодорожного транспорта

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению контрольных работ №1,2 по дисциплине

«ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

для студентов специальности
23.05.05 «Системы обеспечения движения поездов»
специализации «Электроснабжение железных дорог»
заочной формы обучения

Составитель:
А.С. Цветаева

Самара 2017

УДК 681.5.011

Методические указания к выполнению контрольных работ №1,2 по дисциплине «Теория автоматического управления» для студентов специальности 23.05.05 «Системы обеспечения движения поездов» специализации «Электроснабжение железных дорог» заочной формы обучения [Текст]/ составители: А.С. Цветаева – Самара: СамГУПС, 2017. – 26 с.

Утверждена кафедрой Электроснабжение железнодорожного транспорта, протокол № ___ от __________г.

Печатается по решению редакционно-издательского совета академии.

Приведены задание и методические указания по выполнению контрольных работ №1,2 для студентов по рассматриваемой дисциплине. В содержание работ входят основные расчеты по определению частотных характеристик системы по ее передаточной функции, производится исследование системы на устойчивость.

Составитель: Цветаева Анна Сергеевна, ст. преподаватель каф. «ЭСЖТ»

Рецензенты: к.т.н., доцент, зав. кафефедрой «АТС на ж.д.т.» СамГУПС Гуменников В.Б.

к.т.н., доцент «ЭСЖТ» СамГУПС Козлова Н.С.

Редактор:
Компьютерная верстка:

Подписано в печать _______ 2017 г. Формат 60х90 1/16.
Бумага писчая. Печать оперативная. Усл. п.л. 1,625
Тираж ___ экз. Заказ №

© Самарский государственный университет путей сообщения, 2017

Введение

Теория автоматического управления (ТАУ) — является составной частью технической кибернетики и предназначена для разработки общих принципов автоматического управления, а также методов анализа (исследования функционирования) и синтеза (выбора параметров) систем автоматического управления (САУ) техническими объектами.

Контрольные работы по дисциплине «Теория автоматического управления» позволяют ознакомиться с основными положениями теории автоматического управления, методами анализа и расчета характеристик системы автоматического управления, а также основами анализа ее характеристик.

Методическое указание состоит из двух контрольных работ, которые необходимо оформить согласно требованиям ГОСТ 2.105-95 ЕСКД.

В контрольной работе №1 необходимо произвести расчет системы автоматического управления: определить нули и полюса системы по передаточной функции, а также ее частотные характеристики: АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, МЧХ, ВЧХ.

Правило выбора варианта указано в тексте методических указаний.

В контрольной работе №2 необходимо произвести преобразование структурной схемы, исследовать устойчивость системы по двум критериям устойчивости.

В результате выполнения контрольной работы №1,2 по дисциплине «Теория автоматического управления» студент должен:

научиться владеть основами расчета и проектирования элементов и устройств различных физических принципов действия (ОПК-12);

научиться использовать в профессиональной деятельности современные информационные технологии, изучать и анализировать информацию, технические данные, показатели и результаты работы систем обеспечения движения поездов, обобщать и систематизировать их, проводить необходимые расчеты (ПК-1).

В результате выполнения контрольных работ студент должен:

Знать:

- основные положения теории автоматического управления, принципы и методы построения моделей САУ;
- методы анализа и синтеза САУ;
- методы расчета и оптимизации САУ при детерминированных и случайных воздействиях;

Уметь:

- применять принципы и методы построения моделей, методы анализа и синтеза САУ и расчет ее характеристик;

Владеть:

- навыками расчета САУ и анализа ее характеристик.

Контрольная работа №1

1. Общие теоретические сведения

Передаточная функция

Передаточная функция W(p) *(далее ПФ)* представляет собой дифференциальный оператор, выражающий связь между входом (U) и выходом (Y) линейной стационарной системы. Зная входной сигнал системы и передаточную функцию, можно восстановить выходной сигнал. Передаточная функция полностью описывает связи между выходом и входом объекта при нулевых начальных условиях, но не учитывает его внутреннее устройство W(p)=U(p)/Y(p) рис. 1.1.

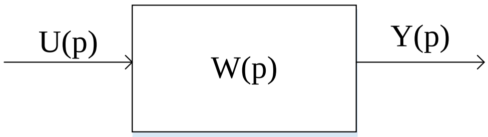


Рис 1.1 Структурная схема передаточной функции

Передаточная функция является *правильной*, если степень ее числителя не больше, чем степень знаменателя; *строго правильной,* если степень числителя меньше степени знаменателя, *неправильной,* если степень числителя больше степени знаменателя.

Поведение линейных, непрерывных, стационарных систем с сосредоточенными параметрами описывается во времени обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) с постоянными коэффициентами a_i, b_j (1)

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m x(t) \qquad (1)$$

где слева – выходная функция *y(t)* и ее производные (результат), справа – входная функция *x(t)* и ее производные.

Для записи передаточной функции используется комплексная переменная Лапласа *s* (иногда обозначаемая символом *p*). Чтобы получить переходную функцию, достаточно в ОДУ заменить производные *d/dt* на *s (или p)* в соответствующей степени, отбросить символы функций *x(t)* и *y(t)* и разделить многочлен правой части дифференциального уравнения на многочлен левой части (2).

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n)y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m)x \qquad (2)$$

Поведение цепи как в частотной, так и во временной областях полностью определяется расположением полюсов и нулей. Расположение нулей и полюсов определяется типом функции цепи, конфигурацией цепи и значениями элементов. Поскольку операторная функция цепи представляет отношение полиномов с вещественными коэффициентами, ее нули и полюсы могут быть вещественными или комплексно - сопряженными. Корни полинома числителя ПФ называют нулями, а корни полинома знаменателя – полюсами функции цепи.

Полюсы устойчивой цепи должны располагаться в левой части комплексной плоскости, т. е. они могут быть отрицательными вещественными или комплексными с отрицательными вещественными частями. Если бы полюс р был положительным, то соответствующая составляющая реакции не затухала бы, а бесконечно увеличивалась с течением времени. Цепь с таким поведением называется неустойчивой. Таким образом, полюсы устойчивой цепи лежат в левой полуплоскости. Полная реакция цепи состоит из двух составляющих: вынужденной и свободной. Вынужденная составляющая состоит из слагаемых, определяемых полюсами входного воздействия. Свободная составляющая образуется слагаемыми, обусловленными полюсами функции цепи. Если входное воздействие периодическое, то вынужденная составляющая является установившейся. Полюсы и нули функции цепи удобно изображать на комплексной плоскости. Полюсы изображают символом «x», а нули – символом «o». Такое графическое изображение называют полюсно-нулевой диаграммой (рис. 1.2).

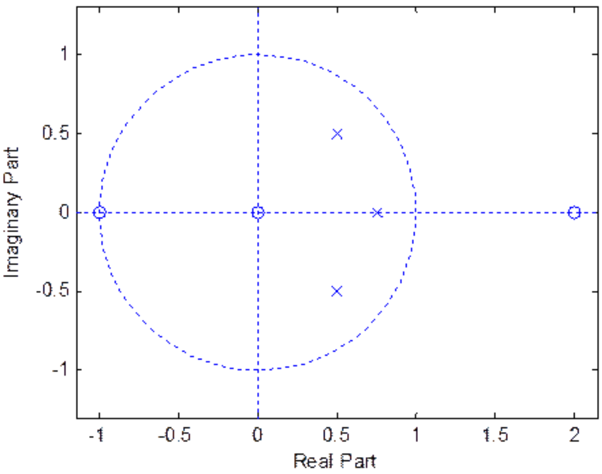


Рис 1.2 Полюсно-нулевая диаграмма

Частотные характеристики динамического звена

Под динамическим звеном понимают устройство любой физической природы и конструктивного оформления, описываемое определенным дифференциальным уравнением. Одним и тем же уравнением могут описываться весьма разнообразные устройства (механические, гидравлические, электрические и т.д.), а также описывать процессы различной физической природы (технические, биологические и т.д.).

Частотной характеристикой динамического звена называют функцию комплексного аргумента $j\omega$, полученную путем формальной замены s (или р) на $j\omega$ в выражении передаточной функции. W(jω)=W(s)=W(p)

Таким образом, частотную характеристику динамического звена можно определить как отношение спектра (преобразования Фурье) выходного сигнала к спектру входного сигнала.

Частотная характеристика как функция комплексного аргумента может быть представлена в следующем виде –

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = |W(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)},$$

Где $P(\omega)$ – действительная (вещественная) часть $W(j\omega)$,

$Q(\omega)$ – мнимая часть $W(j\omega)$,

$|W(j\omega)|$ – модуль (амплитуда) $W(j\omega)$,

$\varphi(\omega)$ – фаза аргумент $W(j\omega)$.

Амплитуда, фаза, действительная и мнимая части частотной характеристики являются функциями частоты, поэтому частотная характеристика используется и графически представляется в виде амплитудно-фазовой, действительной, мнимой, амплитудной и фазовой частотных характеристик.

В теории автоматического управления рассматривают и используют следующие частотные характеристики динамических звеньев:

1. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$f_1(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}.$$

2. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ)

$$f_2(t) = \varphi(\omega) = arctg\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

3. Вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$$f_3(t) = P(\omega) = |W(j\omega)|\cos\varphi(\omega).$$

4. Мнимая частотная характеристика (МЧХ)

$$f_4(t) = Q(\omega) = |W(j\omega)|\sin\varphi(\omega).$$

5. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ), которая определяется как годограф (след движения конца) вектора $\vec{W}(j\omega)$, построенный на комплексной плоскости при изменении частоты от 0 до ∞.

На рис. 1.3 показаны частотные характеристики некоторого динамического звена.

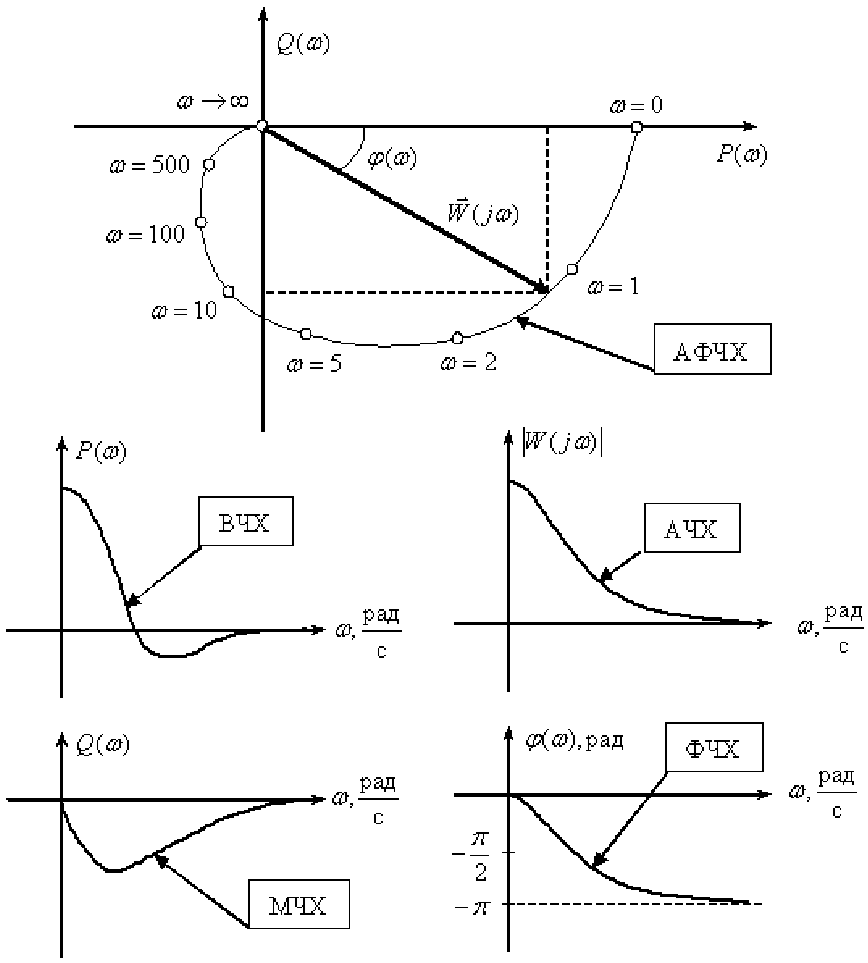


Рис 1.3 - Частотные характеристики

Частотными характеристиками называются формулы и графики, характеризующие реакцию звена на синусоидальное входное воздействие в установившемся режиме (т.е. вынужденные синусоидальные колебания звена).

В линейной САУ установившиеся колебания выходной величины, вызванные гармоническими воздействиями на входе, являются гармоническими колебаниями той же частоты, но амплитуда и фаза их будут уже другими.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – отношение амплитуды выходных колебаний к амплитуде входного сигнала системы.

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) – разность фаз выходных и входных колебаний системы.

Амплитудно-фазо-частотная характеристика (другое название – частотный годограф Найквиста) – это годограф динамической системы на комплексной плоскости, где по оси абсцисс откладывается ВЧХ системы, а по оси ординат – МЧХ системы, умноженная на мнимую единицу. АФЧХ получается путем изменения частоты в диапазоне от 0 до +∞. На рисунке 1.4 показана методика построения АФЧХ на комплексной плоскости для одной частоты.

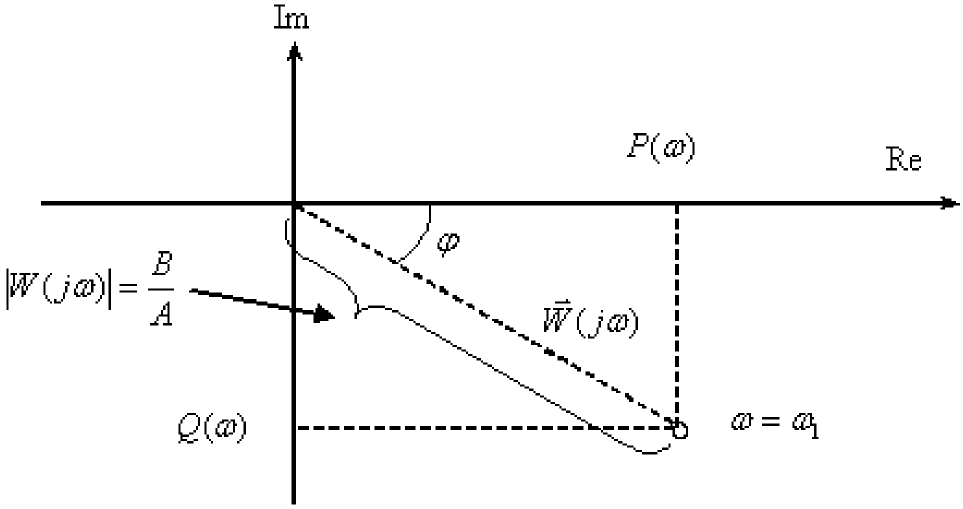


Рис 1.4 - Построение АФЧХ

Частотная характеристика показывает, во сколько раз изменяет динамическое звено (устройство), работающее в установившемся режиме, амплитуду входной синусоиды частоты ω, и на какой угол сдвигает входную синусоиду по фазе.

2. Задания к контрольной работе №1

Контрольная работа №1 состоит из трех задач.

Задача №1 Для объекта, модель которого задана дифференциальным уравнением, указанным в таблице 1.1, записать передаточную функцию, определить ее нули и полюса. Полюса и нули отобразить на комплексной плоскости.

Таблица 1.1

Исходные данные

Вариант *(согласно последней цифре шифра)*	Дифференциальное уравнение
0	$5\ddot{y} - 16\dot{y} + 3y = 2\dot{x} - 2x$
1	$\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 5x$
2	$2\dddot{y} - 0.5\ddot{y} + 2.2\dot{y} = \dot{x} + 5x$
3	$-3\dddot{y} + 6\ddot{y} - 18\dot{y} = 16\dot{x} + x$
4	$-6\ddot{y} - 5\dot{x} - 1y = 2\ddot{x} + 3\dot{x} + x$
5	$\ddot{y} - 8\dot{y} + 12y = 0.8\dot{x} + 2x$
6	$5\dddot{y} + 3\ddot{y} + 7\dot{y} = 2\dot{x} + 0.8x$
7	$\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = \ddot{x} - 2\dot{x} - 3x$
8	$\dddot{y} + 12\ddot{y} + 36\dot{y} = 4\dot{x} + 2x$
9	$12\ddot{y} + 7\dot{y} + y = 3\dot{x} - 6x$

Методические рекомендации по выполнению задачи №1

1) Запишите исходное дифференциальное уравнение объекта в операторной форме с помощью оператора дифференцирования.

Например: Дифференциальное уравнение $\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 12\dot{x} + 12x$ запишем в виде $(p^2 + 6p + 5)y = (2p + 12)x$

2) Определите передаточную функцию $W(p) = \frac{y}{x}$ и проверьте ее правильность.

Например: $W(p) = \frac{2p+12}{p^2+6p+5}$, правильная.

3) Определите нули и полюса передаточной функции.

Чтобы определить полюса (p_n), необходимо знаменатель, называемый характеристическим уравнением приравнять к нулю.

Например: $p^2 + 6p + 5 = 0$

Определим дискриминант $D = b^2 - 4ac$

Корни уравнения $p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Решая уравнение получим p_1 =-5, p_2=-1.

Чтобы определить нули (z_n) необходимо числитель передаточной функции приравнять к нулю.

Для представленного примера передаточной функции z_1 =-6.

4) Полюса и нули отобразите на комплексной плоскости (пример представлен ниже).

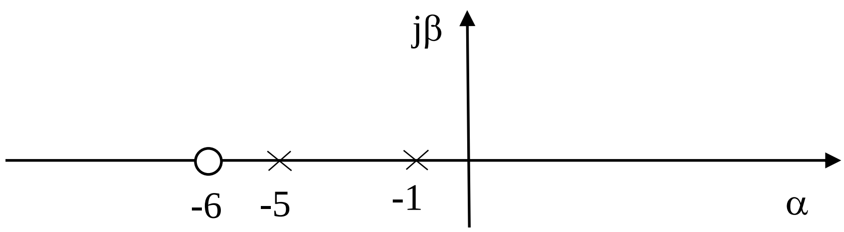


Рис 1.7 - Полюса и нули на комплексной плоскости

Задача №2 По передаточной функции объекта, представленной в таблице 1.2, требуется определить и построить амплитудно-фазочастотную характеристику (АФЧХ), амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), фазочастотная характеристика (ФЧХ), вещественная частотная характеристика (ВЧХ), мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Таблица 1.2

Исходные данные

Вариант *(согласно предпоследней цифре шифра)*	Передаточная функция
0	$W(p) = \frac{4}{4p^2 + p + 1}$
1	$W(p) = \frac{p + 1}{p^2 + p + 1}$

Вариант *(согласно предпоследней цифре шифра)*	Передаточная функция
2	$W(p)=\dfrac{p+1}{5p+1}$
3	$W(p)=\dfrac{10p}{(p+1)^2}$
4	$W(p)=\dfrac{p+1}{9p^2+3p+1}$
5	$W(p)=\dfrac{p}{0.1p+1}$
6	$W(p)=\dfrac{4}{2p^2+p}$
7	$W(p)=\dfrac{0.5p+1}{p(4p^2+p+1)}$
8	$W(p)=\dfrac{10}{(p+1)(0.1p+1)}$
9	$W(p)=\dfrac{4}{p(p+4)}$

Алгоритм вычисления и построения частотных характеристик

1. В передаточной функции заменить p на jω;
2. Освободиться от старших степеней j, используя следующие правила:

$$j=j;\ j^2=-1;\ j^3=j^2\times j=-j;\ j^4=1;\ j^5=j^4\times j=j \text{ и т.д.}$$

3. В знаменателе передаточной функции сгруппировать члены содержащие и не содержащие j;
4. Освободиться от иррациональности в знаменателе. Для этого числитель и знаменатель домножить на выражение, сопряженное выражению в знаменателе относительно j;
5. В числителе передаточной функции сгруппировать члены содержащие и не содержащие j;
6. Выделить Re(w) и Im(w);

$$W(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$$

7. Рассчитать все частотные характеристики и построить графики;

$$A(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

8. Для построения графиков необходимо составить таблицу особых частот (таблицы 1.3), используя обязательные значения:

8.1 крайние частоты 0 и +∞;

8.2 частоты пересечения характеристик с осями (определяются путем приравнивания числителей дробей мнимой и действительной части к нулю);

8.3 частоты разрыва характеристики (находят, приравнивая знаменатель передаточной функции к нулю);

8.4 прочие частоты для повышения точности расчета и построения.

Таблица 1.3

Таблица частот

ω	Re(ω)	Im(ω);	A(ω)	φ(ω)
0				
∞				
1				
…..				
n				

При построении графиков учитывают гладкость кривой, указывают на графике стрелкой направление увеличения частоты и/или крайние частоты. Построение кривой следует производить по возрастанию значений частоты. Примеры графиков представлены на рисунке 1.3.

Задача №3 Определить сигнал $x_2(t)$ на выходе системы по известному входному сигналу и передаточной функции системы.

Таблица 1.4

Исходные данные

Вариант *(согласно последней цифре шифра)*	Передаточная функция	Входной сигнал	Частота ω, Рад/с
0	$W(p)=\frac{4}{p}$	$x(t)=8\sin 0.25t$	20
1	$W(p)=\frac{1}{p+1}$	$x(t)=2\sin 10t$	30
2	$W(p)=\frac{p+1}{5p+1}$	$x(t)=4\sin 25t$	40
3	$W(p)=\frac{10p}{p+2}$	$x(t)=5\sin t$	50
4	$W(p)=\frac{p+1}{3p+1}$	$x(t)=3\sin 4t$	60
5	$W(p)=\frac{p}{0.1p+1}$	$x(t)=4\sin 8t$	70
6	$W(p)=\frac{5}{p}$	$x(t)=5\sin 25t$	80
7	$W(p)=\frac{10}{p^2+4}$	$x(t)=8\sin 0.6t$	90
8	$W(p)=\frac{10}{p^2+9}$	$x(t)=4\sin 10t$	100

Вариант *(согласно последней цифре шифра)*	Передаточная функция	Входной сигнал	Частота ω, Рад/с
9	$W(p) = \dfrac{4}{p(p+4)}$	$x(t) = 8\sin 10t$	110

Алгоритм определения выходного сигнала

1. При воздействии входного сигнала $x_1(t)=X_1\sin\omega t$ выходной сигнал $x_2(t)$ по истечению времени переходного процесса также будет гармоническим, но отличается от входного амплитудой и фазой.

$x_2(t)=A(\omega)X_1\sin[\omega t+\varphi(\omega)]$

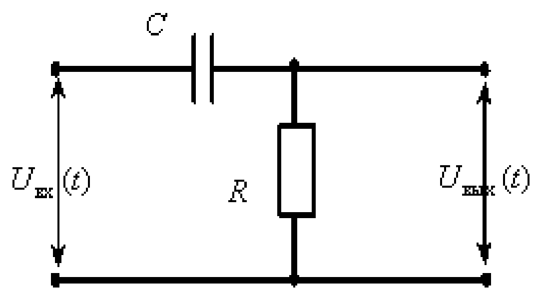
$A(\omega)$ – АЧХ системы,

$\varphi(\omega)$ – ФЧХ системы.

2. По передаточной функции определить АЧХ и ФЧХ системы для заданной частоты.
3. Получившиеся значения $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ подставить в уравнение $x_2(t)$.

Контрольные вопросы к контрольной работе №1

1. Линейное динамическое звено это?
2. Как определить передаточную функцию линейного динамического звена?
3. Перечислите основные элементы структурных схем систем управления.
4. Как определить по передаточной функции динамического звена его временные характеристики: импульсную и переходную?
5. Как по переходной характеристике определить импульсную характеристику динамического звена?
6. Определите передаточную функцию динамического звена по его принципиальной электрической схеме:



7. Как определить частотную характеристику динамического звена, если известна его передаточная функция?
8. Какие виды частотных характеристик вы знаете?
9. Как определить амплитуду и аргумент частотной характеристики?
10. Перечислите основные этапы экспериментального снятия частотной характеристики устройства.
11. Поясните физический смысл частотной характеристики линейного динамического звена.
12. Определите выражение частотной характеристики по заданной передаточной функции

$$W(s)=\frac{1}{2s+1}.$$

Контрольная работа №2

Контрольная работа №2 состоит из трех задач: преобразование структурных схем систем автоматического управления и исследование устойчивости системы по двум критериям.

2 Общие теоретические сведения.

2.1 Структурные схемы САУ

Структурная схема САУ представляет собой графическое изображение системы дифференциальных уравнений, описывающих работу САУ. Графическое изображение уравнений звеньев предпочтительнее обычной математической записи этих уравнений, так как позволяет весьма просто и по единообразным правилам производить «свертывание» этих уравнений.

Систему управления можно разбить на блоки, имеющие вход и выход (объект, регулятор, привод, измерительная система). Для того, чтобы показать взаимосвязи этих блоков, используют структурные схемы. На них каждый элемент изображается в виде прямоугольника, внутри которого записывается его передаточная функция. Вход и выход блока показывают соответственно «входящей» и «выходящей» стрелками (рис.2.1).

Рис 2.1 – Структурная схема

Формы записи передаточной функции:

• *операторная запись*, когда передаточная функция записывается как функция оператора дифференцирования *p*, входы и выходы блоков – функции времени;

• *запись в изображениях*, когда передаточная функция записывается как функция комплексной переменной *s*, а для обозначения входов и выходов используют их изображения по Лапласу.

Для суммирующих элементов используют специальное обозначение – круг, разбитый на сектора. Если сектор залит черным цветом, поступающий в него сигнал вычитается, а не складывается с другими. Разветвление сигнала обозначается точкой, как и радиотехнике.

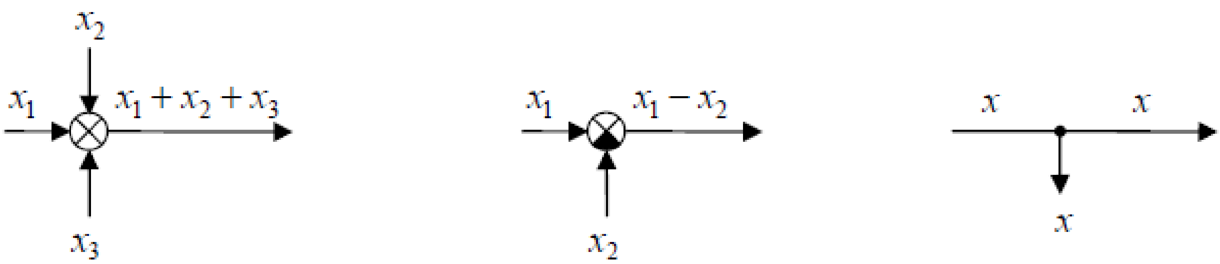
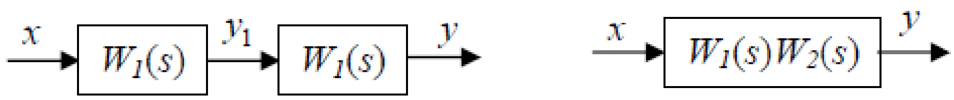


Рис 2.2 – Обозначение суммирования и вычитания на схеме

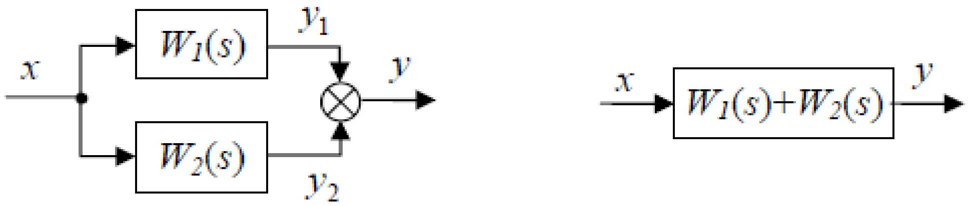
Многие инженерные (классические) методы исследования систем управления основаны на использовании передаточных функций. Для построения передаточной функции системы между заданными входом и выходом нужно преобразовать структурную схему так, чтобы в конечном счете остался один блок с известной передаточной функцией с помощью которой можно определить частотные характеристики САУ, характеризующие связи между выходом и входом САУ.

Рассмотрим **правила эквивалентных преобразований**, не изменяющих свойств систем и необходимых для нахождения передаточной функции:

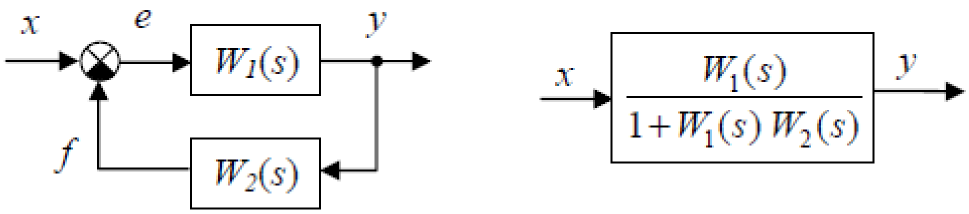
1. Последовательное соединение динамических звеньев.



2. Параллельное соединение динамических звеньев



3. Замкнутый контур с отрицательной обратной связью

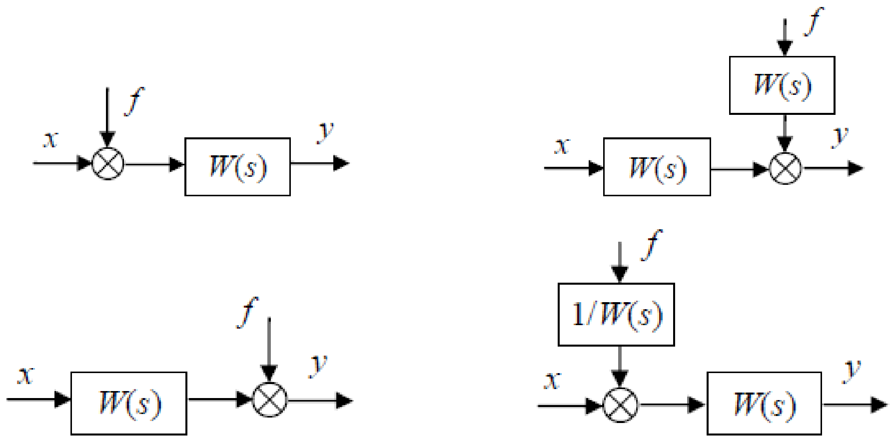


4. Замкнутый контур с положительной обратной связью

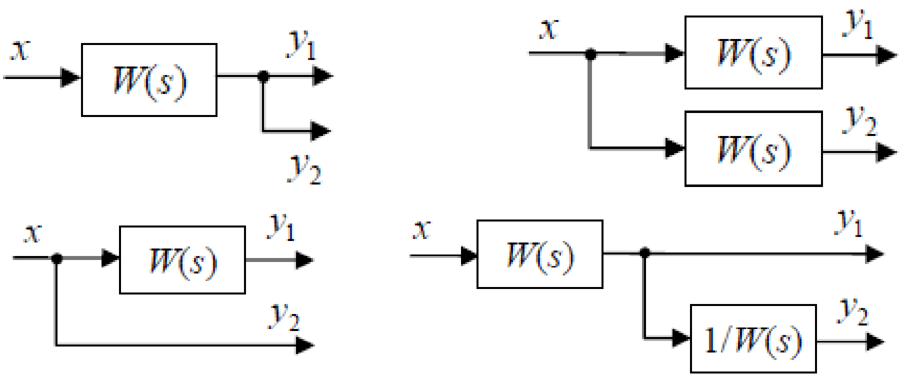
Если обратная связь – положительная (сигналы *x* и *f* складываются), в знаменателе будет стоять знак «минус»:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}$$

5. Перенос динамического звена через сумматор



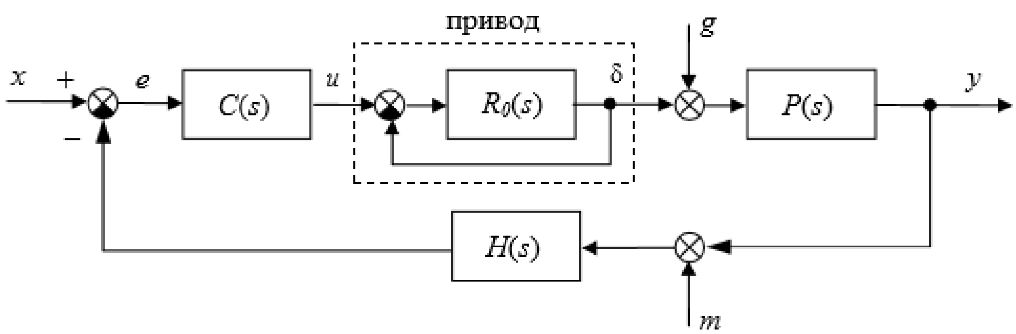
6. Перенос динамического звена через точку ответвления



Для предупреждения ошибок следует вычерчивать структурную схему после каждого этапа преобразований и указывать на ней значения или символы вводимых эквивалентных звеньев.

Пример преобразования структурной схемы

Дана структурная схема (рис.2.3), состоящая из четырех динамических звеньев, соединенных определенным образом.



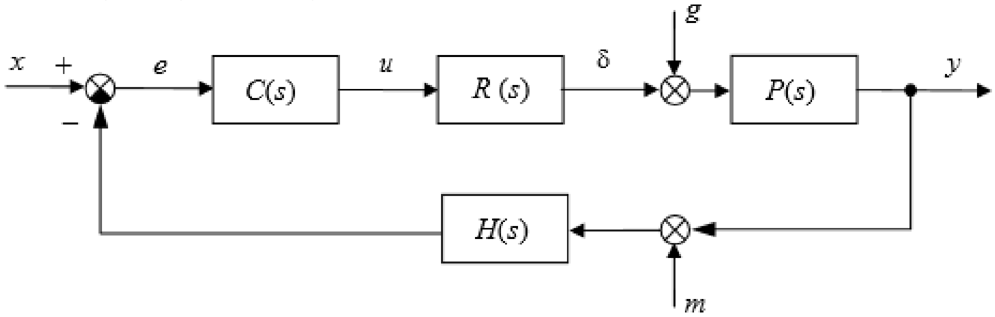
x - входной сигнал; y – выходной сигнал; g, m – возмущающие воздействия; e, u, δ - сигналы с выходов определенных звеньев, C(s), R_0(s), P(s), H(s) – передаточные функции динамических звеньев.

Рис 2.3 - Структурная схема (пример)

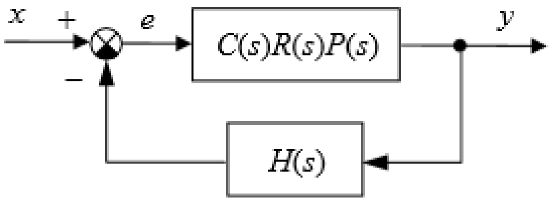
Сначала найдем полную передаточную функцию привода (обведенного штриховой рамкой), используя формулу для контура с отрицательной обратной связью (пункт 3 правил эквивалентных преобразований):

$$R(s) = \frac{R_0(s)}{1 + R_0(s)}$$

Получаем следующую схему:



Теперь найдем передаточные функции от входа x ко всем выходам. Для этого все остальные входы будем считать нулевыми и удалим со схемы. Кроме того, заменим последовательное соединение звеньев с передаточными функциями на одно звено (пункт 1 правил эквивалентных преобразований).



Для получения окончательного результата снова используем формулу для контура с отрицательной обратной связью:

$$W(s) = \frac{C(s)R(s)P(s)}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}$$

2.2 Анализ систем управления на устойчивость

Под устойчивостью САУ понимают свойство системы возвращаться в прежнее состояние равновесия после вывода ее из этого состояния и окончания действия возмущающего или задающего деяния.

В контрольной работе рассмотрим устойчивость линейных систем *(к линейным относятся системы, состоящие из элементов описания, которые задаются линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями*) по критерию Гурвица и критерию Найквиста.

Для исследования устойчивости линейной системы достаточно найти корни ее характеристического полинома. Если все корни имеют отрицательные вещественные части (находятся в левой полуплоскости, слева от мнимой оси), такой полином называется устойчивым, потому что соответствующая линейная система устойчива. Полиномы, имеющие хотя бы один корень с положительной вещественной частью (в правой полуплоскости) называются неустойчивыми.

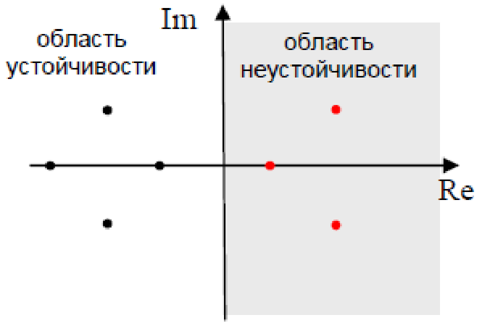


Рис 2.4 – Корни характеристического уравления на комплексной плоскости для устойчивой САУ (слева) и неустойчивой САУ (справа)

Алгебраический критерий устойчивости - критерий Гурвица

Данный критерий разработан немецким математиком Адольфом Гурвицем в 1895г и не требует вычисления корней характеристического уравнения.

Критерий Гурвица – использует матрицу H_n размером n×m, составленную из коэффициентов полинома Δ(s) следующим образом:

- первая строка матрицы содержит коэффициенты a_1, a_3, a_5 и т.д. (все с нечетными номерами), оставшиеся элементы заменяются нулями;

- вторая строка содержит коэффициенты a_0, a_2, a_4 и т.д. (все с четными номерами);

- третья и четвертая строка получается со сдвигом первой и второй строк на 1 позицию вправо и т.д.

Для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица были положительны.

Например, нам задан полином $a_0p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + a_5 = 0$ для которого составим матрицу.

$$H_5 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} \qquad a_0 > 0$$

Для устойчивости систем необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы и определитель Δ_{n-1} были положительными.

$$D_2 = a_1 > 0,\ D_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} > 0,\ D_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} > 0,\ D_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix} > 0$$

Так как все четыре определителя положительные, можно сделать вывод об устойчивости САУ.

Методика определения устойчивости САУ по критерию Гурвица

1. Определить корни характеристического уравнения;

2. Необходимое условие устойчивости системы автоматического управления: все корни характеристического уравнения должны быть левыми (располагаться во второй или третьей четвертях координатной плоскости);

3. Составить определители Гурвица согласно правила по характеристическому уравнению;

4. Вычислить все определители;

5. Для устойчивой ситемы все определителя должны быть больше нуля.

Частотный критерий устойчивости САУ - критерий Найквиста

Критерий Найквиста (графоаналитический метод) позволяет определить устойчивость замкнутой системы, построив частотную характеристику АФЧХ W(jω) разомкнутой системы (методика расчета и построения частотных характеристик представлена в контрольной работе №1 задача №2).

Для каждой частоты ω значение W(jω) – это комплексное число, которое можно изобразить точкой на комплексной плоскости. При изменении частоты от 0 до ∞ из этих точек складывается годограф Найквиста – некоторая кривая, которая начинается в точке (K; 0) на вещественной оси и заканчивается в начале координат (если W(s) – строго правильная функция, то есть степень ее числителя меньше степени знаменателя). Можно доказать, что **система устойчива тогда и только тогда, когда годограф W(jω) не охватывает точку (−1; 0) .**

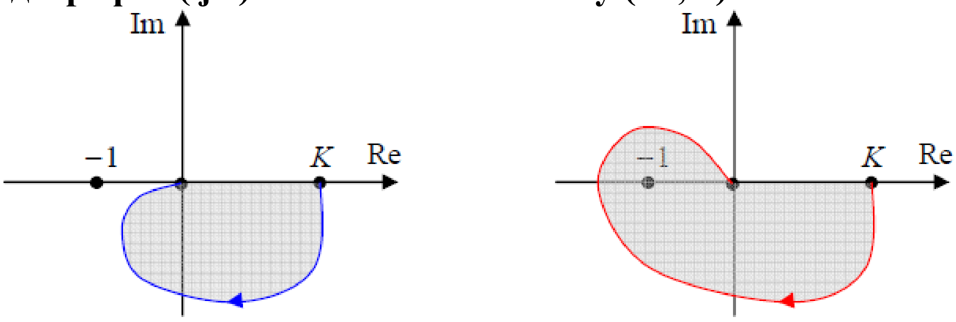


Рис 2.5– годограф Найквиста

На рисунке слева годограф не охватывает точку (−1; 0) (замкнутая система устойчива), а на рисунке справа – охватывает (система неустойчива).

Выражение «система находится на границе устойчивости» означает, что частотная характеристика проходит через точку (−1; 0) . В этом случае для некоторой частоты ω мы имеем A(ω) =1 и φ (ω) = −180° . Это говорит о том, что после прохождения контура величина сигнала меняет знак, сохраняя абсолютную величину (энергию), то есть устанавливаются незатухающие колебания.

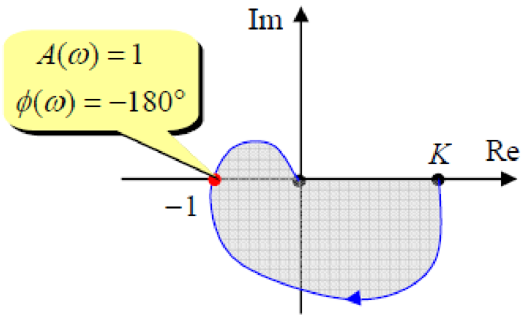


Рис 2.6 - АФЧХ системы, находящейся на границе устойчивости

Если передаточная функция W(s) имеет полюса в точке s = 0 (то есть обращается в бесконечность в этой точке), ситуация усложняется. Теперь годограф начинается не на вещественной оси, а приходит из бесконечности (см. рисунок ниже). **Тогда в контур необходимо включить не только полученную кривую, но и часть окружности бесконечного радиуса от вещественной оси до годографа в порядке обхода по часовой стрелке.** Если функция W(s) имеет k полюсов в точке s = 0, нужно добавить k секторов по 90° . На рисунках показаны годографы Найквиста устойчивых систем, в которых функция W(s) имеет соответственно 1 и 2 полюса в точке s = 0. Эти годографы не охватывают точку (−1; 0) .

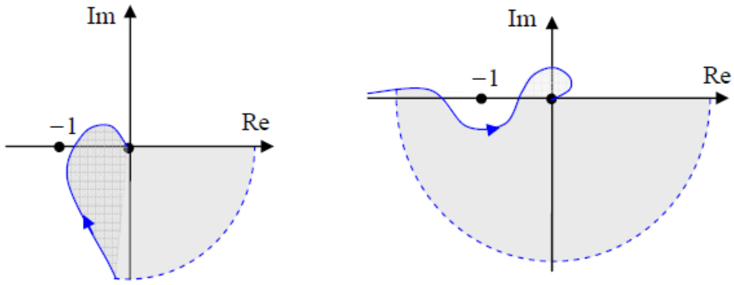


Рис 2.7– Годографы устойчивых систем в которых функция W(s) имеет соответственно 1 и 2 полюса в точке s = 0

Методика определения устойчивости САУ по критерию Найквиста

1. Из заданной структурной схеме необходимо выписать передаточную функцию САУ без учета цепи обратной связи;
2. Определить корни характеристического уравнения (знаменатель приравнять к нулю). Если все корни имеют отрицательные вещественные части (находятся в левой полуплоскости, слева от мнимой оси), такой полином называется устойчивым, потому что соответствующая линейная система устойчива. Полиномы, имеющие хотя бы один корень с положительной вещественной частью (в правой полуплоскости) называются неустойчивыми;
3. Рассчитать и построить АФЧХ системы (см. контрольную работу №1 задача №2);
4. Отметить на построенной АФЧХ точку (−1; 0);
5. Система устойчива тогда и только тогда, когда годограф W(jω) не охватывает точку (−1; 0);
6. Если АФЧХ начинается не на вещественной оси, а приходит из бесконечности, смотреть методику, представленную выше.

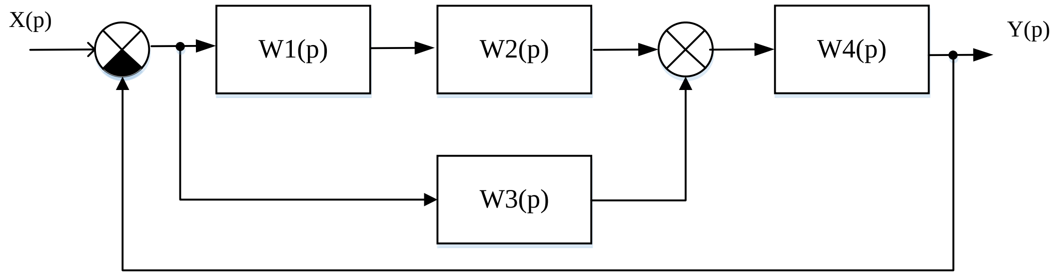
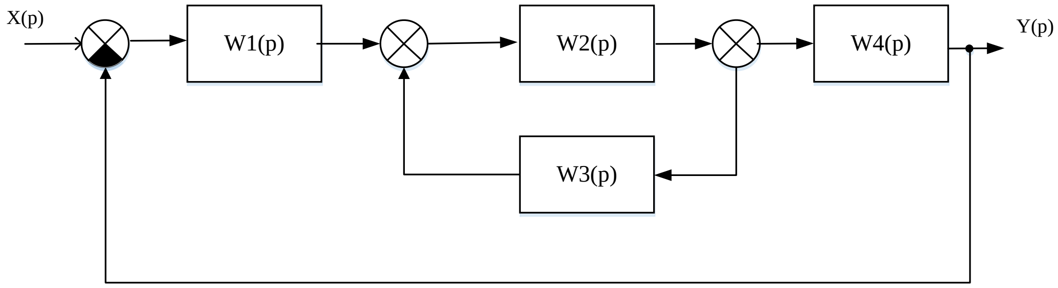
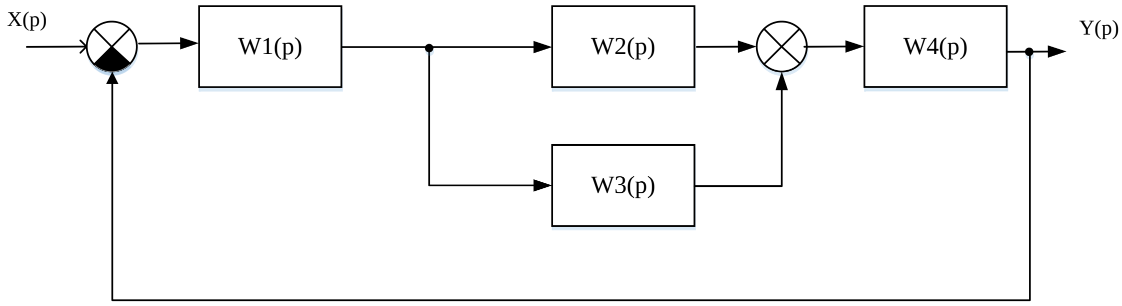
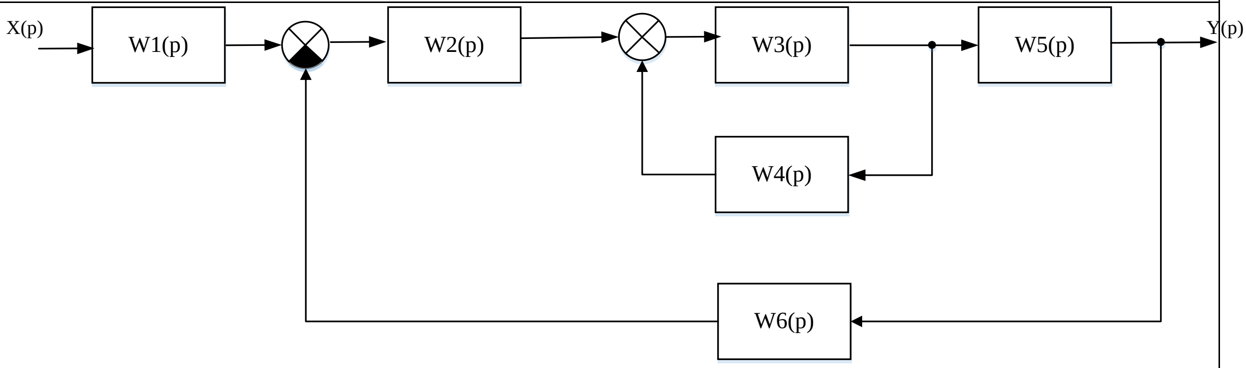
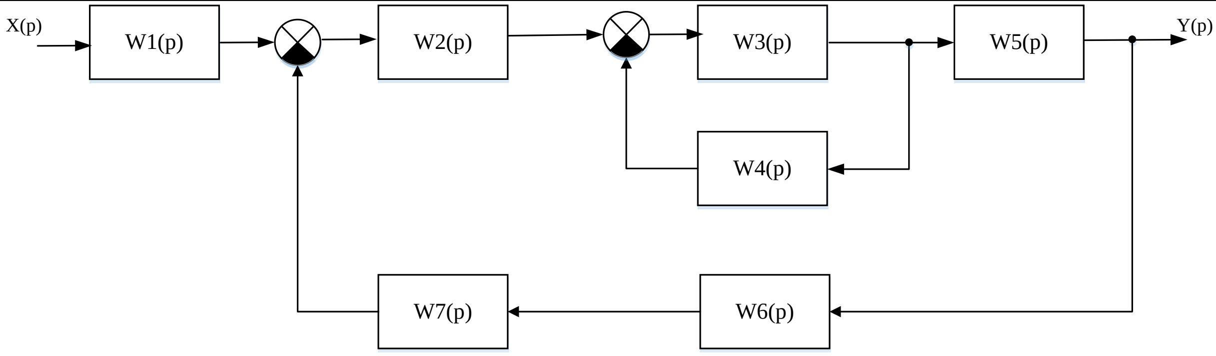
Задания для контрольной работы №2

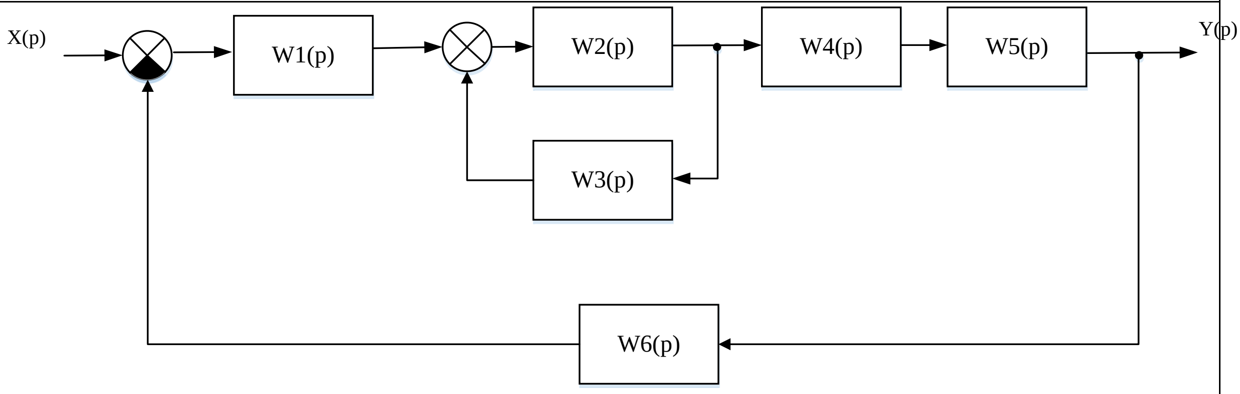
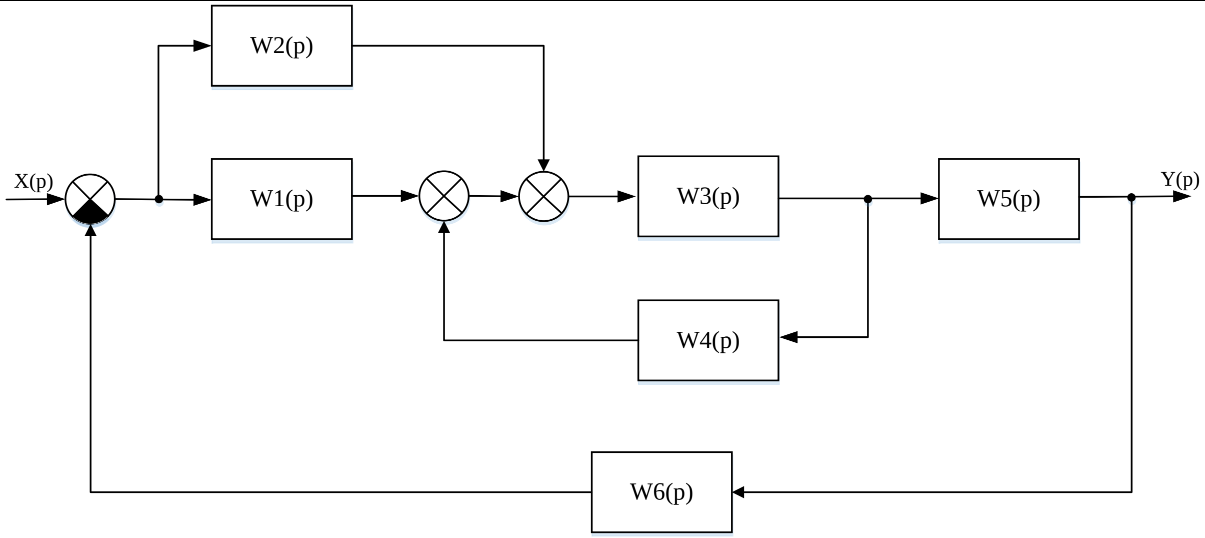
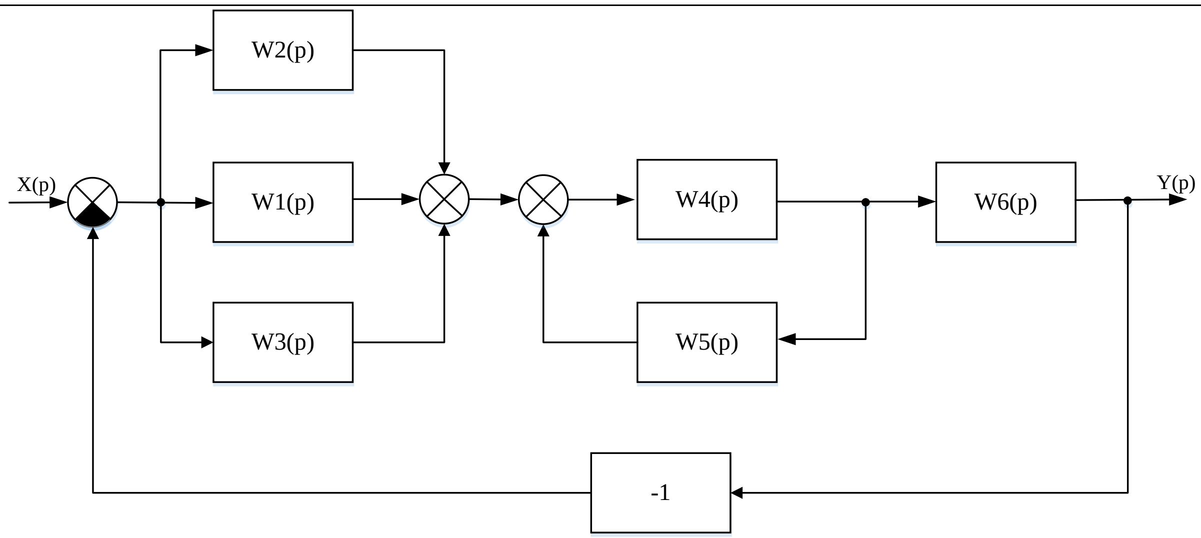
2.3 Задача №1 Найти передаточную функцию системы по ее структурной схеме *(Вариант выбирается согласно последней цифры шифра)*

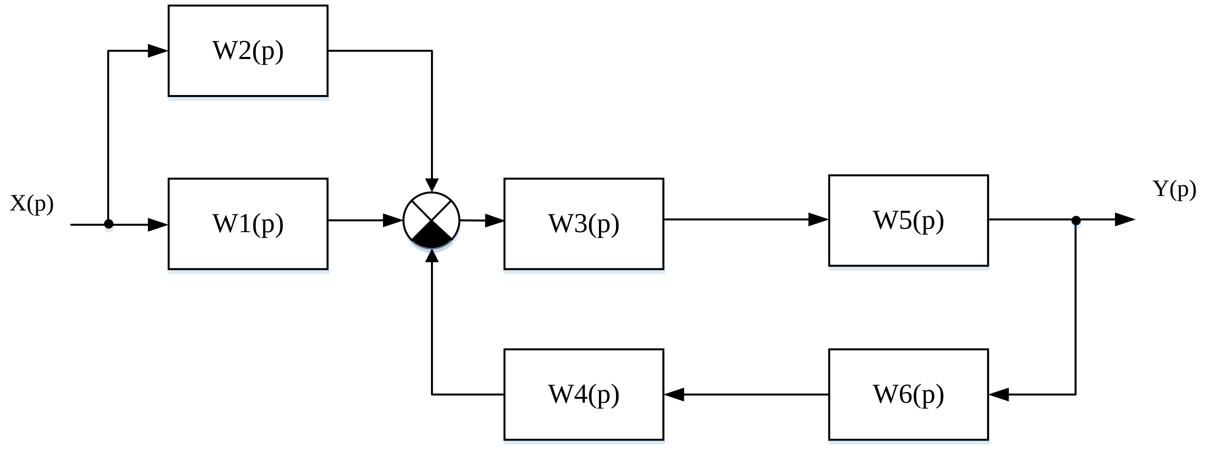
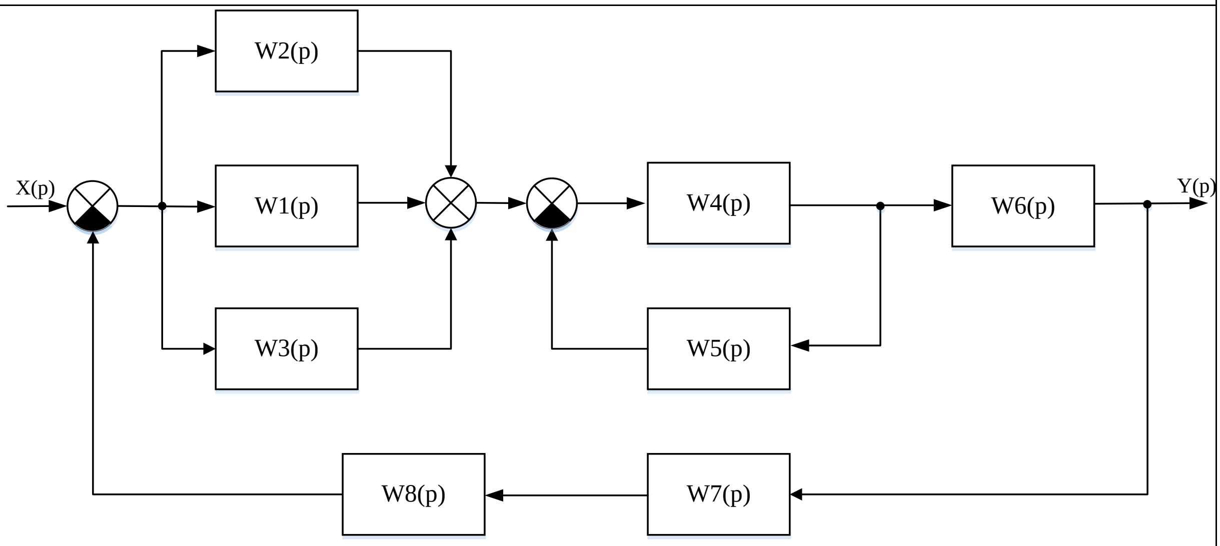
Исходные данные для задачи №1 представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Исходные данные

Вариант	Структурная схема САР
0	
1	
2	
3	
4	

Вариант	Структурная схема САР
5	
6	
7	

Вариант	Структурная схема САР
8	
9	

2.2 Задача №2 Проверить систему на устойчивость. Исследовать устойчивость системы с помощью критерия Гурвица. *(Вариант выбирается согласно предпоследней цифре шифра).*

Исходные данные для задачи №2 представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Исходные данные

Вариант	Передаточная функция
0	$W(p) = \dfrac{-2}{p^3 + 3p^2 + 9p + 10}$
1	$W(p) = \dfrac{5}{p^3 + 5p^2 + 2p + 20}$
2	$W(p) = \dfrac{10}{p^3 + 5p^2 + 2p + 20}$
3	$W(p) = \dfrac{10}{p^3 + 4p^2 + 4p + 1}$
4	$W(p) = \dfrac{12}{(p+1)(p^2 + 2p + 1)}$

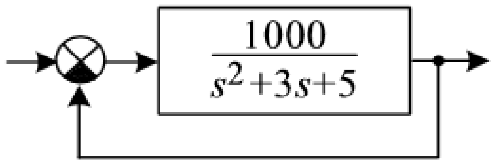
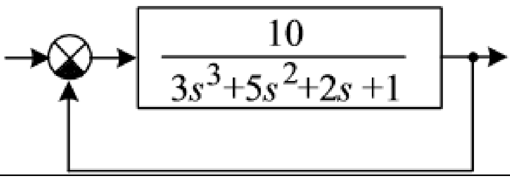
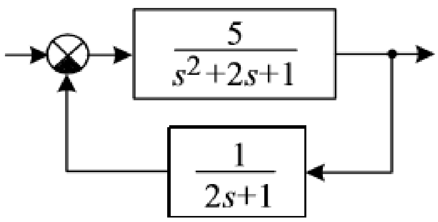
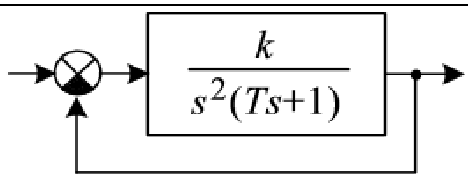
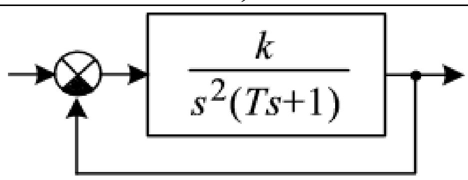
Вариант	Передаточная функция
5	$W(p) = \dfrac{5}{(p^2+4)(p+2)}$
6	$W(p) = \dfrac{1}{(2p+3)(p^2+2p+1)}$
7	$W(p) = \dfrac{5}{(p^3+4)(p+2)}$
8	$W(p) = \dfrac{5p}{p(5p+1)(3p+1)}$
9	$W(p) = \dfrac{15p+1}{p(0{,}01p^2+0{,}8p+1)}$

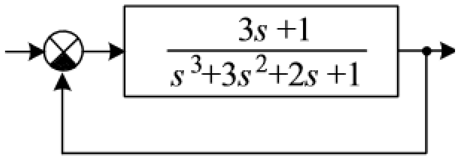
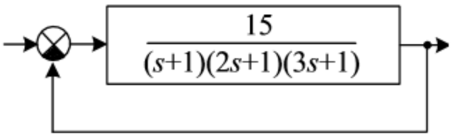
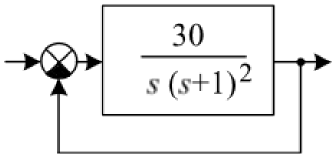
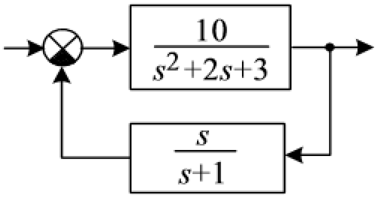
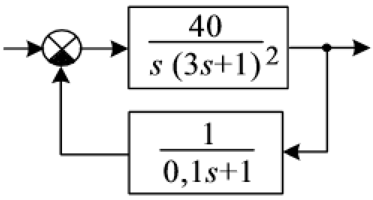
***2.3* Задача №3 Проверить систему на устойчивость. Исследовать устойчивость системы с помощью критерия Найквиста.** *(Вариант выбирается согласно последней цифре шифра).*

Исходные данные для задачи 3 представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Исходные данные

Вариант	Операторно-структурная схема
0	
1	
2	
3	 K=7, T=1
4	 K=5, T=2

Вариант	Операторно-структурная схема
5	
6	
7	
8	
9	

Контрольные вопросы к контрольной работе №2

1. Перечислите правила преобразования структурных схем (на примере);
2. Нули и полюсы передаточной функции: назначение, способы получения
3. Устойчивость это?
4. Необходимое (но не достаточное) условие устойчивости системы;
5. Критерий устойчивости Гурвица;
6. Критерий устойчивости Найквиста;
7. Методы повышения устойчивости системы.

Библиографический список

1. Теория автоматического упарвления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – Изд. 4-е перераб. И доп. – СПб, Изд-во «Профессия», 2003. – 752с.
2. К.Ю. Поляков. Теория автоматического управления для чайников. Санкт – Петербург, 2008г. – 80с.
3. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288С.
4. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001 – 616 с.: ил.