

Министерство образования и науки Российской Федерации  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Тамбовский государственный технический университет»**

# **МЕТРОЛОГИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ**

Методические указания к практическим занятиям  
для студентов заочной формы обучения  
специальностей 140106, 190601, 200402, 200503  
и направлений 100100, 110800, 140100, 140400, 151900, 190600, 190700,  
200500, 220600, 230400, 240700, 261700 подготовки бакалавров



---

Тамбов  
• Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ» •  
2011

УДК 53.088(076)  
ББК Ж10я73-5  
М546

Рецензент

доктор технических наук, доцент ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
заведующий кафедрой «Технология машиностроения,  
металлорежущие станки и инструменты»

*М.В. Соколов*

Составители:

*С.В. Пономарев, Г.В. Шишкина, М.Ю. Серегин,  
Г.В. Мозгова, А.П. Савенков*

М546 Метрология и сертификация : методические указания к практическим занятиям / сост. : С.В. Пономарев, Г.В. Шишкина, М.Ю. Серегин, Г.В. Мозгова, А.П. Савенков. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 56 с. – 50 экз.

Даны методические указания к практическим занятиям. Приведены подробные примеры решения задач, связанных с нахождением погрешностей, обработкой результатов многократных равноточных наблюдений, а также основные сведения о взаимозаменяемости.

Предназначены для студентов заочной формы обучения специальностей 140106, 190601, 200402, 200503 и направлениям 100100, 110800, 140100, 140400, 151900, 190600, 190700, 200500, 220600, 230400, 240700, 261700. Будут полезны для студентов других специальностей и направлений подготовки очной и заочной форм обучения, учебным планом которых предусмотрено изучение дисциплины «Метрология и сертификация». Разработаны с учётом Федеральных государственных образовательных стандартов.

УДК 53.088(076)  
ББК Ж10я73-5

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2011

## **ВЫЧИСЛЕНИЕ АБСОЛЮТНЫХ, ОТНОСИТЕЛЬНЫХ И ПРИВЕДЁННЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ**

*Цель занятия:* получить практические навыки решения задач на вычисление абсолютных, относительных, приведённых погрешностей и вариации показаний приборов.

*Задание.* Решить задачи, номера которых приведены в табл. 1.2, согласно полученному варианту.

### **Методические указания**

Перед началом практического занятия следует изучить материал темы 1.8.1 учебника [1] или соответствующие разделы дополнительной литературы [2, 7 – 9].

### **Пример решения задачи**

**Задача 1.1.** Вольтметром со шкалой (0...100) В, имеющим абсолютную погрешность  $\Delta V = 1$  В, измерены значения напряжения 0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 В. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

#### ***Решение.***

Для записи результатов формируем таблицу (табл. 1.1), в столбцы которой будем записывать измеренные значения  $V$ , абсолютные  $\Delta V$ , относительные  $\delta V$  и приведённые  $\gamma V$  погрешности.

В первый столбец записываем заданные в условии задачи измеренные значения напряжения: 0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 В.

Значение абсолютной погрешности известно из условий задачи ( $\Delta V = 1$  В) и считается одинаковым для всех измеренных значений напряжения; это значение заносим во все ячейки второго столбца.

Значения относительной погрешности будем рассчитывать по формуле

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} \cdot 100\%.$$

При  $V = 0$  В получаем  $\delta V = \frac{1 \text{ В}}{0 \text{ В}} \cdot 100\% \rightarrow \infty.$

При  $V = 10$  В получаем  $\delta V = \frac{1 \text{ В}}{10 \text{ В}} \cdot 100\% = 10\%.$

Значения относительной погрешности для остальных измеренных значений напряжения рассчитываются аналогично.

Полученные таким образом значения относительной погрешности заносим в третий столбец.

Для расчёта значений приведённой погрешности будем использовать формулу:

$$\gamma V = \frac{\Delta V}{V_N} \cdot 100\%.$$

Предварительно определим нормирующее значение  $V_N$ .

Так как диапазон измерений вольтметра – (0...100) В, то шкала вольтметра содержит нулевую отметку, следовательно, за нормирующее значение принимаем размах шкалы прибора, т.е.

$$V_N = |100 \text{ В} - 0 \text{ В}| = 100 \text{ В}.$$

Так как величины  $\Delta V$  и  $V_N$  постоянны при любых измеренных значениях напряжения, то величина приведённой погрешности так же постоянна и составляет  $\gamma V = \frac{1 \text{ В}}{100 \text{ В}} \cdot 100\% = 1\%$ . Это значение заносим во все

ячейки четвёртого столбца.

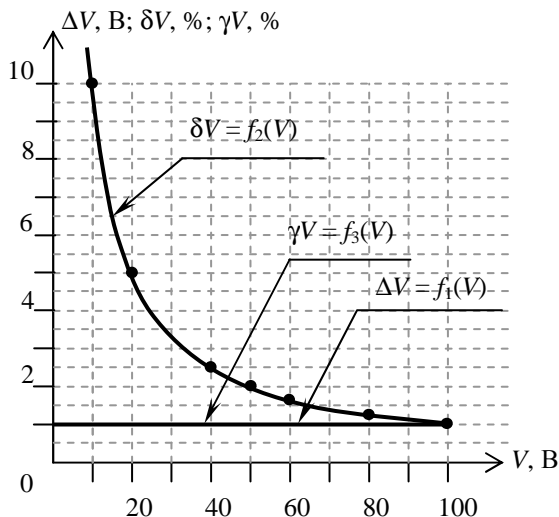
По данным табл. 1.1 строим графики зависимостей абсолютной  $\Delta V$ , относительной  $\delta V$  и приведённой  $\gamma V$  погрешностей от результата измерений  $V$  (рис. 1.1).

В данном случае графики зависимостей абсолютной и приведённой погрешностей сливаются друг с другом и представляют собой горизонтальные прямые линии. График зависимости относительной погрешности представляет собой гиперболу.

**Внимание:** так как диапазон измерений прибора – (0...100) В, то за пределы этого диапазона построенные графики не должны выходить.

### 1.1. Результаты расчёта значений погрешностей

$V, \text{ В}$	$\Delta V, \text{ В}$	$\delta V, \%$	$\gamma V, \%$
1	2	3	4
0	1	$\infty$	1
10	1	10,00	1
20	1	5,00	1
40	1	2,50	1
50	1	2,00	1
60	1	1,67	1
80	1	1,25	1
100	1	1,00	1



**Рис. 1.1.** Графики зависимостей абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Омметром со шкалой (0...1000) Ом измерены значения 0; 100; 200; 400; 500; 600; 800; 1000 Ом. Определить значения абсолютной и относительной погрешностей, если приведённая погрешность равна 0,5. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 2.** Амперметром со шкалой (0...50) А, имеющим относительную погрешность  $\delta I = 2\%$ , измерены значения силы тока 0; 5; 10; 20; 25; 30; 40; 50 А. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 3.** Вольтметром со шкалой (0...50) В, имеющим приведённую погрешность  $\gamma V = 2\%$ , измерены значения напряжения 0; 5; 10; 20; 40; 50 В. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 4.** Кислородомером со шкалой (0...25) % измерены следующие значения концентрации кислорода: 0; 5; 10; 12,5; 15; 20; 25%. Определить значения абсолютной и относительной погрешностей, если приведённая погрешность равна 2%. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 5.** Расходомером со шкалой (0...150) м<sup>3</sup>/ч, имеющим относительную погрешность  $\delta Q = 2\%$ , измерены значения расхода 0; 15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; 120; 135; 150 м<sup>3</sup>/ч. Рассчитать зависимости абсолютной,

относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 6.** Уровнемером со шкалой (5...10) м, имеющим приведенную погрешность  $\gamma H = 1\%$ , измерены значения уровня 5; 6; 7; 8; 9; 10 м. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 7.** Омметром со шкалой (0...20) кОм измерены значения 0; 1; 4; 5; 10; 12; 17; 20 кОм. Определить значения абсолютной и относительной погрешностей, если приведённая погрешность  $\gamma R$  равна 1%. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 8.** Амперметром со шкалой (0...150) А, имеющим относительную погрешность  $\delta I = 4\%$ , измерены значения силы тока 0; 20; 50; 70; 100; 120; 140; 150 А. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 9.** Вольтметром со шкалой (0...100) мВ, имеющим приведенную погрешность  $\gamma V = 2\%$ , измерены значения напряжения 0; 10; 20; 40; 50; 70; 90; 100 мВ. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 10.** Кислородомером со шкалой (0...50) % измерены следующие значения концентрации кислорода: 0; 5; 10; 15; 20; 30; 40; 50%. Определить значения абсолютной и относительной погрешностей, если приведённая погрешность равна 0,5%. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 11.** Расходомером со шкалой (0...230) м<sup>3</sup>/ч, имеющим относительную погрешность  $\delta Q = 6\%$ , измерены значения расхода 0; 30; 40; 60; 90; 100; 150; 180; 200; 230 м<sup>3</sup>/ч. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 12.** Уровнемером со шкалой (1...20) м, имеющим приведенную погрешность  $\gamma H = 1\%$ , измерены значения уровня 1; 6; 8; 10; 14; 16; 18; 20 м. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 13.** Мегомметром со шкалой (0...150) МОм измерены следующие значения сопротивления: 0; 15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; 120; 135; 150 МОм. Определить значения абсолютной и приведённой погрешностей, если относительная погрешность равна 2,5%. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 14.** Амперметром со шкалой (0...50) А, имеющим приведенную погрешность  $\gamma I = 0,2\%$ , измерены значения силы тока 0; 5; 10; 20; 25;

30; 40; 50 А. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 15.** Вольтметром со шкалой (–50...50) В, имеющим приведённую погрешность  $\gamma V = 2\%$ , измерены значения напряжения –50; –40; –20; 0; 20; 40; 50 В. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 16.** Кислородомером со шкалой (0...25) % измерены следующие значения концентрации кислорода: 0; 5; 10; 12,5; 15; 20; 25%. Определить значения абсолютной и приведённой погрешностей, если относительная погрешность  $\delta s$  равна 4%. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 17.** Расходомером со шкалой (0...50) м<sup>3</sup>/ч, имеющим абсолютную погрешность  $\Delta Q = 1$  м<sup>3</sup>/ч, измерены значения расхода 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 40; 50 м<sup>3</sup>/ч. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 18.** Уровнемером со шкалой (0...10) м, имеющим приведённую погрешность  $\gamma H = 4\%$ , измерены значения уровня 0; 5; 6; 7; 8; 9; 10 м. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 19.** Омметром со шкалой (0...5000) Ом измерены значения 0; 500; 800; 1000; 1500; 2500; 3500; 4500; 5000 Ом. Определить значения приведённой и относительной погрешностей, если абсолютная погрешность  $\Delta R$  равна 25 Ом. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 20.** Термометром со шкалой (–50...70) °С, имеющим абсолютную погрешность  $\Delta T = 1$  °С, измерены значения температуры –50; –40; –20; –10; 0; 10; 20; 50; 70 °С. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 21.** Вольтметром со шкалой (–100...–10) В, имеющим приведённую погрешность  $\gamma V = 1\%$ , измерены значения напряжения –100; –80; –50; –30; –20; –15; –10 В. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 22.** Манометром со шкалой (0...0,25) МПа измерены значения избыточного давления 0; 0,02; 0,06; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25 МПа. Определить значения абсолютной и относительной погрешностей, если приведённая погрешность манометра равна 1,5%. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 23.** Расходомером со шкалой (0...100) м<sup>3</sup>/ч, имеющим относительную погрешность  $\delta Q = 2,5\%$ , измерены значения расхода 0; 20; 30; 40; 60; 70; 80; 90; 100 м<sup>3</sup>/ч. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 24.** Уровнемером со шкалой (5...50) м, имеющим абсолютную погрешность  $\Delta H = 0,5$  м, измерены значения уровня: 5; 10; 15; 20; 25; 30; 40; 50 м. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Задача 25.** Термометром со шкалой (-50...0) °С, имеющим относительную погрешность  $\delta T = 1,5\%$ , измерены значения температуры -50; -45; -40; -30; -20; -10; 0 °С. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

## 1.2. Варианты заданий к практическому занятию № 1

№ варианта	№№ задач для решения	№ варианта	№№ задач для решения	№ варианта	№№ задач для решения	№ варианта	№№ задач для решения
1	1, 17, 25	6	6, 12, 20	11	3, 13, 22	16	8, 17, 23
2	2, 16, 24	7	7, 11, 19	12	4, 12, 23	17	4, 9, 18,
3	3, 15, 23	8	8, 10, 18	13	5, 14, 24	18	3, 10, 19
4	4, 14, 22	9	9, 1, 17	14	6, 15, 25	19	2, 11, 20
5	5, 13, 21	10	2, 15, 25	15	1, 7, 16	20	1, 12, 21

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение следующих терминов:
  - измерение, единство измерений;
  - физическая величина, единица измерения физической величины;
  - погрешность, абсолютная погрешность, относительная погрешность, приведённая погрешность.
2. Какие значения может принимать физическая величина?
3. Что называется «нормирующим значением»?
4. Поясните на примере, как находится нормирующее значение, в случае если шкала средства измерения содержит нулевую отметку.
5. Поясните на примере, как находится нормирующее значение, в случае если шкала средства измерения не содержит нулевую отметку.



6. Запишите формулы для расчёта относительной и приведённой погрешностей.

7. Как находится вариация средств измерений?

8. Поясните на примере, как определяется абсолютная, относительная и приведённая вариация средства измерения.

## *Практическое занятие № 2*

### **ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ ЗАДАНИЯ КЛАССОВ ТОЧНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ**

*Цель занятия:* получить практические навыки решения задач на вычисление погрешностей при различных способах задания классов точности приборов.

*Задание.* Решить задачи, номера которых приведены в табл. 2.4, согласно полученному варианту.

#### **Методические указания**

Перед началом практического занятия следует изучить материал темы 1.8.2 учебника [1] или соответствующие разделы дополнительной литературы [2, 7 – 9].

#### **Пример решения задачи**

**Задача 2.1.** Амперметром класса точности 2.0 со шкалой (0...50) А измерены значения тока 0; 5; 10; 20; 25; 30; 40; 50 А. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой основных погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

#### ***Решение.***

Для записи результатов формируем таблицу (табл. 2.1), в столбцы которой будем записывать измеренные значения  $I$ , абсолютные  $\Delta I$ , относительные  $\delta I$  и приведённые  $\gamma I$  погрешности.

В первый столбец записываем заданные в условии задачи измеренные значения тока: 0; 5; 10; 20; 25; 30; 40; 50 А.

Класс точности амперметра задан числом без кружка, следовательно, приведённая погрешность, выраженная в процентах, во всех точках шкалы не должна превышать по модулю класса точности, т.е.  $|\gamma I| \leq 2\%$ .

При решении задачи рассмотрим худший случай  $|\gamma I| = 2\%$ , когда приведённая погрешность принимает максимальное по абсолютной величине значение, что соответствует  $\gamma I = +2\%$  и  $\gamma I = -2\%$ .

Данные значения приведённой погрешности заносим в четвёртый столбец табл. 2.1.

## 2.1. Результаты расчёта значений погрешностей

$I, A$	$\Delta I, A$	$\delta I, \%$	$\gamma I, \%$
1	2	3	4
0	$\pm 1$	$\pm \infty$	$\pm 2$
5	$\pm 1$	$\pm 20$	$\pm 2$
10	$\pm 1$	$\pm 10$	$\pm 2$
20	$\pm 1$	$\pm 5$	$\pm 2$
25	$\pm 1$	$\pm 4$	$\pm 2$
30	$\pm 1$	$\pm 3,33$	$\pm 2$
40	$\pm 1$	$\pm 2,5$	$\pm 2$
50	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 2$

Рассчитаем значения абсолютной погрешности.

Из формулы  $\gamma I = \frac{\Delta I}{I_N} \cdot 100\%$  выражаем абсолютную погрешность

$\Delta I = \frac{\gamma I \cdot I_N}{100\%}$ . За нормирующее значение  $I_N$  принимаем размах шкалы, так как

шкала амперметра содержит нулевую отметку, т.е.  $I_N = |50 A - 0 A| = 50 A$ .

Абсолютная погрешность равна  $\Delta I = \frac{\pm 2\% \cdot 50 A}{100\%} = \pm 1 A$  во всех точ-

ках шкалы прибора. Заносим данное значение во второй столбец таблицы.

Значения относительной погрешности будем рассчитывать по формуле

$$\delta I = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\%.$$

При  $I = 0 A$  получаем  $\delta I = \frac{\pm 1 A}{0 A} \cdot 100\% \rightarrow \pm \infty$ . При  $I = 5 A$  получаем

$$\delta I = \frac{\pm 1 A}{5 A} \cdot 100\% = \pm 20\%.$$

Значения относительной погрешности для остальных измеренных значений тока рассчитываются аналогично.

Полученные таким образом значения относительной погрешности заносим в третий столбец.

По данным табл. 2.1, учитывая, что погрешности могут быть как положительными, так и отрицательными, строим графики зависимостей абсолютной  $\Delta I$ , относительной  $\delta I$  и приведённой  $\gamma I$  погрешностей от результата измерений  $I$  (рис. 2.1).

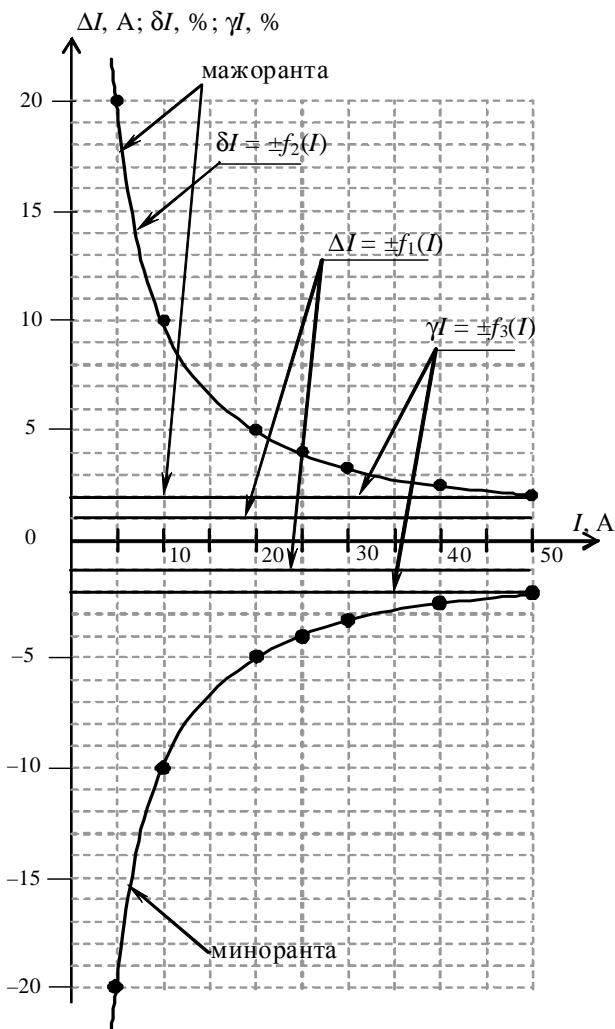


Рис. 2.1. Графики зависимостей абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений для прибора с преобладающими аддитивными погрешностями

**Задача 2.2.** Вольтметром класса точности  $\textcircled{0.5}$  со шкалой (0...100) В измерены значения напряжения 0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 В. Рассчитать зависимости абсолютной и относительной погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

### Решение.

Для записи результатов формируем таблицу (табл. 2.2), в столбцы которой будем записывать измеренные значения  $V$ , абсолютные  $\Delta V$  и относительные  $\delta V$  погрешности.

#### 2.2. Результаты расчёта значений погрешностей

$V, \text{В}$	$\Delta V, \text{В}$	$\delta V, \%$	$V, \text{В}$	$\Delta V, \text{В}$	$\delta V, \%$
1	2	3	1	2	3
0	0	0,5	50	0,25	0,5
10	0,05	0,5	60	0,3	0,5
20	0,1	0,5	80	0,4	0,5
40	0,2	0,5	100	0,5	0,5

В первый столбец записываем заданные в условии задачи измеренные значения тока: 0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 В.

Класс точности вольтметра задан числом в кружке, следовательно, относительная погрешность, выраженная в процентах, во всех точках шкалы не должна превышать по модулю класса точности, т.е.  $|\delta V| \leq 0,5\%$ .

При решении задачи рассмотрим худший случай, т.е.  $|\delta V| = 0,5\%$ , что соответствует значениям  $\delta V = +0,5\%$  и  $\delta V = -0,5\%$

*Примем во внимание опыт решения задачи 2.1, из которого видно, что результаты вычисления, выполненные для положительных и отрицательных значений погрешностей, численно совпадают друг с другом и отличаются только знаками «+» или «-». Поэтому дальнейшие вычисления будем производить только для положительных значений относительной погрешности  $\delta V = 0,5\%$ , но при этом будем помнить, что все значения второго и третьего столбцов табл. 2.2 могут принимать и отрицательные значения.*

Значение относительной погрешности  $\delta V = 0,5\%$  заносим в третий столбец таблицы.

Рассчитаем значения абсолютной погрешности.

Из формулы  $\delta V = \frac{\Delta V}{V} \cdot 100\%$  выражаем абсолютную погрешность:

$$\Delta V = \frac{\delta V \cdot V}{100\%}.$$

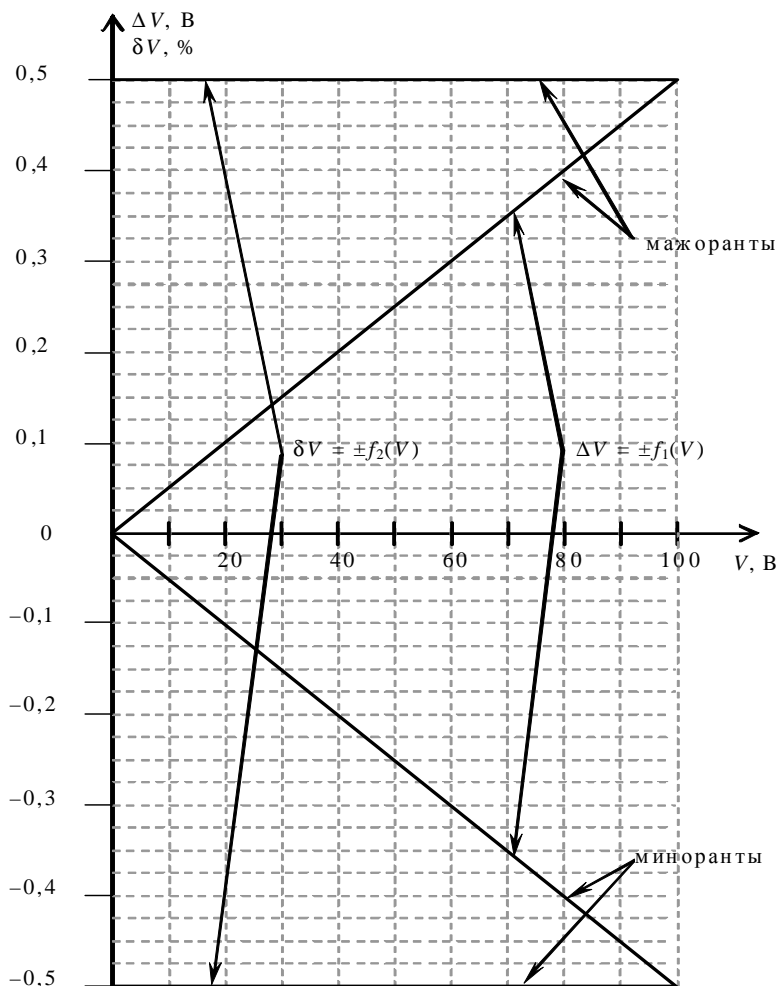
При  $V = 0 \text{ В}$  получаем  $\Delta V = \frac{0,5\% \cdot 0 \text{ В}}{100\%} = 0 \text{ В}$ .

При  $V = 10 \text{ В}$  получаем  $\Delta V = \frac{0,5\% \cdot 10 \text{ В}}{100\%} = 0,05 \text{ В}$ .

Значения абсолютной погрешности для остальных измеренных значений напряжения рассчитываются аналогично.

Полученные таким образом значения абсолютной погрешности заносим во второй столбец.

По данным табл. 2.2, учитывая, что погрешности могут быть как положительными, так и отрицательными, строим графики зависимостей абсолютной  $\Delta V$  и относительной  $\delta V$  погрешностей от результата измерений  $V$  (рис. 2.2).



**Рис. 2.2.** Графики зависимостей абсолютной и относительной погрешностей от результата измерений для прибора с преобладающими мультипликативными погрешностями

**Задача 2.3.** Цифровым омметром класса точности 1.0/0.5 со шкалой (0...1000) Ом измерены значения сопротивления 0; 100; 200; 400; 500; 600; 800; 1000 Ом. Рассчитать зависимости абсолютной и относительной основных погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

**Решение.**

Для записи результатов формируем таблицу (табл. 2.3), в столбцы которой будем записывать измеренные значения  $R$ , абсолютные  $\Delta R$  и относительные  $\delta R$  погрешности.

В первый столбец записываем заданные в условии задачи измеренные значения сопротивления 0; 100; 200; 400; 500; 600; 800; 1000 Ом.

Класс точности вольтметра задан в виде двух чисел, разделённых косой чертой. Следовательно, относительная погрешность, выраженная в процентах, во всех точках шкалы должна удовлетворять следующему соотношению:

$$|\delta R| \leq [a + b \cdot (R_k / R - 1)], \%$$

В данном случае  $a = 1,0$ ;  $b = 0,5$ ;  $R_k = 1000$  Ом, причём параметры этой формулы  $a$  и  $b$  определяются мультипликативной и аддитивной составляющими суммарной погрешности соответственно.

Таким образом, получаем:

$$|\delta R| \leq [1,0 + 0,5 \cdot (|1000/R| - 1)].$$

При решении задачи рассмотрим худший случай

$$|\delta R| = [1,0 + 0,5 \cdot (|1000/R| - 1)],$$

что соответствует значениям  $\delta R = \pm [1,0 + 0,5 \cdot (|1000/R| - 1)]$ .

*Примем во внимание опыт решения задачи 2.1, из которого видно, что результаты вычисления, выполненные для положительных и отрицательных значений погрешностей, численно совпадают друг с другом и отличаются только знаками «+» или «-». Поэтому дальнейшие вычисления будем производить только для положительных значений относительной погрешности*

### 2.3. Результаты расчёта значений погрешностей

$R$ , Ом	$\Delta R$ , Ом	$\delta R$ , %	$R$ , Ом	$\Delta R$ , Ом	$\delta R$ , %
1	2	3	1	2	3
0	5,0	$\infty$	500	7,5	1,500
100	5,5	5,500	600	8,0	1,333
200	6,0	3,000	800	9,0	1,125
400	7,0	1,750	1000	10,0	1,000

$\delta R = [1,0 + 0,5 \cdot (|1000/R| - 1)]$ , но при этом будем помнить, что все значения второго и третьего столбцов табл. 2.3 могут принимать и отрицательные значения.

Рассчитаем значения относительной погрешности.

При  $R = 0$  Ом получаем  $\delta R = [1,0 + 0,5 \cdot (|1000/0| - 1)] \rightarrow \infty$ .

При  $R = 100$  Ом получаем  $\delta R = [1,0 + 0,5 \cdot (|1000/100| - 1)] = 5,5\%$ .

Значения относительной погрешности для остальных измеренных значений сопротивления рассчитываются аналогично.

Полученные значения относительной погрешности заносим в третий столбец табл. 2.3.

Рассчитаем значения абсолютной погрешности.

Из формулы  $\delta R = \frac{\Delta R}{R} \cdot 100\%$  выражаем абсолютную погрешность

$$\Delta R = \frac{\delta R \cdot R}{100\%}$$

При  $R = 0$  Ом получаем  $\Delta R = \frac{\infty \cdot 0}{100\%}$  – неопределённость.

Искомое значение  $\Delta R$  можно определить следующим образом. Так как класс точности прибора задан в виде двух чисел, то у данного прибора аддитивные и мультипликативные погрешности соизмеримы. При  $R = 0$  Ом мультипликативная составляющая погрешность равна нулю, значит, общая погрешность в этой точке обусловлена только аддитивной составляющей. Аддитивную составляющую представляет второе из чисел, задающих класс точности, т.е. в данном случае число  $b = 0,5$ . Это означает, что аддитивная погрешность составляет 0,5% от верхнего предела измерений прибора, т.е. от  $R_k = 1000$  Ом.

Таким образом, при  $R = 0$  имеем

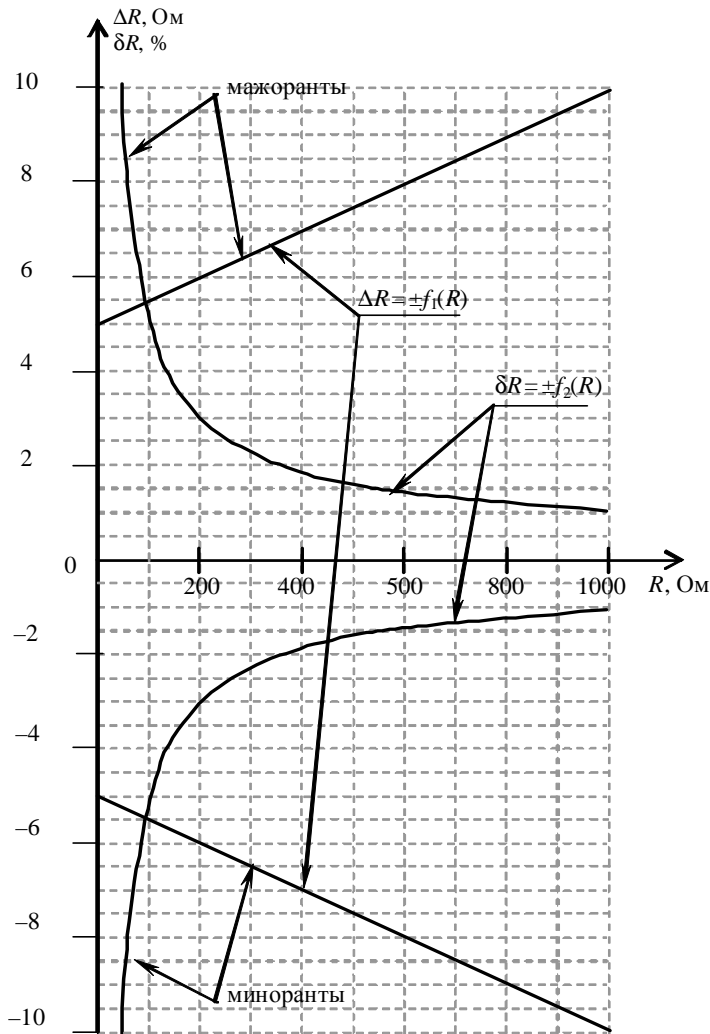
$$\Delta R = \frac{bR_k}{100\%} = \frac{0,5\% \cdot 1000 \text{ Ом}}{100\%} = 5 \text{ Ом.}$$

При  $R = 100$  Ом получаем  $\Delta R = \frac{\delta R \cdot R}{100\%} = \frac{5,5\% \cdot 100 \text{ Ом}}{100\%} = 5,5 \text{ Ом.}$

При  $R = 200$  Ом получаем  $\Delta R = \frac{3\% \cdot 200 \text{ Ом}}{100\%} = 6 \text{ Ом.}$

Значения абсолютной погрешности для остальных измеренных значений сопротивления рассчитываются аналогично. Полученные таким образом значения абсолютной погрешности заносим во второй столбец табл. 2.3.

По данным табл. 2.3, учитывая, что погрешности могут быть как положительными, так и отрицательными, строим графики зависимостей абсолютной  $\Delta R$  и относительной  $\delta R$  погрешностей от результата измерений  $R$  (рис. 2.3).



**Рис. 2.3. Графики зависимостей абсолютной и относительной погрешностей от результата измерений для прибора с соизмеримыми аддитивными и мультипликативными погрешностями**



## Задачи для самостоятельного решения

Для прибора рассчитать значения абсолютных, относительных и приведённых основных погрешностей измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

### 2.4. Исходные данные

№ варианта	№ задачи	Диапазон измерений	Класс точности	Результаты измерений
1	1	(0...10) В	0.1	0; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 10 В
	2	(0...1000) Ом	0.1	0; 100; 200; 400; 500; 600; 800; 1000 Ом
	3	(-100...+100) °C	0.1/0.05	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 °C
2	1	(0...100) мВ	0.6	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 мВ
	2	(0...100) °C	0.5	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 °C
	3	(-5...+5) В	4.0/2.5	0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0 В
3	1	(0...5) А	0.1	0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0 А
	2	(0...100) мВ	0.4	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 мВ
	3	(-10...+10) В	1.5/1.0	0; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 10 В
4	1	(0...100) В	0.2	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 В
	2	(0...10) А	1.5	0; 1; 1,5; 4; 5; 6; 9; 10 А
	3	(-100...+100) °C	0.5/0.25	0; 10; 20; 30; 50; 60; 90; 100 °C
5	1	(0...100) мВ	0.2	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 мВ
	2	(0...100) °C	1	0; 20; 30; 40; 50; 65; 80; 100 °C
	3	(-5...+5) В	1.0/0.5	0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 4,0; 5,0 В
6	1	(0...250) °C	1.5	0; 25; 50; 100; 125; 150; 200; 250 °C
	2	(0...100) мВ	0.6	0; 15; 25; 40; 55; 60; 85; 100 мВ
	3	(-100...+100) °C	4.0/2.5	0; 10; 25; 40; 55; 60; 80; 100 °C

Продолжение табл. 2.4

№ варианта	№ задачи	Диапазон измерений	Класс точности	Результаты измерений
7	1	(0...10) В	0.15	0; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 10 В
	2	(0...1000) Ом	2.5	0; 100; 250; 400; 550; 600; 800; 1000 Ом
	3	(-100...+100) В	2.5/1.5	0; 15; 20; 40; 55; 60; 80; 100 В
8	1	(0...100) мВ	0.25	0; 10; 30; 40; 50; 65; 80; 100 мВ
	2	(0...100) °С	1.5	0; 15; 20; 45; 50; 60; 80; 100 °С
	3	(-5...+5) м	6.0/4.0	0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 3,0; 4,5; 5,0 м
9	1	(0...5) А	2.5	0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,5; 5,0 А
	2	(0...100) мВ	1.0	0; 10; 20; 45; 50; 60; 80; 100 мВ
	3	(-10...+10) В	1.25/0.5	0; 1; 2; 4; 5; 6; 9; 10 В
10	1	(0...100) В	2.0	0; 15; 20; 45; 50; 60; 85; 100 В
	2	(0...10) А	0.4	0; 2; 2,5; 4; 5; 6; 8; 10 А
	3	(-10...+10) В	0.4/0.2	0; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 10 В
11	1	(0...1000) мВ	0.15	0; 100; 250; 400; 500; 650; 800; 1000 мВ
	2	(0...10) °С	2.0	0; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10 °С
	3	(-50...+50) м	4.0/1.5	0; 5; 10; 15; 20; 25; 40; 50 м
12	1	(0...150) °С	0.4	0; 10; 25; 50; 100; 125; 150 °С
	2	(0...1000) мВ	1.5	0; 150; 200; 400; 550; 600; 800; 1000 мВ
	3	(-200...+200) °С	2.0/1.5	0; 40; 50; 90; 100; 140; 160; 200 °С
13	1	(0...50) В	0.6	0; 10; 20; 25; 30; 40; 45; 50 В
	2	(0...200) Ом	2.5	0; 10; 25; 50; 80; 100; 150; 200 Ом
	3	(-100...+100) мВ	2.0/0.5	0; 15; 20; 40; 55; 60; 80; 100 мВ

Продолжение табл. 2.4

№ варианта	№ задачи	Диапазон измерений	Класс точности	Результаты измерений
14	1	(0...100) мВ	0.05	0; 10; 30; 40; 50; 65; 80; 100 мВ
	2	(0...100) °С	2.5	0; 15; 20; 45; 50; 60; 80; 100 °С
	3	(-5...+5) м	5.0/2.0	0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 3,0; 4,5; 5,0 м
15	1	(0...50) А	0.05	0; 5; 10; 15; 20; 30; 45; 50 А
	2	(0...10) мВ	4.0	0; 1; 2; 4,5; 5; 6; 8; 10 мВ
	3	(-10...+10) В	2.0/1.0	0; 2; 4; 5; 6; 8; 9; 10 В
16	1	(0...10) В	0.2	0; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 10 В
	2	(0...1000) Ом	0.1	0; 100; 200; 400; 500; 600; 800; 1000 Ом
	3	(-100...+100) °С	0.2/0.05	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 °С
17	1	(0...100) мВ	0.4	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 мВ
	2	(0...100) °С	0.5	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 °С
	3	(-5...+5) В	4.0/2.0	0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0 В
18	1	(0...5) А	0.5	0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0 А
	2	(0...100) мВ	0.4	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 мВ
	3	(-10...+10) В	2.5/1.0	0; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 10 В
19	1	(0...100) В	0.1	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 В
	2	(0...10) А	1.5	0; 1; 1,5; 4; 5; 6; 9; 10 А
	3	(-100...+100) °С	0.5/0.2	0; 10; 20; 30; 50; 60; 90; 100 °С
20	1	(0...100) мВ	0.5	0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 мВ
	2	(0...100) °С	1	0; 20; 30; 40; 50; 65; 80; 100 °С
	3	(-5...+5) В	1.5/0.5	0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 4,0; 5,0 В

## Контрольные вопросы

1. Что называется классом точности средства измерения?
2. Какие существуют способы обозначения классов точности?
3. Каким образом обозначается класс точности у средств измерений с преобладающей аддитивной составляющей погрешности?
4. Каким образом обозначается класс точности у средств измерений с преобладающей мультипликативной составляющей погрешности?
5. Каким образом обозначается класс точности у средств измерений с соизмеримыми аддитивной и мультипликативной составляющими погрешности?
6. Каким образом обозначается класс точности у средств измерений с неравномерной шкалой?
7. Что называется мажорантами и минорантами?
8. По какой формуле рассчитывается класс точности у средств измерений с соизмеримыми аддитивной и мультипликативной составляющими погрешности?

## Практическое занятие № 3

### ОБНАРУЖЕНИЕ ГРУБЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

*Цель занятия:* получить практические навыки обработки результатов измерений по обнаружению грубых погрешностей с использованием критерия Романовского.

*Задание.* Решить задачи, номера которых приведены в табл. 3.3, согласно полученному варианту.

### Методические указания

**Грубой погрешностью** (промахом) называется погрешность, существенно превышающая значение ожидаемой погрешности при данных условиях проведения измерительного эксперимента. Обычно грубая погрешность является следствием значительного внезапного изменения условий эксперимента: скачка тока источника электропитания; не учтённое экспериментатором изменение температуры окружающей среды (при длительном эксперименте); неправильный отсчёт показаний из-за отвлечения внимания экспериментатора и др. Наличие грубых погрешностей в выборке результатов измерений могут сильно исказить среднее значение выборки и как следствие доверительный интервал. Поэтому выявление и исключение результатов, содержащих промах, обязательно.

Обычно результат измерения, содержащий грубую погрешность, сразу виден в ряду измеренных значений, но в каждом конкретном случае это необходимо доказать. Одним из критериев для оценки промаха является критерий Романовского.

В этом случае используют *уровень значимости*  $\beta$ , который определяется равенством

$$\beta = \frac{|M_x - x_{\min/\max}|}{S_x}, \quad (3.1)$$

где  $M_x$  – среднее арифметическое

$$M_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (3.2)$$

где  $x_i$  – результат измерения в ряду измеренных значений;  $x_{\min/\max}$  – результат измерения, подозрительный на содержание грубой погрешности ( $x_{\min}$  – наименьший результат измерения в ряду измеренных значений,  $x_{\max}$  – наибольший результат измерения в ряду измеренных значений);  $S_x$  – статистическое среднее квадратическое отклонение (СКО)

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_x)^2}{(n-1)}}, \quad (3.3)$$

где  $n$  – количество измерений.

В зависимости от выбранной доверительной вероятности  $P$ , т.е. от желания экспериментатора получить уверенный результат проверки гипотезы, и числа измерений  $n$  из табл. 3.1 находят теоретический уровень значимости  $\beta_T$  и сравнивают с ним рассчитанное значение  $\beta$ . Если  $\beta > \beta_T$ , то результат  $x_{\min/\max}$  следует отбросить как содержащий грубую погрешность. Если  $\beta < \beta_T$ , то выборку следует сохранить в полном объёме.

Как правило, критерий Романовского применяют при объёме выборки  $n < 20$ .

### 3.1. Значения теоретического уровня значимости $\beta_T$

$n$	$P$		
	0,90	0,95	0,99
3	1,412	1,414	1,414
5	1,869	1,917	1,972
7	2,093	2,182	2,310
9	2,238	2,349	2,532
11	2,343	2,470	2,689
13	2,426	2,563	2,809
15	2,523	2,670	2,946
17	2,551	2,701	2,983
19	2,601	2,754	3,049

## Пример решения задачи

**Задача 3.1.** При многократном измерении напряжения электрического тока с помощью цифрового вольтметра получены значения в В: 10,38; 10,37; 10,39; 10,38; 10,39; 10,44; 10,41; 10,5; 10,45; 10,39; 11,1; 10,45. Проверить полученные результаты измерений на наличие грубой погрешности с вероятностью  $P = 0,95$ .

### Решение.

1. По формуле (3.2) находится среднее арифметическое значение  $M_x$

$$M_x = \frac{10,38 + 10,37 + 10,39 + 10,38 + 10,39 + 10,44 + 10,41 + \dots}{12} \rightarrow \dots$$
$$\dots \rightarrow \frac{+ 10,5 + 10,45 + 10,39 + 11,1 + 10,45}{12} = 10,47 \text{ В.}$$

2. По формуле (3.3) рассчитывается среднее квадратическое отклонение  $S_x$  данного ряда

$$S_x = \sqrt{\frac{0,09^2 + 0,1^2 + 0,08^2 + 0,09^2 + 0,08^2 + 0,03^2 + 0,06^2 + \dots}{(12 - 1)}} \rightarrow \dots$$
$$\dots \rightarrow \sqrt{\frac{+ 0,03^2 + 0,02^2 + 0,08^2 + 0,63^2 + 0,02^2}{11}} = 0,2.$$

3. Из ряда измеренных значений напряжения выбираем результаты, подозрительные на содержание грубой погрешности: наименьший  $x_{\min} = 10,37$  В и наибольший  $x_{\max} = 11,1$  В.

Рассчитываем критерий  $\beta_{\min}$  для  $x_{\min} = 10,37$  В по формуле (3.1)

$$\beta_{\min} = \frac{|10,47 - 10,37|}{0,2} = 0,5.$$

Рассчитываем критерий  $\beta_{\max}$  для  $x_{\max} = 11,1$  В

$$\beta_{\max} = \frac{|10,47 - 11,1|}{0,2} = 3,15.$$

4. Из таблицы 3.1 при заданном значении доверительной вероятности  $P = 0,95$  и числа измерений  $n = 12$  находим теоретический уровень значимости  $\beta_T$  для данного ряда

$$\beta_T = 2,52.$$

**Примечание.** Значение  $\beta_r$  для  $n = 12$  находится следующим образом

$$\beta_{r/n=12} = \frac{\beta_{r/n=11} + \beta_{r/n=13}}{2}.$$

Аналогично находятся значения  $\beta_r$  для всех чётных значений  $n$ .

5. Сравниваем значения  $\beta_{\min}$  и  $\beta_{\max}$  с найденным значением  $\beta_r$ :

$$0,5 < 2,52, \text{ т.е. } \beta_{\min} < \beta_r,$$

следовательно результат  $x_{\min} = 10,37$  В не содержит грубую погрешность и его следует оставить в ряду измеренных значений.

$$3,15 > 2,52, \text{ т.е. } \beta_{\max} > \beta_r,$$

следовательно результат  $x_{\max} = 11,1$  В содержит грубую погрешность и его следует исключить из ряда измеренных значений.

6. После исключения промаха из ряда значений необходимо пересчитать значения  $M_x$ ,  $S_x$ ,  $\beta_{\min}$  и  $\beta_{\max}$ , так как изменилось  $x_{\max}$  ( $x_{\max} = 10,5$  В) и количество измерений  $n$  ( $n = 11$ ).

$M_x = 10,414$ ;  $S_x = 0,041$ ;  $\beta_{\min} = 1,069$  для  $x_{\min} = 10,37$  В;  $\beta_{\max} = 2,116$  для  $x_{\max} = 10,5$  В;  $\beta_{r/n=11} = 2,47$ .

Как видно  $1,069 < 2,47$ , т.е.  $\beta_{\min} < \beta_r$ , и  $2,11 < 2,47$ , т.е.  $\beta_{\max} < \beta_r$ . Из приведённых расчётов следует, что полученный ряд измеренных значений напряжения электрического тока не содержит промахов с вероятностью  $P = 0,95$ .

### Задачи для самостоятельного решения

При многократном измерении физической величины  $X$  получен ряд измеренных значений. Используя критерий Романовского, необходимо проверить полученные результаты измерений на наличие грубой погрешности с вероятностью  $P$ .

### 3.2. Исходные данные

№ задачи	$X$	Результаты измерений	$P$
1	$U$ , В	4,25; 4,21; 4,23; 4,21; 4,25; 4,23; 4,26; 4,22; 4,21; 4,23; 4,86; 4,21; 4,25; 4,24; 4,26; 4,22	0,90
2	$R$ , кОм	7,36; 7,32; 7,34; 7,32; 7,36; 7,97; 7,34; 7,37; 7,33; 7,32; 7,34; 7,32; 7,36; 7,38; 7,37; 7,33	0,95
3	$I$ , А	85,6; 85,7; 85,9; 85,6; 85,7; 85,8; 84,12; 85,6; 85,9; 85,9; 85,7; 85,8; 85,7; 85,8; 85,9; 85,6	0,99
4	$\varphi$ , %	58; 57; 59; 58; 57; 58; 64; 56; 59; 59; 58; 58; 57; 58; 59; 58	0,90
5	$F$ , Н	403; 408; 410; 405; 406; 398; 496; 404; 410; 353; 406; 398; 496; 404; 410; 405; 406; 398	0,95

№ задачи	$X$	Результаты измерений	$P$
6	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	93,08; 93,65; 93,26; 93,01; 92,35; 92,65; 92,43; 92,89; 93,87; 93,15; 93,44; 97,63; 92,99; 93,24	0,99
7	$Q$ , Дж	20,4; 20,2; 20,0; 20,5; 19,7; 20,3; 20,3; 20,4; 25,4; 20,1; 20,2; 20,0; 20,5; 17,7; 20,1	0,90
8	$B$ , Тл	64; 64,25; 62,3; 64,4; 65; 64,5; 64,9; 63,7; 64,8; 64; 64,25; 64,3; 64,4; 67; 64,5	0,95
9	$P$ , Па	1503; 1508; 1505; 1503; 1510; 1505; 1507; 1478; 1503; 1503; 1508; 1505; 1499; 1510; 1505; 1507; 1598	0,99
10	$V$ , м <sup>3</sup>	50,3; 50,1; 50,2; 50,0; 50,6; 49,7; 50,3; 50,4; 50,1; 50,3; 50,1; 50,2; 50,0; 50,6; 42,7; 50,2; 50,0; 50,6	0,90
11	$t$ , с	116; 117; 116; 115; 117; 101; 116; 115; 117; 115; 112; 117; 116; 115; 117; 116; 116; 114; 117	0,95
12	$L$ , Гн	747; 764; 766; 765; 763; 765; 763; 765; 764; 764; 766; 765; 763; 765; 763; 765; 763; 785; 764	0,99
13	$m$ , кг	0,7; 0,74; 0,38; 0,69; 0,72; 0,68; 0,68; 0,7; 0,71; 0,5; 0,74; 0,7; 0,69; 0,72; 0,68; 0,69; 0,72; 0,68; 0,68	0,90
14	$P$ , Вт	40,4; 41,0; 40,2; 40,0; 45,5; 42,7; 40,3; 40,4; 40,8; 40,4; 41,0; 40,2; 40,0; 33,5; 42,7; 40,4	0,95
15	$f$ , Гц	780,3; 780; 788,8; 780,5; 780,2; 780; 780,3; 780,9; 780,3; 780,4; 780,2; 780; 780,3; 790,9; 780,3; 780,4; 780,0	0,99
16	$S$ , м <sup>2</sup>	4604; 4608; 4605; 4604; 4610; 4605; 4607; 4578; 4604; 4604; 4608; 4605; 4597; 4610; 4605; 4607; 4698	0,90
17	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	744; 764; 766; 765; 763; 765; 763; 765; 764; 764; 766; 751; 763; 765; 763; 765	0,95
18	$J$ , кД	354; 354; 396; 355; 353; 355; 353; 355; 354; 354; 356; 321; 353; 355; 353; 355	0,99
19	$T$ , °С	15,6; 15,7; 15,9; 15,6; 15,7; 15,8; 14,1; 15,6; 15,9; 15,9; 15,7; 17,8; 15,7; 15,8; 15,9; 15,6	0,90
20	$V$ , м/с	80,6; 80,7; 80,9; 80,6; 80,7; 80,8; 84,12; 80,6; 80,9; 80,9; 80,7; 80,8; 89,7; 80,9; 80,6	0,95
21	$\varphi$ , рад	49; 45; 45; 46; 47; 47; 45; 47; 46; 47; 45; 45; 46; 46; 46; 42; 45; 46; 46	0,99
22	$l$ , м	0,30; 0,32; 0,30; 0,21; 0,32; 0,28; 0,29; 0,3; 0,33; 0,3; 0,34; 0,30; 0,29; 0,32; 0,28; 0,29; 0,30; 0,43	0,90
23	$F$ , Н	116; 118; 115; 116; 115; 101; 116; 114; 117; 116; 112; 115; 138; 115; 116; 117; 111	0,95
24	$R$ , Ом	3258; 3259; 3563; 3258; 3259; 3257; 3256; 3254; 3257; 3258; 3259; 3263; 3258; 3259; 3257; 3456; 3254; 3257	0,99
25	$M$ , Н·м	0,38; 0,15; 0,14; 0,09; 0,12; 0,15; 0,13; 0,14; 0,14; 0,13; 0,15; 0,14; 0,14; 0,13; 0,13; 0,14; 0,15; 0,14	0,90



### 3.3. Варианты заданий к практическому занятию № 3

№ варианта	№№ задач для решения	№ варианта	№№ задач для решения
1	1, 17, 25	11	3, 13, 22
2	2, 16, 24	12	4, 12, 23
3	3, 15, 23	13	5, 14, 24
4	4, 14, 22	14	6, 15, 25
5	5, 13, 21	15	1, 7, 16
6	6, 12, 20	16	8, 17, 23
7	7, 11, 19	17	4, 9, 18,
8	8, 10, 18	18	3, 10, 19
9	9, 1, 17	19	2, 11, 20
10	2, 15, 25	20	1, 12, 21

#### Контрольные вопросы

1. Что называется погрешностью?
2. Назовите виды погрешностей.
3. Какая погрешность называется грубой (промахом)?
4. Каковы причины возникновения грубой погрешности?
5. Приведите методику определения грубой погрешности?
6. Какой критерий используется для определения грубой погрешности?
7. Как влияет неисключённая грубая погрешность на ряд измеренных значений?
8. Как необходимо поступить с измеренным значением, содержащим промах, после его определения?

#### *Практическое занятие № 4*

### МНОГОКРАТНЫЕ РАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

*Цель занятия:* получить практические навыки обработки результатов многократных равноточных измерений и нахождения доверительных границ погрешности результата измерений.

*Задание.* Решить задачи, номера которых приведены в табл. 4.2, согласно полученному варианту.

#### Методические указания

Результаты многократных наблюдений, получаемые при прямых измерениях величины  $X$ , называются **равноточными** (*равнорассеянными*), если они являются независимыми, одинаково распределёнными случайными величинами. Измерения проводятся одним наблюдателем в одинаковых условиях внешней среды и с помощью одного и того же средства измерения.

**Доверительными границами** погрешности результата измерений называется наибольшее и наименьшее значения погрешности измерений, ограничивающие интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится истинное (истинное) значение погрешности результата измерений [3].

Статистическая обработка группы результатов наблюдения при равнооточных измерениях, нормальном распределении, выполняется в такой последовательности [4].

1. Производятся равнооточные измерения неизвестной величины  $X_n$  раз. После отбрасывания сомнительных результатов получают результаты  $n$  измерений:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

2. Среднее основного нормального распределения оценивают как среднее арифметическое  $\bar{x}$   $n$  результатов:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (4.1)$$

3. Определяется оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметического:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (4.2)$$

4. Доверительный интервал рассчитывается с учётом заданной доверительной вероятности  $P$ :

$$\bar{x} - St_{n,P} < \bar{x} < St_{n,P} + \bar{x}, \quad (4.3)$$

где  $t_{n,P}$  – квантиль распределения Стьюдента. Значения  $t_{n,P}$  в зависимости от заданной доверительной вероятности  $P$  и количества измерений  $n$  даны в табл. 4.1.

#### 4.1. Значения квантиля распределения Стьюдента

$n - 1$	$P = 0,95$	$P = 0,99$	$n - 1$	$P = 0,95$	$P = 0,99$
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,101	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,499	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
10	2,228	3,165	28	2,048	2,763
12	2,179	3,055	30	2,043	2,750
14	2,145	2,977	$\infty$	1,960	2,576

5. Результат измерения величины  $X$  представляют в виде доверительного интервала в форме неравенства (4.3) с указанием доверительной вероятности  $P$ .

### Пример решения задачи

**Задача 4.1.** При многократном изменении температуры  $T$  в производственном помещении получены значения в градусах Цельсия: 20,4; 20,2; 20,0; 20,5; 19,7; 20,3; 20,4; 20,1. Укажите доверительные границы истинного значения температуры в помещении с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Решение.**

По формуле (4.1) находится среднее значение  $\bar{T}$ :

$$\bar{T} = \frac{20,4 + 20,2 + 20,0 + 20,5 + 19,7 + 20,3 + 20,4 + 20,1}{8} = 20,2 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

По формуле (4.2) вычисляется среднее квадратическое отклонение среднего арифметического  $S$ :

$$S = \sqrt{\frac{(20,2 - 20,4)^2 + (20,2 - 20,2)^2 + (20,2 - 20,0)^2 + (20,2 - 20,5)^2 + \dots + (20,2 - 19,7)^2 + (20,2 - 20,3)^2 + (20,2 - 20,4)^2 + (20,2 - 20,1)^2}{8 \cdot (8 - 1)}} = 0,09.$$

По таблице 3.1 находим значение  $t_{n,P}$  при доверительной вероятности  $P = 0,95$  и  $n - 1 = 7$ .

$$t_{n,P} = 2,365.$$

Доверительные границы истинного значения температуры в помещении с вероятностью  $P = 0,95$  рассчитываются по формуле (4.3):

$$20,2 - 0,09 \cdot 2,365 < \bar{T} < 20,2 + 0,09 \cdot 2,365.$$

Окончательно результат измерения температуры  $T$  в производственном помещении

$$20 < \bar{T} < 20,4; \quad P = 0,95$$

или  $T = 20,2 \pm 0,2 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad P = 0,95.$

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** При многократном измерении силы  $F$  получены значения в Н: 403; 408; 410; 405; 406; 398; 496; 404. Укажите доверительные границы истинного значения силы с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 2.** При многократном измерении силы электрического тока получены значения в А: 0,8; 0,85; 0,8; 0,79; 0,82; 0,78; 0,79; 0,8; 0,84. Укажите доверительные границы истинного значения силы тока с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 3.** При многократном измерении длины балки  $L$  получены значения в мм: 90,3; 90; 89,8; 89,9; 90,4; 90; 90,3; 89,1; 90,5; 90,4; 90. Укажите доверительные границы истинного значения длины с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 4.** При многократном измерении температуры объекта получены значения в °С: 40,4; 41,0; 40,2; 40,0; 43,5; 42,7; 40,3; 40,4; 40,8 °С. Укажите доверительные границы истинного значения температуры с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 5.** При многократном измерении напряжения электрического тока получены значения в В: 263; 268; 273; 265; 267; 261; 266; 264; 267 В. Укажите доверительные границы истинного значения напряжения с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 6.** При многократном измерении силы  $F$  получены значения в Н: 403; 408; 405; 399; 410; 405; 406; 398; 406. Укажите доверительные границы истинного значения силы с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 7.** При многократном измерении силы электрического тока получены значения в мА: 22,4; 22,1; 22,3; 22,2; 21,5; 21,7; 22,3; 21,4; 22,1. Укажите доверительные границы истинного значения силы тока с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 8.** При многократном измерении уровня жидкости  $L$  в технологическом резервуаре получены значения в м: 64; 64,25; 64,3; 64,4; 65; 64,5; 64,9; 63,7; 64,8. Укажите доверительные границы истинного значения уровня с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 9.** При многократном измерении объёма тела получены следующие значения: 0,3; 0,35; 0,3; 0,29; 0,32; 0,28; 0,29; 0,3; 0,34 м<sup>3</sup>. Укажите доверительные границы истинного значения объёма с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 10.** При многократном измерении сопротивления в электрической цепи получены следующие значения: 703; 708; 705; 699; 710; 705; 707; 698; 703 Ом. Укажите доверительные границы истинного значения сопротивления с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 11.** При многократном измерении силы  $F$  получены значения в Н: 98,3; 98; 99,8; 99,9; 98,4; 98; 98,3; 99,1; 98,5; 98,4; 98. Укажите доверительные границы истинного значения силы с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 12.** При многократном измерении силы электрического тока получены значения в А: 0,1; 0,15; 0,1; 0,09; 0,12; 0,08; 0,09; 0,1; 0,14. Укажите доверительные границы истинного значения силы тока с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 13.** При многократном измерении длины балки  $L$  получены значения в мм: 80,3; 80; 79,8; 79,5; 80,2; 80; 80,3; 79,9; 80,3; 80,4; 90. Укажите доверительные границы истинного значения длины с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 14.** При многократном измерении температуры объекта получены значения в °С: 50,3; 50,1; 50,2; 50,0; 50,6; 49,7; 50,3; 50,4; 50,1 °С. Укажите доверительные границы истинного значения температуры с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 15.** При многократном измерении напряжения электрического тока получены значения в В: 113; 118; 113; 115; 117; 111; 116; 114; 117; 115; 112 В. Укажите доверительные границы истинного значения напряжения с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 16.** При многократном измерении объёма резервуара  $V$  получены значения: 83,4; 83,0; 83,2; 83,2; 82,5; 82,7; 83,3; 82,4; 83,1 л. Укажите доверительные границы истинного значения объёма с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 17.** При многократном измерении силы электрического тока получены значения в мА: 22,4; 22,1; 22,3; 22,2; 21,5; 21,7; 22,3; 21,4; 22,1. Укажите доверительные границы истинного значения силы тока с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 18.** При многократном измерении высоты опорного стержня получены значения: 90,3; 90; 89,8; 89,9; 90,4; 90; 90,3; 89,1; 90,5; 90,4; 90 мм. Укажите доверительные границы истинного значения высоты стержня с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 19.** При многократном измерении объёма тела получены следующие значения: 0,7; 0,74; 0,7; 0,69; 0,72; 0,68; 0,68; 0,7; 0,71 м<sup>3</sup>. Укажите доверительные границы истинного значения объёма с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 20.** При многократном измерении сопротивления в электрической цепи получены следующие значения: 1503; 1508; 1505; 1499; 1510; 1505; 1507; 1498; 1503 Ом. Укажите доверительные границы истинного значения сопротивления с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 21.** При многократном измерении атмосферного давления получены значения в мм рт. ст.: 764; 764; 766; 765; 763; 765; 763; 765. Укажите доверительные границы истинного значения атмосферного давления с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 22.** При многократном измерении относительной влажности в производственном помещении получены значения в %: 48; 45; 45; 46; 47; 47; 45; 48; 46. Укажите доверительные границы истинного значения относительной влажности с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 23.** При многократном измерении диаметра детали  $d$  получены следующие значения в мкм: 9990,3; 9990; 9989,8; 9989,9; 9990,4; 9990;

9990,3; 9989,1; 9990,5; 9990,4; 9990. Укажите доверительные границы истинного значения диаметра с вероятностью  $P = 0,95$ .

**Задача 24.** При многократном измерении концентрации кислорода в газовой смеси получены следующие значения в %: 10,4; 11,2; 10,2; 10,1; 13,5; 12,1; 10,3; 10,4; 10,8. Укажите доверительные границы истинного значения концентрации кислорода с вероятностью  $P = 0,99$ .

**Задача 25.** При многократном измерении освещённости  $E$  рабочего места студента получены следующие значения: 258; 259; 263; 258; 259; 257; 256; 254; 257 лк. Укажите доверительные границы истинного значения освещённости с вероятностью  $P = 0,95$ .

#### 4.2. Варианты заданий к практическому занятию № 4

№ варианта	№№ задач для решения	№ варианта	№№ задач для решения
1	1, 17, 25	11	3, 13, 22
2	2, 16, 24	12	4, 12, 23
3	3, 15, 23	13	5, 14, 24
4	4, 14, 22	14	6, 15, 25
5	5, 13, 21	15	1, 7, 16
6	6, 12, 20	16	8, 17, 23
7	7, 11, 19	17	4, 9, 18,
8	8, 10, 18	18	3, 10, 19
9	9, 1, 17	19	2,11, 20
10	2, 15, 25	20	1,12, 21

#### Контрольные вопросы

1. Какие измерения называются равноточными (равнорассеянными)?
2. Дайте определение терминам: доверительные границы, доверительный интервал, доверительная вероятность.
3. Расскажите в какой последовательности осуществляется статистическая обработка группы равноточных измерений.
4. Каким образом находится среднее основного нормального распределения?
5. Запишите формулу для расчёта среднего квадратического отклонения среднего арифметического.
6. Запишите формулу для расчёта доверительного интервала.
7. В каком виде записывается результат измерения величины  $X$ ?
8. Как изменятся границы доверительного интервала (увеличатся или уменьшатся) при увеличении доверительной вероятности  $P$ ?

## НАХОЖДЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

*Цель занятия:* получить практические навыки нахождения погрешностей косвенных измерений.

*Задание.* Самостоятельно решить задачи, номера которых приведены в табл. 5.2, согласно полученному варианту.

### Методические указания

Согласно [3] *косвенное измерение* это определение искомого значения физической величины на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной.

Пример – Определение плотности  $D$  тела цилиндрической формы по результатам прямых измерений массой  $m$ , высотой  $h$  и диаметром цилиндра  $d$ , связанных с плотностью уравнением

$$D = \frac{m}{0,25\pi d^2 h}.$$

*Примечание.* Во многих случаях вместо термина «*косвенное измерение*» применяют термин «*косвенный метод измерений*».

Для вычисления погрешностей косвенных измерений по известным погрешностям прямых измерений существуют следующие методики.

**Получение формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в случае зависимости вида  $Y = a + b - c$  (сумма, разность).**

*Исходные данные:*  $a, b, c, \Delta a, \Delta b, \Delta c$ .

Вывод формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в рассматриваемом случае можно выполнить следующим образом.

1. Найдём дифференциал правой и левой частей:

$$dY = d(a + b - c) = da + db - dc.$$

2. Произведём широко используемую в теории погрешностей замену дифференциалов абсолютными погрешностями (при условии, что абсолютные погрешности достаточно малы):  $dY \approx \Delta Y$ ,  $da \approx \Delta a$ ,  $db \approx \Delta b$ ,  $dc \approx \Delta c$ .

Тогда  $\Delta Y = \Delta a + \Delta b - \Delta c$ .

3. Учитывая, что знаки погрешностей  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$  обычно бывают заранее неизвестны, для получения гарантированной (*предельной*) оценки абсолютной погрешности косвенного измерения в последней формуле все знаки « $\rightarrow$ » заменим на знаки « $+$ »:

$$\Delta Y_{\text{пр}} = \Delta a + \Delta b + \Delta c.$$

4. Найдём предельную оценку относительной погрешности косвенного измерения, учитывая, что относительная погрешность есть отношение абсолютной погрешности к результату измерений:

$$\delta Y_{\text{пр}} = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{a + b - c}.$$

Величина предельной погрешности во многих случаях бывает завышенной, поэтому часто применяют *среднеквадратические* оценки погрешности. Для получения среднеквадратической оценки погрешности в формуле для предельной оценки погрешности сумму заменяют корнем квадратным из суммы квадратов.

5. Найдём среднеквадратические оценки абсолютной и относительной погрешностей косвенного измерения:

$$\Delta Y_{\text{ск}} = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2};$$

$$\delta Y_{\text{ск}} = \frac{\Delta Y_{\text{ск}}}{Y} = \frac{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2}}{a + b - c}.$$

**Получение формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в случае зависимости вида  $Y = \frac{ab}{c}$  (произведение, деление).**

*Исходные данные:*  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$ .

Вывод формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в рассматриваемом случае можно выполнить следующим образом.

1. Прологарифмируем левую и правую части заданной зависимости:

$$\ln Y = \ln \left( \frac{ab}{c} \right) = \ln a + \ln b - \ln c.$$

2. Найдём дифференциал правой и левой частей:

$$d \ln Y = d \ln \left( \frac{ab}{c} \right) = d \ln a + d \ln b - d \ln c.$$



3. Учитывая, что дифференциал от логарифма переменной величины находится по формуле  $d(\ln x) = \frac{d \ln x}{dx} dx = \frac{dx}{x}$ , получаем:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} - \frac{dc}{c}.$$

4. Произведём широко используемую в теории погрешностей замену дифференциалов малыми абсолютными погрешностями (при условии, что абсолютные погрешности достаточно малы):

$$dY \approx \Delta Y, \quad da \approx \Delta a, \quad db \approx \Delta b, \quad dc \approx \Delta c,$$

тогда 
$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta c}{c}.$$

5. Учитывая, что знаки погрешностей  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$  заранее неизвестны, для получения гарантированной (*предельной*) оценки относительной погрешности косвенного измерения в последней формуле все знаки «-» заменяем на знаки «+»:

$$\left( \frac{\Delta Y}{Y} \right)_{\text{пр}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c},$$

$$\delta Y_{\text{пр}} = \delta a + \delta b + \delta c.$$

6. Предельную оценку абсолютной погрешности косвенного измерения находим по формуле

$$\Delta Y_{\text{пр}} = \delta Y_{\text{пр}} Y.$$

Величина предельной погрешности во многих случаях бывает завышенной, поэтому часто применяют *среднеквадратические* оценки погрешности. Для получения среднеквадратической оценки погрешности в формуле для предельной оценки погрешности сумму заменяют корнем квадратным из суммы квадратов.

7. Найдём среднеквадратические оценки относительной и абсолютной погрешностей косвенного измерения:

$$\delta Y_{\text{ск}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2} = \sqrt{(\delta a)^2 + (\delta b)^2 + (\delta c)^2}.$$

$$\Delta Y_{\text{ск}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2} Y = \sqrt{(\delta a)^2 + (\delta b)^2 + (\delta c)^2} Y.$$

## Примеры решения задач

**Задача 5.1.** Расчётная зависимость косвенного метода измерений имеет вид  $P = UI$ . Найти предельные и среднеквадратические оценки абсолютной и относительной погрешности косвенного измерения величины  $P$ .

**Решение.**

1. Прологарифмируем левую и правую части заданной зависимости

$$\ln P = \ln U + \ln I.$$

2. Найдём дифференциал правой и левой частей

$$d \ln P = d \ln U + d \ln I.$$

3. Учitando, что дифференциал от логарифма переменной величины находится по формуле  $d(\ln x) = \frac{d \ln x}{dx} dx = \frac{dx}{x}$ , получаем

$$\frac{dP}{P} = \frac{dU}{U} + \frac{dI}{I}.$$

4. Произведём широко используемую в теории погрешностей замену дифференциалов малыми абсолютными погрешностями (при условии, что абсолютные погрешности достаточно малы), т.е.

$$dP \approx \Delta P, dU \approx \Delta U, dI \approx \Delta I$$

$$\left( \frac{\Delta P}{P} \right)_{\text{пр}} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}.$$

Таким образом, получили предельную оценку относительной погрешности косвенного измерения

$$(\delta P)_{\text{пр}} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = \delta U + \delta I.$$

5. Предельную оценку абсолютной погрешности косвенного измерения находим по формуле  $\Delta P_{\text{пр}} = \delta P_{\text{пр}} P$ , т.е.

$$\Delta P_{\text{пр}} = \left( \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} \right) UI.$$

Величина предельной погрешности во многих случаях бывает завышенной, поэтому применяют среднеквадратические оценки погрешности. Для получения среднеквадратической оценки погрешности в формуле для предельной оценки погрешности сумму заменяют корнем квадратным из суммы квадратов.

6. Найдём среднеквадратические оценки относительной и абсолютной погрешностей косвенного измерения  $P$ :

$$(\delta P)_{\text{ск}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} = \sqrt{(\delta U)^2 + (\delta I)^2};$$

$$(\Delta P)_{\text{ск}} = \left[ \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} \right] U I.$$

**Задача 5.2.** Расчётная зависимость косвенного метода измерений имеет вид  $P = \frac{U^2}{R}$ . Найти предельные и среднеквадратические оценки абсолютной и относительной погрешности косвенного измерения величины  $P$ .

**Решение.**

1. Прологарифмируем левую и правую части заданной зависимости

$$\ln P = \ln U^2 - \ln R = 2 \ln U - \ln R.$$

2. Найдём дифференциал правой и левой частей

$$d \ln P = 2d \ln U - d \ln R.$$

3. Учтывая, что дифференциал от логарифма переменной величины

находится по формуле  $d(\ln x) = \frac{d \ln x}{dx} dx = \frac{dx}{x}$ , получаем

$$\frac{dP}{P} = 2 \frac{dU}{U} - \frac{dR}{R}.$$

4. Произведём широко используемую в теории погрешностей замену дифференциалов малыми абсолютными погрешностями (при условии, что абсолютные погрешности достаточно малы), т.е.  $dP \approx \Delta P$ ,  $dU \approx \Delta U$ ,  $dI \approx \Delta I$

$$\frac{\Delta P}{P} = 2 \frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta R}{R}.$$

5. Учтывая, что знаки погрешностей  $\Delta P$ ,  $\Delta U$ ,  $\Delta R$  заранее неизвестны, для получения гарантированной (предельной) оценки относительной погрешности косвенного измерения  $P$  в последней формуле все знаки « $\rightarrow$ » заменяем на знаки « $+$ ». Таким образом, получили предельную оценку относительной погрешности косвенного измерения

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{пр}} = 2\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta R}{R} = 2\delta U + \delta R.$$

6. Предельную оценку абсолютной погрешности косвенного измерения находим по формуле  $\Delta P_{\text{пр}} = \delta P_{\text{пр}} P$ , т.е.

$$\Delta P_{\text{пр}} = \left(2\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta R}{R}\right) \frac{U^2}{R}.$$

Величина предельной погрешности во многих случаях бывает завышенной, поэтому применяют *среднеквадратические* оценки погрешности. Для получения среднеквадратической оценки погрешности в формуле для предельной оценки погрешности *сумму заменяют корнем квадратным из суммы квадратов*.

7. Найдём среднеквадратические оценки относительной и абсолютной погрешностей косвенного измерения  $P$ :

$$(\delta P)_{\text{ск}} = \sqrt{4\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} = \sqrt{4(\delta U)^2 + (\delta R)^2};$$

$$(\Delta P)_{\text{ск}} = \sqrt{4\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} \frac{U^2}{R}.$$

**Задача 5.3.** Расчётная зависимость косвенного метода измерений имеет вид  $Y = \frac{3(a+b)c}{f}$ . Найти предельные и среднеквадратические

оценки абсолютной и относительной погрешности косвенного измерения величины  $Y$ .

**Решение.**

1. Введём обозначение  $A = a + b$ . Тогда  $Y = \frac{3Ac}{f}$ .

2. Прологарифмируем левую и правую части заданной зависимости

$$\ln Y = \ln 3 + \ln A + \ln c - \ln f.$$

3. Найдём дифференциал правой и левой частей

$$d \ln Y = d \ln 3 + d \ln A + d \ln c - d \ln f.$$

С учётом того, что  $d \ln 3 = 0$ , получим

$$d \ln Y = d \ln A + d \ln c - d \ln f.$$

4. Учитывая, что дифференциал от логарифма переменной величины находится по формуле  $d(\ln x) = \frac{d \ln x}{dx} dx = \frac{dx}{x}$

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} - \frac{df}{f}.$$

5. Произведём широко используемую в теории погрешностей замену дифференциалов малыми абсолютными погрешностями (при условии, что абсолютные погрешности достаточно малы), т.е.  $dY \approx \Delta Y$ ,  $dA \approx \Delta A$ ,  $dc \approx \Delta c$ ,  $df \approx \Delta f$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta c}{c} - \frac{\Delta f}{f}.$$

6. Учитывая, что знаки погрешностей  $\Delta A$ ,  $\Delta c$ ,  $\Delta f$  заранее неизвестны, для получения гарантированной (предельной) оценки относительной погрешности косвенного измерения  $Y$  в последней формуле все знаки «-» заменяем на знаки «+». Таким образом, получили предельную оценку относительной погрешности косвенного измерения

$$\left( \frac{\Delta Y}{Y} \right)_{\text{пр}} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta f}{f}.$$

Здесь  $A = a + b$ , тогда  $\Delta A = \Delta a + \Delta b$ . Окончательно

$$\left( \frac{\Delta Y}{Y} \right)_{\text{пр}} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta f}{f}.$$

7. Предельную оценку абсолютной погрешности косвенного измерения находим по формуле  $\Delta Y_{\text{пр}} = \delta Y_{\text{пр}} Y$ , т.е.

$$\Delta Y_{\text{пр}} = \left( \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta f}{f} \right) \frac{3(a+b)c}{f}.$$

8. Найдём среднеквадратические оценки относительной и абсолютной погрешностей косвенного измерения  $Y$  с учётом того, что  $\Delta A_{\text{ск}} = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}$ :

$$(\delta Y)_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{\Delta a^2 + \Delta b^2}{(a+b)^2} + \left( \frac{\Delta c}{c} \right)^2 + \left( \frac{\Delta f}{f} \right)^2};$$

$$(\Delta Y)_{\text{ск}} = \left( \sqrt{\frac{\Delta a^2 + \Delta b^2}{(a+b)^2} + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2} \right) \frac{3(a+b)c}{f}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

По известной расчётной зависимости косвенного метода измерения и по известным результатам и погрешностям прямых измерений, в соответствии с полученным вариантом, рассчитать предельные и среднеквадратические оценки абсолютной и относительной погрешностей косвенного измерения. Исходные данные приведены в табл. 5.1.

#### 5.1. Исходные данные

№ задачи	Расчётная зависимость	Погрешности и результаты прямых измерений				
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
1	$y = 2(a+b)c^2/(d-e)$	$\Delta a = 1$ $a = 50$	$\Delta b = 3$ $b = 90$	$\Delta c = 2$ $c = 60$	$\Delta d = 2$ $d = 70$	$\Delta e = 1$ $e = 40$
2	$y = a^3(b+c)/[2(d-e)]$					
3	$y = (b-a)(c+d)/[3e^2]$					
4	$y = 3(a+b)/[c^2(d-e)]$					
5	$y = a^2/[3(b-c)(d+e)]$					
6	$y = 2(a+b-c)/[d^3e]$	$\Delta a = 3$ $a = 100$	$\Delta b = 1$ $b = 70$	$\Delta c = 2$ $c = 80$	$\Delta d = 1$ $d = 60$	$\Delta e = 2$ $e = 90$
7	$y = ab^2/[2(c-d+e)]$					
8	$y = 2(a-b)/[cd^2e^3]$					
9	$y = 0,5/[(a+b)(c-d)e^2]$					
10	$y = a(b+c-d)/[3e^3]$					
11	$y = 3ab^2/(c-d+e)$	$\Delta a = 1$ $a = 100$	$\Delta b = 2$ $b = 80$	$\Delta c = 1$ $c = 60$	$\Delta d = 2$ $d = 40$	$\Delta e = 1$ $e = 20$
12	$y = a^3b/[3(c-d)e]$					
13	$y = 2ab^3/[(c+d-e)]$					
14	$y = 3(a-b)c^2/[2(d+e)]$					
15	$y = 1/[a(b-c)d^2e]$					
16	$y = (a-b-c)d^2/[2e]$	$\Delta a = 5$ $a = 200$	$\Delta b = 3$ $b = 90$	$\Delta c = 2$ $c = 70$	$\Delta d = 2$ $d = 60$	$\Delta e = 1$ $e = 30$
17	$y = 0,4a/[b^2(c-d)e^3]$					
18	$y = a^2(b+c)/[0,5(d-e)]$					
19	$y = a^3(b-c)(d+e)/2$					
20	$y = (a+b)c^2(d-e)/3$					
21	$y = 4ab^2c^3/(d-e)$	$\Delta a = 0,5$ $a = 40$	$\Delta b = 1$ $b = 30$	$\Delta c = 0,5$ $c = 50$	$\Delta d = 1,4$ $d = 70$	$\Delta e = 2$ $e = 60$
22	$y = 2/[(a+b)c^3(d-e)]$					
23	$y = (a-b)/[3(c+d)e^2]$					
24	$y = 0,1(a-b+c)/[d^3e]$					
25	$y = 2a/[(3bc^2)(d-e)]$					

## 5.2. Варианты заданий к практическому занятию № 5

№ варианта	№№ задач для решения	№ варианта	№№ задач для решения	№ варианта	№№ задач для решения	№ варианта	№№ задач для решения
1	1, 17, 25	6	6, 12, 20	11	3, 13, 22	16	8, 17, 23
2	2, 16, 24	7	7, 11, 19	12	4, 12, 23	17	4, 9, 18,
3	3, 15, 23	8	8, 10, 18	13	5, 14, 24	18	3, 10, 19
4	4, 14, 22	9	9, 1, 17	14	6, 15, 25	19	2, 11, 20
5	5, 13, 21	10	2, 15, 25	15	1, 7, 16	20	1, 12, 21

### Контрольные вопросы

1. Какие виды измерений Вы знаете?
2. Что называется косвенными измерениями?
3. Поясните порядок получения предельных и среднеквадратичных погрешностей в случае зависимости вида  $y = a + b - c + d - e \dots$ .
4. Поясните порядок получения предельных и среднеквадратичных погрешностей в случае зависимости вида  $y = \frac{abc}{de}$ .
5. Какие свойства дифференциала Вы знаете? Поясните на примере.
6. Чему равен дифференциал  $\ln(x)$ , если  $x = \text{const}$ ?
7. Поясните смысл замены знаков « $\leftarrow$ » на знаки « $\rightarrow$ » при расчёте погрешности косвенного измерения.
8. Чем объясняется возможность замены дифференциала на абсолютную погрешность  $\Delta$ . В каких случаях этого делать нельзя?

### Практическое занятие № 6

#### РАСЧЁТ ДОПУСКОВ И ПОСАДОК

*Цель занятия:* получить первоначальные сведения об основных понятиях взаимозаменяемости, а также практические навыки определения системы посадки сопрягаемых деталей и расчёта её основных параметров (зазоров и натягов).

*Задание.* Решить задачи, номера которых приведены в табл. 6.2, согласно полученному варианту.

#### Методические указания

Основные представления о взаимозаменяемости можно получить, изучив литературу [5, 6].

Один из главных принципов, используемых конструктором для разработки и изготовления всех машин и их деталей, – это принцип взаимозаменяемости. **Взаимозаменяемостью** называется свойство независимо изготовленных деталей, узлов или агрегатов машин, позволяющее устанавливать их при сборке или ремонте или заменять без всякой подгонки или дополнительной обработки и обеспечивать при этом их необходимую работоспособность в соответствии с заданными техническими условиями. Под независимым изготовлением деталей понимается их изготовление в разное время и разных местах (цехах, заводах, городах, даже странах). С примерами взаимозаменяемости мы встречаемся повседневно. Гаечный ключ должен накладываться на головку болта или гайку, винт – ввёртываться в отверстие с резьбой, цоколь электролампочки – ввёртываться в патрон, вилка электрошнура – входить в штепсельную розетку, целые агрегаты (например, двигатели автомобилей), изготовленные в разных городах, – собираться в единое изделие на конвейере главного завода.

Потребность во взаимозаменяемости возникла очень давно, но наибольшее развитие она получила с развитием металлообработки, особенно в условиях массового, а в последнее время – автоматизированного производства. Соблюдение взаимозаменяемости обеспечивает упрощение сборки и ремонта, облегчает процесс конструирования – конструктору не нужно каждый раз придумывать оригинальные решения, гораздо удобнее использовать уже опробованные и проверенные. Специализация, в свою очередь, удешевляет производство: имеется возможность использовать не универсальное, а специальное оборудование, обладающее высокой производительностью.

Взаимозаменяемость бывает *полной* и *неполной*.

Полная взаимозаменяемость позволяет получать заданные показатели качества без дополнительных операций в процессе сборки. При неполной взаимозаменяемости в процессе сборки допускаются операции, связанные с подбором или регулировкой некоторых деталей.

Для обеспечения взаимозаменяемости необходимо процессы конструирования машин, обработки деталей и сборки узлов осуществлять в соответствии с установленными правилами и нормами, указанными в стандартах.

Для обеспечения наивысшей эффективности проведения важных работ общегосударственного значения разрабатываются взаимоувязанные стандарты, объединяемые в единые комплексные системы.

**Единая система конструкторской документации (ЕСКД)** устанавливает порядок разработки, оформления, учёта, хранения, размножения, изменения чертежей и другой конструкторской документации, разрабатываемой предприятиями и организациями; обеспечивает взаимный обмен конструкторской документацией без каких-либо переделок, благодаря обязательным правилам оформления и соблюдения комплексности документации.



**Единая система технологической документации (ЕСТД)** устанавливает обязательный порядок разработки, оформления и обращения всех видов технологической документации на машино- и приборостроительных предприятиях для изготовления, транспортирования, установки (монтажа) и ремонта изделий этих предприятий. На основе технологической документации осуществляют планирование, подготовку и организацию производства, устанавливают связи между отделами и цехами предприятий, а также между исполнителями (конструктором, технологом, мастером, рабочим). Технологическая документация начинает создаваться уже на стадии проектирования; на ней базируется изготовление, эксплуатация и ремонт изделий.

### **Линейные размеры, отклонения и допуски линейных размеров**

**Линейный размер** – числовое значение линейной величины (диаметра, длины) в выбранных единицах измерения. В России линейные размеры на чертежах проставляются в миллиметрах (мм).

Размер, полученный конструктором в результате расчётов (на прочность, жёсткость) или с учётом различных конструкторских или технологических соображений при проектировании, называется **номинальным**.

Номинальные размеры могут быть как целыми, так и дробными числами. На чертеже в качестве номинального линейного размера указывается только такой размер, который после расчёта округлён до *ближайшего большего* значения из установленного ряда нормальных линейных размеров.

Размер, полученный в результате изготовления и обработки детали, будет отличаться от номинального. Это связано с неизбежным возникновением различных погрешностей. Такой размер называется **действительным**.

**Действительный размер** – размер, установленный измерением с допустимой погрешностью. Допустимые погрешности измерения, а, следовательно, и выбор измерительных средств необходимо согласовывать с точностью, которая требуется для данного размера.

Для обеспечения функциональной годности детали, исходя из целого ряда факторов, после расчёта номинального размера устанавливаются два *предельных размера* – наибольший и наименьший. Это предельно допустимые размеры, между которыми должен находиться или которым может быть равен действительный размер годной детали.

На чертеже, в дополнение к номинальному размеру, проставляют его *предельные отклонения* – верхнее и нижнее. *Верхнее отклонение* ( $E_s, e_s$ ) – это алгебраическая разность между наибольшим предельным и номинальным размерами. *Нижнее отклонение* ( $E_i, e_i$ ) – это алгебраическая разность между наименьшим предельным и номинальным размерами. Определение отклонений как алгебраической разности числовых величин означает, что они всегда имеют знак: плюс (+) или минус (–).

Исходя из вышесказанного **номинальный размер** – размер, относительно которого определяются предельные размеры и который служит

началом отсчёта всех отклонений, как предельных (верхнего и нижнего), так и действительных. *Действительное отклонение* – это алгебраическая разность между действительным и номинальным размерами.

Зона значений размеров, между которыми должен находиться действительный размер годной детали, характеризует точность размера и называется допуском. Обозначается буквой *T*. *Допуск* – это разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами, или алгебраическая разность между верхним и нижним отклонениями. Допуск, в отличие от отклонений, знака не имеет.

**Пример 6.1.** При расчёте вала на прочность его размер получился равным 37,8 мм. Этот размер округляют до ближайшего нормального размера – 38 мм и получают номинальный размер. Далее, исходя из технических и эксплуатационных соображений, для данной детали с номинальным размером 38 мм устанавливаются следующие предельные отклонения: верхнее – 50 мкм = 0,050 мм, нижнее – 89 мкм = 0,089 мм. Окончательно на чертеже наносится номинальный размер с предельными отклонениями в следующем виде:  $38_{-0,089}^{0,050}$ .

Расчёт предельных размеров. Наибольший предельный размер получится, если из номинального размера вычесть верхнее отклонение:  $38 - 0,050 = 37,950$  мм. Наименьший предельный размер получится, если из номинального размера вычесть нижнее отклонение:  $38 - 0,089 = 37,911$  мм. Значит, если при изготовлении указанной детали действительный размер окажется между 37,950 мм и 37,911 мм или равен им, то деталь будет годной.

Расчёт допуска производится следующим образом:  $37,95 - 37,911 = 0,039$  мм или  $-0,050 - (-0,089) = 0,039$  мм. Таким образом, допуск 0,039 мм (или соответственно 39 мкм) означает, что в партии годных деталей могут быть детали, размеры которых отличаются друг от друга не более чем на 39 мкм.

Чем больше допуск, тем ниже требования к точности обработки детали, тем проще её изготовление. И наоборот, уменьшение допуска означает большую точность, требуемую при изготовлении детали, и соответственно её удорожание.

На рис. 6.1 и 6.2 все рассмотренные понятия представлены графически.

Всё многообразие конкретных деталей принято сводить к двум элементам. Наружные (охватываемые) элементы называют *валом*, а внутренние (охватывающие) – *отверстием*.

Номинальный, наибольший предельный, наименьший предельный и действительный размеры вала, а также допуск вала обозначаются соответственно  $d$ ,  $d_{\max}$ ,  $d_{\min}$ ,  $d_d$ ,  $T_d$ , аналогичные размеры отверстия –  $D$ ,  $D_{\max}$ ,  $D_{\min}$ ,  $D_d$ ,  $T_D$ .

Построение всех схем начинается с проведения *нулевой линии* – горизонтальной линии, соответствующей номинальному размеру, от которой откладываются отклонения размеров (вверх – со знаком плюс, вниз – со знаком минус).

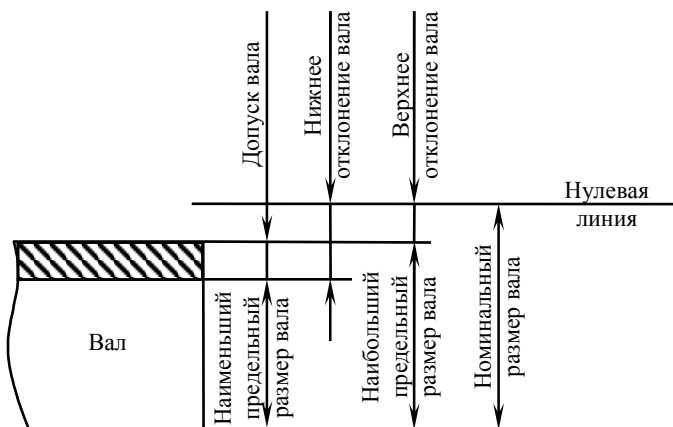


Рис. 6.1. Графическое изображение размеров и отклонений вала

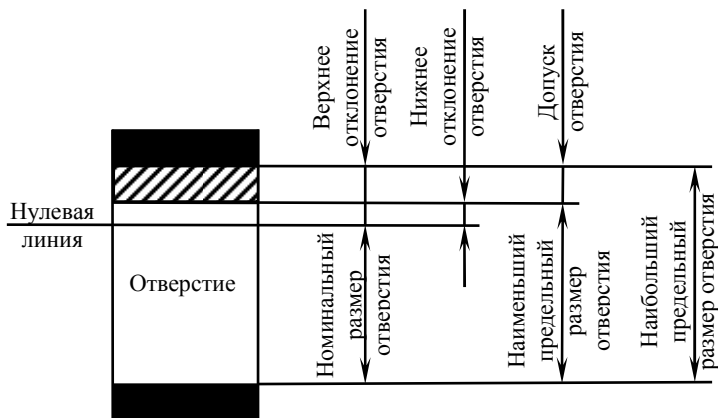


Рис. 6.1. Графическое изображение размеров и отклонений отверстия

### Посадки

Все разнообразные машины, станки, приборы, механизмы состоят из взаимосоединяемых деталей. Конструкции соединений и требования к ним могут быть различными. В зависимости от назначения соединения сопрягаемые детали машин и механизмов во время работы либо должны совершать относительно друг друга то или иное движение, либо, наоборот, сохранять относительно друг друга полную неподвижность.

Для обеспечения подвижности соединения нужно, чтобы действительный размер охватывающего элемента одной детали (отверстия) был больше действительного размера охватываемого элемента другой детали

(вала). Разность действительных размеров отверстия и вала, если размер отверстия больше размера вала, называется *зазором*.

Для получения неподвижного соединения действительный размер охватываемого элемента одной детали (вала) должен быть больше действительного размера охватывающего элемента другой детали (отверстия). Разность действительных размеров вала и отверстия до сборки, если размер вала больше размеров отверстия, называется *натягом*. После сборки размеры вала и отверстия при образовании натяга будут одинаковы, так как при сборке детали деформируются, чем и обеспечивается неподвижность соединения.

Технологический процесс сборки соединения с натягом осуществляется либо запрессовкой с усилием вала в отверстие (при малых натягах), либо за счёт увеличения непосредственно перед сборкой размера отверстия путём нагрева (при больших натягах).

Сопряжение, образуемое в результате соединения отверстий и валов (охватывающих и охватываемых элементов деталей) с одинаковыми номинальными размерами, обычно называют посадкой. Более точно такое определение: *посадка* – это характер соединения деталей, определяемый величиной получающихся в нём зазоров или натягов. Характер соединения зависит от действительных размеров сопрягаемых деталей перед сборкой, а номинальные размеры отверстия и вала, составляющих соединение, одинаковы.

Поскольку действительные размеры годных отверстий и валов в партии деталей, изготовленных по одним и тем же чертежам, могут колебаться между заданными предельными размерами, то, следовательно, и величина зазоров и натягов может колебаться в зависимости от действительных размеров сопрягаемых деталей. Поэтому различают *наибольший* и *наименьший зазоры* и соответственно *наибольший* и *наименьший натяги*.

Наибольший зазор  $S_{\max}$  равен разности между наибольшим предельным размером отверстия  $D_{\max}$  и наименьшим предельным размером вала  $d_{\min}$ :  $S_{\max} = D_{\max} - d_{\min}$ . Наименьший зазор  $S_{\min}$  равен разности между наименьшим предельным размером отверстия  $D_{\min}$  и наибольшим предельным размером вала  $d_{\max}$ :  $S_{\min} = D_{\min} - d_{\max}$ .

Наибольший натяг  $N_{\max}$  равен разности между наибольшим предельным размером вала  $d_{\max}$  и наименьшим предельным размером отверстия  $D_{\min}$ :  $N_{\max} = d_{\max} - D_{\min}$ . Наименьший натяг  $N_{\min}$  равен разности между наименьшим предельным размером вала  $d_{\min}$  и наибольшим предельным размером отверстия  $D_{\max}$ :  $N_{\min} = d_{\min} - D_{\max}$ .

**Пример 6.2.** На чертеже отверстия указан размер  $50^{+0,02}$ , а на чертеже сопрягаемого вала – размер  $50_{-0,06}^{-0,03}$ . Необходимо рассчитать наибольшие и наименьшие зазоры и натяги.

**Решение.**

Рассчитаем предельные размеры отверстия.

$$D_{\max} = D + E_s = 50,0 + 0,02 = 50,02 \text{ мм}; D_{\min} = D + E_i = 50,00 + 0 = 50,00 \text{ мм}.$$

Рассчитаем предельные размеры вала.

$$d_{\max} = d + e_s = 50,00 + (-0,03) = 49,97 \text{ мм}; \text{ наименьший } d_{\min} = d + e_i = 50,00 + (-0,06) = 49,94 \text{ мм}.$$

Из расчётов видно, что наибольший диаметр вала  $d_{\max} = 49,97$  мм меньше, чем наименьший диаметр отверстия  $D_{\min} = 50,00$  мм. То есть посадка с гарантированным зазором.

$$\text{Наибольший зазор } S_{\max} = D_{\max} - d_{\min} = 50,02 - 49,94 = 0,08 \text{ мм};$$

$$\text{наименьший зазор } S_{\min} = D_{\min} - d_{\max} = 50,0 - 49,97 = 0,03 \text{ мм}.$$

**Пример 6.3.** На чертеже отверстия указан размер  $50^{+0,02}$ , а на чертеже сопрягаемого вала – размер  $50^{+0,05}_{-0,03}$ . Необходимо рассчитать наибольшие и наименьшие зазоры и натяги.

**Решение.**

Предельные размеры отверстия: наибольший  $D_{\max} = 50,00 + 0,02 = 50,02$  мм; наименьший  $D_{\min} = 50,00$  мм.

Предельные размеры вала: наибольший  $d_{\max} = 50,00 + 0,05 = 50,05$  мм; наименьший  $d_{\min} = 50,00 + 0,03 = 50,03$  мм.

Из расчётов видно, что наименьший диаметр вала  $d_{\min} = 50,03$  мм больше, чем наибольший диаметр отверстия  $D_{\max} = 50,02$  мм. То есть посадка с гарантированным натягом.

Наибольший натяг  $N_{\max} = d_{\max} - D_{\min} = 50,05 - 50,00 = 0,05$  мм; наименьший натяг  $N_{\min} = d_{\min} - D_{\max} = 50,03 - 50,02 = 0,01$  мм.

Наряду с посадками с гарантированным зазором или натягом возможен и такой вариант, когда предельные размеры сопрягаемых деталей не гарантируют получение в сопряжении только зазора или только натяга. Такие посадки называются **переходными**, в этом случае возможно получение как зазора, так и натяга, конкретный характер соединения будет зависеть от действительных размеров сопрягаемых годных отверстий и валов.

Посадки с гарантированным зазором используются в тех случаях, когда допускается относительное смещение деталей; посадки с гарантированным натягом – когда необходимо передавать усилие или вращающий момент без дополнительного крепления только за счёт упругих деформаций, возникающих при сборке сопрягаемых деталей.

Переходные посадки имеют небольшие предельные зазоры и натяги и поэтому их применяют в тех случаях, когда необходимо обеспечить центрирование деталей, т.е. совпадение осей отверстия и вала; при этом в соединении требуется дополнительное закрепление соединяемых деталей.

Посадки всех трёх групп с зазорами, с натягами, переходные с различными величинами наибольших и наименьших зазоров и натягов можно получать, изменяя положение полей допусков обеих сопрягаемых деталей – отверстия и вала. Но, очевидно, таких сочетаний может оказаться бесчисленное множество, что привело бы к невозможности централизованного изготовления мерного режущего инструмента (свёрл, зенкеров, развёрток), формирующего размер отверстия.

Гораздо удобнее в технологическом (при изготовлении) и эксплуатационном (при ремонте) отношениях получать разнообразные посадки, изменяя положение поля допуска только одной детали при неизменном положении поля допуска другой.

Способ образования различных посадок изменением только полей допуска валов при постоянных полях допуска отверстий называется **системой отверстия**. Деталь, у которой положение поля допуска является базовым и не зависит от требуемого характера соединения, называют **основной деталью системы** (в рассмотренном случае – отверстие). Аналогичные посадки могут быть получены по-иному, если за основную деталь принять вал, а для образования различных посадок изменять поля допусков отверстий. Такой способ образования посадок называется **системой вала**.

Таким образом, **посадки в системе отверстия** – это посадки, в которых различные зазоры и натяги получаются соединением различных валов с основным отверстием (рис. 6.3); **посадки в системе вала** – это посадки, в которых различные зазоры и натяги получаются соединением различных отверстий с основным валом (рис. 6.4).

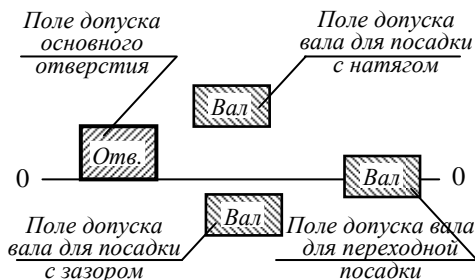


Рис. 6.3. Графическое изображение посадок в системе отверстия

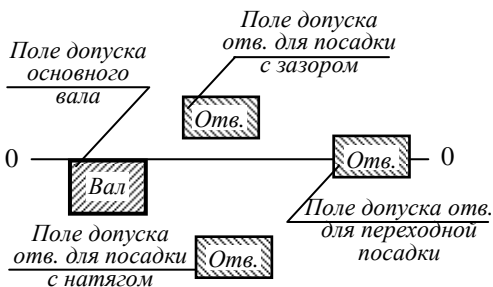


Рис. 6.4. Графическое изображение посадок в системе вала

В практике машиностроения предпочтение отдаётся системе отверстия, поскольку изготовить отверстие и измерить его значительно труднее и дороже, чем изготовить и измерить вал такого же размера с одинаковой точностью.

### Квалитет

**Квалитет** – это совокупность допусков, соответствующих одинаковой степени точности для всех номинальных размеров. Каждый квалитет характеризуется определённым числом единиц допуска – таков был принцип составления стандарта на основе строгой закономерности изменения величины допуска с учётом номинального размера.

Для размеров от 1 до 500 мм установлено девятнадцать квалитетов: 01, 0 и с 1-го по 17-й. С возрастанием номера квалитета допуск увеличивается, т.е. точность убывает. Для посадок предусмотрены квалитеты с 5-го по 12-й.

В ГОСТ 25346–82 приведены числовые значения допусков для каждого квалитета и с учётом номинальных размеров.

Допуски одинаковых размеров в разных квалитетах различны, т.е. квалитеты определяют различную точность одинаковых номинальных размеров. Назначение квалитета (а значит и допуска) конструктором и указание его на чертеже фактически задают технологию обработки деталей, так как различные способы обработки деталей обладают определённой экономически достижимой точностью.

Наиболее широко во всех отраслях машиностроения для ответственных сопряжений (посадок) применяются 6, 7-й квалитеты; в случае относительно больших зазоров и натягов – 8 – 10-й квалитеты; 11, 12-й квалитеты используются для грубых соединений.

Остальные квалитеты (чаще всего 12 – 14-й) используются для несопрягаемых элементов детали, в таких случаях размеры называют свободными.

### Поля допусков отверстий и валов

Поле допуска определяет величину допуска и его положение относительно номинального размера, а взаимное расположение полей допусков сопрягаемых деталей характеризует тип посадки и величины наибольших и наименьших зазоров или натягов. Посадки могут образовываться как в системе отверстия, так и в системе вала.

Для образования посадок в ЕСДП СЭВ стандартизованы (независимо друг от друга) два параметра, из которых образуются поля допусков: ряды номинальных размеров и значения допусков в разных квалитетах, а также основные отклонения валов и отверстий для определения положения поля допуска относительно номинального размера (нулевой линии). **Основное отклонение** это отклонение, ближайшее к нулевой линии, характеризующее возможное минимальное отклонение размера при обработке от номинального. Обозначается буквой латинского алфавита: прописной для отверстий (*A, B, C, D* и т.д.) и строчной для валов (*a, b, c, d* и т.д.).

Основными отклонениями служат: для валов  $a - h$  верхние отклонения  $-es$ ; для отверстий  $A - H$  нижние отклонения  $+EI$ ; для валов  $j - zc$  нижние отклонения  $+ei$ ; для отверстий  $J - ZC$  верхние отклонения  $-ES$ .

Основные отклонения валов при разработке ЕСПП СЭВ вычислены по эмпирическим формулам. Основные отклонения отверстий при этом подобраны так, чтобы допускать образование посадок в системе отверстия и в системе вала с равными зазорами и натягами. Таким образом, основные отклонения отверстий относительно нулевой линии являются зеркальным отражением основных отклонений валов.

Характер написания буквы (прописная или строчная) в конструкторской и технологической документации даёт полное представление об элементе детали (вал или отверстие), к которому относится поле допуска. Поля допусков основных отверстий обозначаются буквой  $H$ , а основных валов  $-h$  с добавлением номера качества, например  $H7$ ,  $H8$ ,  $H9$  и т.д., при этом нижние отклонения всегда равны нулю, и соответственно  $h7$ ,  $h8$ ,  $h9$  и т.д., при этом верхние отклонения всегда равны нулю.

### Посадки в системах отверстия и вала и их обозначения на чертежах

Для образования посадок в ЕСПП СЭВ используются качества с 6-го по 12-й, т.е. отверстия и валы обрабатываются с точностью, задаваемой допусками по этим качествам.

Обозначение посадки на сборочном чертеже в соответствии с ГОСТ 2.307–68\* состоит из указаний полей допусков сопрягаемых деталей, при этом указание оформляется как бы в виде простой дроби. Вначале записывается номинальный размер соединения (он одинаков для сопрягаемых отверстия и вала), затем над чертой (в числителе) указывается поле допуска отверстия, а под чертой (в знаменателе) – поле допуска вала. Вместо условных обозначений полей допусков можно указывать в числителе и знаменателе предельные отклонения сопрягаемых деталей. Такая форма обозначения посадок одинакова: и для посадок в системе отверстия, и для посадок в системе вала.

Например. Обозначение посадки в системе отверстия:

$$\varnothing 75 \frac{H7}{h6} \text{ (H7 – поле допуска основного отверстия) или } \varnothing 75 \frac{+0,030}{+0,039} \frac{+0,030}{+0,030}.$$

Обозначение посадки в системе вала:

$$\varnothing 50 \frac{E9}{h8} \text{ (h8 – поле допуска основного вала) или } \varnothing 50 \frac{+0,112}{+0,050} \frac{-0,039}{-0,039}.$$

Характер сопряжения (с зазором, с натягами или переходные) легко установить, если в соответствии с обозначением посадки изобразить её графически. Если поле допуска отверстия располагается над полем допус-



ка вала – это посадка с зазором, если поле допуска отверстия располагается под полем допуска вала – посадка с натягом, если поля допусков отверстия и вала полностью или частично перекрываются, то это переходная посадка.

Можно и без графического изображения посадки определить её группу, если после нахождения в таблицах величин предельных отклонений отверстия и вала сравнить их.

**Пример 6.4.** Определить характер сопряжения (группу посадки) для посадки  $36 \frac{H7}{p6}$ .

**Решение.**

По таблицам (прил.) определяем отклонения отверстия  $36H7$ :  $ES = +25 \text{ мк} = 0,025 \text{ мм}$  и отклонения вала  $36p6$ :  $es = +0,042 \text{ мм}$ ;  $ei = +0,026 \text{ мм}$ .

Рассчитаем предельные размеры отверстия.

$$D_{\max} = D + ES = 36,0 + 0,025 = 36,025 \text{ мм}; D_{\min} = D + EI = 36,00 + 0 = 36,00 \text{ мм}.$$

Рассчитаем предельные размеры вала.

$$d_{\max} = d + es = 36,00 + 0,042 = 36,042 \text{ мм}; \text{наименьший } d_{\min} = d + ei = 36,00 + 0,026 = 36,026 \text{ мм}.$$

Из расчётов следует, что любой возможный диаметр вала больше любого возможного диаметра отверстия, т.е. приведённая посадка является посадкой с натягом.

### Задачи для самостоятельного решения

По обозначению посадки на чертеже (табл. 6.1) определить:

1. К какой системе относится данная посадка (система вала или система отверстия).
2. Рассчитать параметры посадки, пользуясь приложениями.
3. Определить характер сопряжения деталей на основании расчётов максимальных и минимальных значений возможных зазоров и натягов.

### 6.1. Исходные данные

№ задачи	Обозначение посадки	№ задачи	Обозначение посадки	№ задачи	Обозначение посадки
1	$\varnothing 5 \frac{H6}{p5}$	4	$300 \frac{E9}{s6}$	7	$\varnothing 250 \frac{H8}{p6}$
2	$6 \frac{H7}{js6}$	5	$\varnothing 10 \frac{H8}{e8}$	8	$25 \frac{M7}{h6}$
3	$\varnothing 150 \frac{H8}{s7}$	6	$8 \frac{H7}{g6}$	9	$\varnothing 100 \frac{K7}{h6}$

№ задачи	Обозначение посадки	№ задачи	Обозначение посадки	№ задачи	Обозначение посадки
10	$50 \frac{H8}{z8}$	14	$5 \frac{H6}{p6}$	18	$6 \frac{H7}{p6}$
11	$\varnothing 145 \frac{N7}{r6}$	15	$\varnothing 70 \frac{H8}{h7}$	19	$\varnothing 245 \frac{E9}{s6}$
12	$15 \frac{K7}{s6}$	16	$2 \frac{Js7}{h6}$	20	$23 \frac{H8}{e8}$
13	$\varnothing 150 \frac{H8}{f7}$	17	$\varnothing 10 \frac{H7}{f7}$	21	$\varnothing 14 \frac{H7}{g6}$

### 6.2. Варианты заданий к практическому занятию № 6

№ варианта	№№ задач для решения	№ варианта	№№ задач для решения
1	1, 2, 3	11	4, 13, 19
2	4, 5, 6	12	5, 14, 18
3	7, 8, 9	13	6, 15, 17
4	10, 11, 12	14	7, 16, 21
5	13, 14, 15	15	1, 10, 13
6	16, 17, 18	16	2, 9, 14
7	19, 20, 21	17	3, 8, 15,
8	1, 8, 12	18	4, 7, 17
9	2, 7, 11	19	5, 12, 20
10	3, 6, 10	20	6, 11, 19

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение термину «взаимозаменяемость».
2. Для чего предназначена Единая система конструкторской документации ЕСКД?
3. Для чего предназначена Единая система технологической документации ЕСТД?
4. Какие размеры называются линейными, номинальными, действительными?
5. Что определяет действительное отклонение?
6. В чём отличие между допуском и полем допуска?

7. Как зависят требования к обработке детали от величины допуска?
8. Что такое «нулевая линия»?
9. Поясните на примере как получается посадка с зазором, посадка с натягом, переходная посадка?
10. Какие посадки называются посадками в системе отверстия?
11. Какие посадки называются посадками в системе вала?
12. Дайте определение термину «кавалитет». Сколько квалитетов установлено для размеров от 1 до 500 мм? Какие?
13. Как изменяются требования к точности обработки детали с возрастанием номера квалитета?
14. Что задаёт основное отклонение? Поясните на примере. Какие бывают отклонения? На что указывает характер написания буквы (прописная или строчная), задающей отклонение?
15. Каким образом обозначаются поля допусков основных отверстий и основных валов?
16. Поясните на примере способы обозначения посадок на сборочных чертежах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пономарев, С.В. Метрология, стандартизация, сертификация : учебник для вузов / С.В. Пономарев, Г.В. Шишкина, Г.В. Мозгова. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 96 с.
2. История метрологии, стандартизации, сертификации и управления качеством : учебное пособие / С.В. Мищенко, С.В. Пономарев, Е.С. Пономарева и др. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. – 94 с.
3. РМГ 29–99. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения. – М. : ИПК Издательство стандартов, 2000. – 50 с.
4. ГОСТ Р 50779.22–2005. Статистические методы. Статистическое представление данных. Точечная оценка и доверительный интервал для среднего. – М. : Стандартинформ, 2005. – 11 с.
5. Ганевский, Г.М. Допуски, посадки и технические измерения в машиностроении / Г.М. Ганевский, И.И. Гольдин. – М. : Высш. шк., 1987. – 270 с.
6. Колчков, В.И. Метрология, стандартизация и сертификация : учебник / В.И. Колчков. – М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2010. – 398 с.
7. Сергеев, А.Г. Метрология : учебник / А.Г. Сергеев. – М. : Логос, 2005. – 272 с.
8. Сергеев, А.Г. Метрология, стандартизация, сертификация : учебное пособие / А.Г. Сергеев, М.В. Латышев, В.В. Терегеря. – М. : Логос, 2003. – 536 с.
9. Димов, Ю.В. Метрология, стандартизация и сертификация : учебник для вузов / Ю.В. Димов. – СПб. : Питер, 2010. – 464 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Допуски и посадки ЕСДП

Интервалы размеров, мм	Поля допусков										
	<i>h5</i>	<i>g6</i>	<i>h6</i>	<i>js6</i>	<i>k6</i>	<i>n6</i>	<i>r6</i>	<i>f7</i>	<i>h7</i>	<i>s7</i>	<i>e8</i>
	Предельные										
От 1 до 3	0	-2	0	+3	+6	+10	+16	-6	0	+24	-14
	-4	-8	-6	-3	0	+4	+10	-16	-10	+14	-28
Св. 3 до 6	0	-4	0	+4	+9	+16	+23	-10	0	+31	-20
	-5	-12	-8	-4	+1	+8	+15	-22	-12	+19	-38
Св. 6 до 10	0	-5	0	+4,5	+10	+19	+28	-13	0	+38	-25
	-6	-14	-9	-4,5	+1	+10	+19	-28	-15	+23	-47
Св. 10 до 18	0	-6	0	+5,5	+12	+23	+34	-16	0	+46	-32
	-8	-17	-11	-5,5	+1	+12	+23	-34	-18	+28	-59
Св. 18 до 24	0	-7	0	+6,5	+15	+28	+41	-20	0	+56	-40
Св. 24 до 30	-9	-20	-13	-6,5	+2	+15	+28	-41	-21	+35	-73
Св. 30 до 40	0	-9	0	+8	+18	+33	+50	-25	0	+68	-50
Св. 40 до 50	-11	-25	-16	-8	+2	+17	+34	-50	-25	+43	-89
Св. 50 до 65	0	-10	0	+9,5	+21	+39	+60 +41	-30	0	+83 +53	-60
Св. 65 до 80	-13	-29	-19	-9,5	+2	+20	+62 +43	-60	-30	+89 +59	-106
Св. 80 до 100	0	-12	0	+11	+25	+45	+73 +51	-36	0	+83 +53	-72
Св. 100 до 120	-15	-34	-22	-11	+3	+23	+76 +54	-71	-35	+89 +59	-126
Св. 120 до 140	0	-14	0	+12,5	+28	+52	-	-43	0	-	-85
Св. 140 до 160	-18	-39	-25	-12,5	+3	+27	-	-83	-40	-	-148
Св. 160 до 180											
Св. 180 до 200	0	-15	0	+14,5	+33	+60	-	-50	0	-	-100
Св. 200 до 225	-20	-44	-29	-14,5	+4	+31	-	-96	-46	-	-172
Св. 225 до 250											
Св. 250 до 280	0	-17	0	+16	+36	+68	-	-56	0	-	-110
Св. 280 до 315	-23	-49	-32	-16	+4	+34	-	-108	-52	-	-191
Св. 315 до 355	0	-18	0	+18	+40	+73	-	-62	0	-	-125
Св. 355 до 400	-25	-54	-36	-18	+4	+37	-	-119	-57	-	-214
Св. 400 до 450	0	-20	0	+20	+45	+80	-	-68	0	-	-135
Св. 450 до 500	-27	-60	-40	-20	+5	+40	-	-131	-63	-	-232

(ГОСТ 25346–82 (с сокращениями))

ВАЛОВ, МКМ											
<i>u8</i>	<i>d9</i>	<i>e9</i>	<i>f9</i>	<i>h9</i>	<i>d11</i>	<i>h11</i>	<i>b12</i>	<i>h12</i>	<i>h14</i>	<i>h15</i>	<i>h16</i>
ОТКЛОНЕНИЯ, МКМ											
+32	-20	-14	-6	0	-20	0	-140	0	0	0	0
+18	-45	-39	-31	-25	-80	-60	-240	-100	-250	-400	-600
+41	-30	-20	-10	0	-30	0	-140	0	0	0	0
+23	-60	-50	-40	-30	-105	-75	-260	-120	-300	-440	-750
+50	-40	-25	-13	0	-40	0	-150	0	0	0	0
+28	-76	-61	-49	-36	-130	-90	-300	-150	-360	-580	-900
+60	-50	-32	-16	0	-50	0	-150	0	0	0	0
+33	-93	-75	-59	-43	-180	-110	-330	-180	-430	-700	-1100
+74	-65	-40	-20	0	-65	0	-160	0	0	0	0
+41	-117	-92	-72	-52	-195	-130	-370	-210	-520	-840	-1300
+81	-117	-92	-72	-52	-195	-130	-370	-210	-520	-840	-1300
+48	-117	-92	-72	-52	-195	-130	-370	-210	-520	-840	-1300
+99	-80	-50	-25	0	-80	0	-170	0	0	0	0
+60	-80	-50	-25	0	-80	0	-420	0	0	0	0
+109	-142	-112	-87	-62	-240	-160	-180	-250	-620	-1000	-1600
+70	-142	-112	-87	-62	-240	-160	-430	-250	-620	-1000	-1600
+133	-100	-60	-30	0	-100	0	-190	0	0	0	0
+87	-100	-60	-30	0	-100	0	-490	0	0	0	0
+148	-174	-134	104	-74	-290	-190	-200	-300	-740	-1200	-1900
+102	-174	-134	104	-74	-290	-190	-500	-300	-740	-1200	-1900
+176	-120	-72	-36	0	-120	0	-220	0	0	0	0
+124	-120	-72	-36	0	-120	0	-570	0	0	0	0
+196	-207	-159	-123	-87	-340	-220	-240	-350	-870	-1400	-2200
+144	-207	-159	-123	-87	-340	-220	-590	-350	-870	-1400	-2200
-	-145	-85	-43	0	-145	0	-260	0	0	0	0
-	-145	-85	-43	0	-145	0	-660	0	0	0	0
-	-245	-185	-143	-100	-395	-250	-280	-400	-1000	-1600	-2500
-	-245	-185	-143	-100	-395	-250	-680	-400	-1000	-1600	-2500
-	-245	-185	-143	-100	-395	-250	-310	-400	-1000	-1600	-2500
-	-245	-185	-143	-100	-395	-250	-710	-400	-1000	-1600	-2500
-	-170	-100	-50	0	-170	0	-340	0	0	0	0
-	-170	-100	-50	0	-170	0	-800	0	0	0	0
-	-285	-215	-165	-115	-460	-290	-380	-460	-1150	-1850	-2900
-	-285	-215	-165	-115	-460	-290	-840	-460	-1150	-1850	-2900
-	-285	-215	-165	-115	-460	-290	-420	-460	-1150	-1850	-2900
-	-285	-215	-165	-115	-460	-290	-880	-460	-1150	-1850	-2900
-	-190	-110	-56	0	-190	0	-480	0	0	0	0
-	-190	-110	-56	0	-190	0	-1000	0	0	0	0
-	-320	-240	-186	-130	-510	-320	-540	-520	-1300	-2100	-3200
-	-320	-240	-186	-130	-510	-320	-1050	-520	-1300	-2100	-3200
-	-210	-125	-62	0	-210	0	-600	0	0	0	0
-	-210	-125	-62	0	-210	0	-1170	0	0	0	0
-	-350	-265	-202	-140	-570	-360	-680	-570	-1300	-2100	-3200
-	-350	-265	-202	-140	-570	-360	-1250	-570	-1300	-2100	-3200
-	-230	-135	-68	0	-230	0	-760	0	0	0	0
-	-230	-135	-68	0	-230	0	-1390	0	0	0	0
-	-385	-290	-223	-155	-630	-400	-640	-630	-1550	-2500	-4000
-	-385	-290	-223	-155	-630	-400	-1470	-630	-1550	-2500	-4000

Интервалы размеров, мм	Поля допусков отверстий, мкм													
	Js6	K6	H7	Js7	K7	N7	F8	H8	H9	H11	H12	H14	H15	H16
	Предельные отклонения, мкм													
От 1 до 3	+3	0	+10	+5	0	-4	+20	+14	+25	+60	+100	+250	+400	+600
	-3	-6	0	-5	-10	-14	+6	0	0	0	0	0	0	0
Св. 3 до 6	+4	+2	+12	+6	+3	-4	+28	+18	+30	+75	+120	+300	+480	+750
	-4	-6	0	-6	-9	-15	+10	0	0	0	0	0	0	0
Св. 6 до 10	+4,5	+2	+15	+7	+5	-4	+35	+22	+36	+90	+130	+360	+580	+900
	-4,5	-7	0	-7	-10	-19	+13	0	0	0	0	0	0	0
Св. 10 до 18	+5,5	+2	+18	+9	+6	-5	+43	+27	+43	+110	+180	+430	+700	+1100
	-5,5	-9	0	-9	-12	-23	+16	0	0	0	0	0	0	0
Св. 18 до 24	+6,5	+2	+21	+10	+6	-7	+53	+33	+52	+130	+210	+520	+840	+1300
	-6,5	-11	0	-10	-15	-28	+20	0	0	0	0	0	0	0
Св. 24 до 30	+8	+3	+25	+12	+7	-8	+64	+39	+62	+160	+250	+620	+1000	+1600
	-8	-13	0	-12	-18	-33	+25	0	0	0	0	0	0	0
Св. 30 до 40	+9,5	+4	+30	+15	+9	-9	+76	+46	+74	+190	+300	+740	+1200	+1900
	-9,5	-15	0	-15	-21	-39	+30	0	0	0	0	0	0	0
Св. 40 до 50	+11	+4	+35	+17	+10	-10	+90	+54	+87	+220	+350	+870	+1400	+2200
	-11	-18	0	-17	-25	-45	+36	0	0	0	0	0	0	0

Интервалы размеров, мм	Поля допусков отверстий, мкм													
	Js6	K6	H7	Js7	K7	N7	F8	H8	H9	H11	H12	H14	H15	H16
Предельные отклонения, мкм														
Св. 120 до 140	+12,5	+4	+40	+20	+12	-12	+106	+63	+100	+250	+400	+1000	+1600	+2500
Св. 140 до 160	-12,5	-21	0	-20	-28	-52	+43	0	0	0	0	0	0	0
Св. 160 до 180														
Св. 180 до 200	+14,5	+5	+46	+23	+13	-14	+122	+72	+115	+290	+460	+1150	+1850	+2900
Св. 200 до 225	-14,5	-24	0	-23	-33	-60	+50	0	0	0	0	0	0	0
Св. 225 до 250														
Св. 250 до 280	+16	+5	+52	+26	+16	-14	+137	+81	+130	+320	+520	+1300	+2100	+3200
Св. 280 до 315	-16	-27	0	-26	-36	-66	+56	0	0	0	0	0	0	0
Св. 315 до 355	+18	+7	+57	+28	+17	-16	+151	+89	+140	+360	+570	+1400	+2300	+3600
Св. 355 до 400	-18	-29	0	-28	-40	-73	+62	0	0	0	0	0	0	0
Св. 400 до 450	+20	+8	+63	+31	+18	-17	+165	+97	+155	+400	+630	+1550	+2500	+4000
Св. 450 до 500	-20	-32	0	-31	-45	-80	+68	0	0	0	0	0	0	0

Учебное издание

# **МЕТРОЛОГИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ**

Методические указания

Составители:

ПОНОМАРЕВ Сергей Васильевич,  
ШИШКИНА Галина Викторовна,  
СЕРЕГИН Михаил Юрьевич,  
МОЗГОВА Галина Владимировна,  
САВЕНКОВ Александр Петрович

Редактор Л.В. Комбарова

Инженер по компьютерному макетированию И.В. Евсева

Подписано в печать 07.12.2011.

Формат 60×84 /16. 3,26 усл. печ. л. Тираж 50 экз. Заказ № 554

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14