ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
Магистратура. Заочное отделение

Преподаватель дисциплины: к.ф.-м.н., доцент Рукавишников Алексей Викторович

Определенный и двойной интегралы. Криволинейные интегралы I-го и II-го рода. Формула Остроградского-Грина.

Определенный интеграл.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b],\ a < b$.

1. Разобъем отрезок $[a, b]$ на n частичных отрезков: $(a = x_0, b = x_n)$
$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

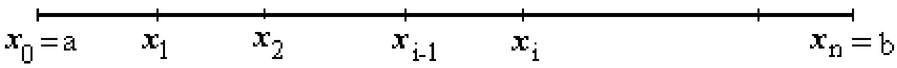

Рис. 1: Разбиение отрезка $[a, b]$

2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n$, выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n$, и вычислим значение функции в этой точке $f(c_i)$.

3. Умножим $f(c_i)$ на длину частичного отрезка $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$.

4. Составим интегральную сумму S_n функции $y = f(x)$ на $[a, b]$:

$$S_n = f(c_1)\triangle x_1 + f(c_2)\triangle x_2 + f(c_3)\triangle x_3 + \cdots + f(c_n)\triangle x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\triangle x_i.$$

5. Пусть $\triangle = \max\limits_{1 \le i \le n} \triangle x_i$.

6. Найдем предел интегральной суммы S_n, когда $n \to \infty$, так, что $\triangle \to 0$.

Определение.

Если интегральная сумма имеет предел I, который не зависит: а) ни от способа разбиения $[a, b]$ на частичные отрезки; б) ни от выбора точек c_i в них; то число I называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \triangle \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\triangle x_i,$$

a – нижний предел, b – верхний предел, $[a, b]$ – область интегрирования.

Теорема.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то определенный интеграл существует.

Важно. Определенный интеграл от неотрицательной функции равен площади криволинейной трапеции.

Теорема. (Формула Ньютона-Лейбница).

Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на $[a, b] (F'(x) = f(x))$, то имеет место формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Свойства определенного интеграла.

1. Если c – константа, то

$$\int\limits_a^b c\, f(x)dx = c \int\limits_a^b f(x)dx.$$

2. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то интегрируема на $[a, b]$ и их сумма (разность):

$$\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

3.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

4. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

5. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то из $f_1(x) \le f_2(x)$ на $[a, b]$ следует

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx \le \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

6.
$$\Big|\int\limits_a^b f(x)dx\Big| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Способы нахождения определенного интеграла.

Интегрирование подстановкой (заменой переменных).

Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ сделана подстановка $x = \varphi(t)$.

Теорема.
Если
1) Функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x'_t = \varphi'_t(t)$ непрерывна при $t \in [\alpha, \beta]$.
2) Множество значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[a, b]$.
3) $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'_t(t)dt.$$

Пример 1.
Вычислить $I = \int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение:
Сделаем замену $x = \varphi(t) := 2\sin t$. Так как $dx = \varphi'_t(t)dt$, то $dx = 2\,\cos t dt$. Произведем замену пределов интегрирования:
$\begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow t = 0, \\ x = 2 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ следовательно

$$I = \int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\;2\,\cos t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\,\cos^2 t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4t)dt = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4t)d(4t) = \pi - 0 = \pi.$$

Теорема.
Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то имеет место формула

$$\int\limits_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Пример 2.

С помощью интегрирования по частям вычислить интеграл $I = \int\limits_1^e x\ln x dx$.

Решение: Имеем
$$u = \ln x \Leftrightarrow du = \frac{1}{x}dx,$$
$$dv = xdx \Leftrightarrow v = \frac{x^2}{2},$$
тогда
$$I = \int_1^e x\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right)\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

Полярные координаты

.

Зависимость декартовых и полярных координат $\begin{cases} x = r\,\cos\varphi, \\ y = r\,\sin\varphi, \end{cases}$ где φ – полярный угол, а r – радиус вектор точки. При этом, будем полагать, что $r = r(\varphi)$. Кроме того, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Двойной интеграл

Двойной интеграл – обобщение определенного интеграла на случай функций двух переменных.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области D.

1. Разобъем область D на n "элементарных подобластей"$D_i, i = 1, \ldots, n$. Пусть $\triangle S_i$ – площадь $D_i, i = 1, \ldots, n$, d_i – диаметр D_i (см. рис 2).

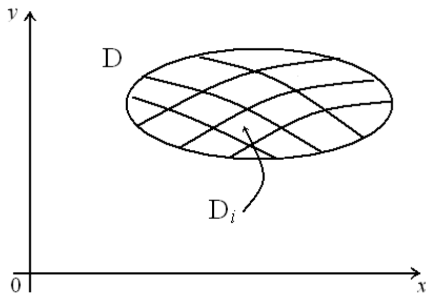

Рис. 2: Разбиение области D на элементарные подобласти $D_i, i = 1, \ldots, n$.

2. В каждом $D_i, i = 1, \ldots, n$, выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i) \in D_i, i = 1, \ldots, n$, и вычислим значение функции в этой точке $f(x_i, y_i)$.

3. Умножим $f(x_i, y_i)$ на $\triangle S_i$ – площадь $D_i, i = 1, \ldots, n$.

4. Составим интегральную сумму Σ_n функции $f(x, y)$ в области D :
$$\Sigma_n = f(x_1, y_1)\triangle S_1 + f(x_2, y_2)\triangle S_2 + f(x_3, y_3)\triangle S_3 + \cdots + f(x_n, y_n)\triangle S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i.$$

5. Пусть $d = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$.

6. Найдем предел интегральной суммы Σ_n, когда $n \to \infty$, так, что $d \to 0$.

Определение.

Если интегральная сумма имеет предел I, который не зависит: а) ни от способа разбиения D на части D_i; б) ни от выбора точек M_i в них; то число I называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, т.е.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \triangle\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\triangle S_i,$$

D – область интегрирования, x и y – переменные интегрирования, $dxdy = dS$ – элемент площади.

Свойства двойного интеграла.

1. Если c – константа, то

$$\iint\limits_D c\, f(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

2.

$$\iint\limits_D (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy.$$

3. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в D и $D = D_1 \cup D_2$ и $D_1 \cap D_2$ – их общая граница, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

4. Если $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ непрерывны в D, то из $f_1(x) \le f_2(x)$ в каждой точке D, следует

$$\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \le \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy.$$

5.

$$\iint\limits_D dS = S.$$

6. Если $f(x,y)$ непрерывна в D, то существует точка $(x_0,y_0) \in D$, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S.$$

Вычисление двойного интеграла.

В декартовых координатах вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

1. Положим, что область D правильная в направлении оси OY, т.е. вектор, параллельный вектору направляющему оси OY, пронизывает область D не более чем в двух точках. На рисунке в точках A и B. При этом $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$.

Построим сечение цилиндрического тела плоскостью, перпендикулярной оси OX, $x = const$, где $x \in [a, b]$ (см. рис. 3).

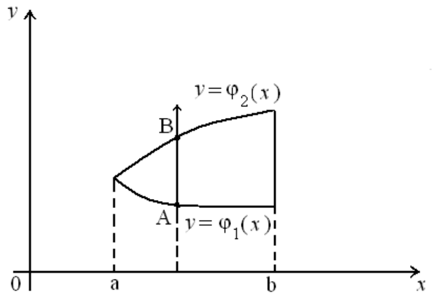

Рис. 3: Область правильная в направлении оси OY

Площадь $S(x)$ криволинейной трапеции в каждой точке $x \in [a, b]$:

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Теперь согласно методу параллельных сечений искомый объем цилиндрического тела (геометрический смысл двойного интеграла), может быть найден так (см. рис.4).

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = V = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{A=\varphi_1(x)}^{B=\varphi_2(x)} f(x, y)dy \Big) dx.$$

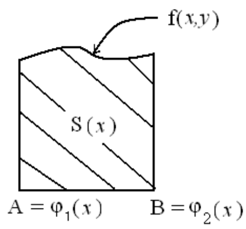

Рис. 4: Параллельное сечение $S(x)$ объема цилиндрического тела в точке $x \in [a, b]$

Для области D правильной в направлении оси OX: $y = c, y = d (c < d)$ ограниченную кривыми $x = \psi_1(y), x = \psi_2(y), \psi_1(y) \le \psi_2(y) \forall y \in [c, d]$ рассекаем плоскостью $y = const$, тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)dx \Big) dy.$$

Замечания.

1. Если область правильная в обоих направлениях, то можно использовать любую их формул.

2. Если исходная область не является правильной ни в одном направлении, то необходимо разбить ее на подобласти, правильные в каком-то из направлении.

3. Полезно помнить, что внешние пределы в повторном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Пример 3.

Вычислить $I = \iint\limits_D (x+2y)dxdy$, D – область, ограниченная линиями: $y = x^2, y = 0, x + y - 2 = 0$.

Решение:

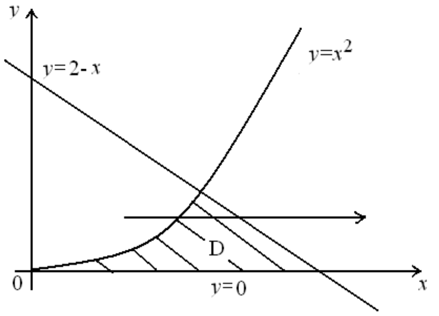

Рис. 5: Область D в примере 3

Область является правильной в направлении оси OX, тогда $\begin{cases} x = \sqrt{y} \Leftrightarrow x^2 = y, \\ x = 2 - y \Leftrightarrow x + y - 2 = 0, \end{cases}$ и

$$I = \iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)dx\Big)dy = \int\limits_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} + 2xy\Big)\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big(\frac{(2-y)^2}{2} + 2(2-y)y - \big(\frac{(\sqrt{y})^2}{2} + 2\sqrt{y}y\big)\Big)dy = \frac{29}{20}.$$

Формула вычисления двойного интеграла в полярных координатах.

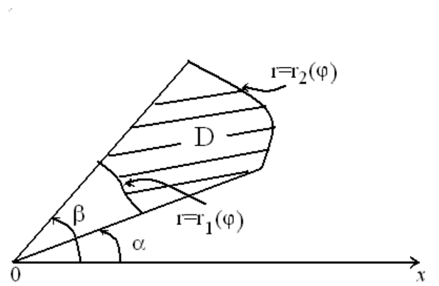

Рис. 6: Область D в полярных координатах

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \Big(\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr\Big)d\varphi.$$

Пример 4.

Вычислить $I = \iint\limits_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}dxdy$, D – область, ограниченная кругом: $x^2 + y^2 \leq 9$.

Решение:

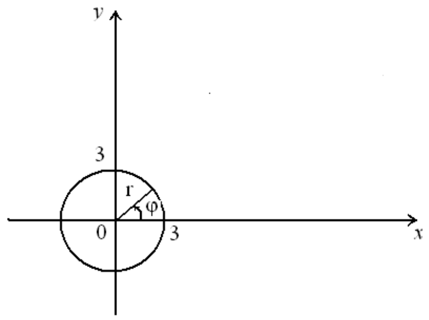

Рис. 7: Область D в полярных координатах для задачи 4

Полярный угол φ изменяется в диапазоне: $0 \le \varphi \le \pi$, радиус-вектор $r : 0 \le r \le 3$ (см. рис. 7).

$$I = \iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_0^3 r\cdot\sqrt{9-r^2}dr\Big)d\varphi = \Big\|rdr = -\frac{1}{2}\,d(9-r^2)\Big\| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_0^3 \cdot(9-r^2)^{\frac{1}{2}}d(9-r^2)\Big)d\varphi = -\frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}\cdot(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3\Big)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi = 9\int\limits_0^{2\pi}d\varphi = 18\,\pi.$$

Криволинейный интеграл I-го рода.

Пусть на плоскости OXY задана непрерывная кривая $AB(L)$ длины l. Рассмотрим $f(x,y)$ – неперерывную в каждой точке дуги AB. Далее см. рис. 8.

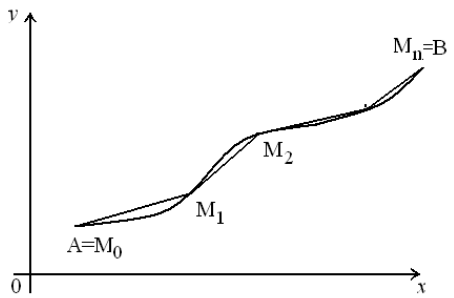

Рис. 8: Кривая AB в плоскости OXY

1. Разобъем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$ произвольным образом на n дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами $\triangle l_i, i = 1,\ldots,n$.

2. Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольную точку (x_i, y_i).

3. Вычислим $f(x_i, y_i)$ и составим для функции $f(x,y)$ по кривой AB интегральную сумму S_n :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\triangle l_i.$$

4. Пусть $\triangle = \max\limits_{1\le i\le n} l_i$.

5. Найдем предел интегральной суммы S_n, когда $n\to\infty$, так, что $\triangle\to 0$.

Определение.

Если интегральная сумма имеет предел I, который не зависит: а) ни от способа разбиения L на $M_{i-1}M_i$; б) ни от выбора точек (x_i, y_i) в них; то число I называется криволинейным интегралом от функции $f(x, y)$ по длине кривой L (I-го рода) и обозначается $\int\limits_{AB} f(x, y)dl$, т.е.

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \triangle\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle l_i,$$

Теорема.

Если $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой L (в любой точке кривой L существует касательная, положение которой непрерывно меняется при перемещении точки по кривой), то криволинейный интеграл I-го рода существует.

Замечание.

Аналогично вводится понятие криволинейного интеграла от функции $f(x, y, z)$ по пространственой кривой.

Свойства криволинейного интеграла I-го рода.

1.
$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_{BA} f(x, y)dl.$$

2. Если c – константа, то
$$\int\limits_{L} c\, f(x, y)dl = c \int\limits_{L} f(x, y)dl.$$

3.
$$\int\limits_{AB} (f_1(x, y) \pm f_2(x, y))dl = \int\limits_{AB} f_1(x, y)dl \pm \int\limits_{AB} f_2(x, y)dl.$$

4. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на L и $L = L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2$ – точка, то
$$\int\limits_{L} f(x, y)dl = \int\limits_{L_1} f(x, y)dl + \int\limits_{L_2} f(x, y)dl.$$

5. Если $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ непрерывны на L, то из $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ в каждой точке L следует
$$\int\limits_{L} f_1(x, y)dl \leq \int\limits_{L} f_2(x, y)dl.$$

6.
$$\int\limits_{L} dl = l.$$

7. Если $f(x,y)$ непрерывна на AB, то существует точка $(x_0, y_0) \in D$, что

$$\int\limits_L f(x,y)dl = f(x_0, y_0) \cdot l.$$

Вычисление криволинейного интеграла I-го рода.

Вычисление криволинейного интеграла I-го рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования.

Кривая L задана системой: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$ $x(t), y(t)$ – непрерывно дифференцируемы по t, A – соответствует $t = \alpha$, B – соответствует $t = \beta$:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt.$$

Явное представление кривой интегрирования.

Кривая L задана уравнением $y = \varphi(x), x \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'_x)^2}dx.$$

Пример 5.

Вычислить $I = \int\limits_L x \cdot y^2 dl$, L – отрезок прямой между точками $A(0;0)$ и $B(4;3)$.

Решение:

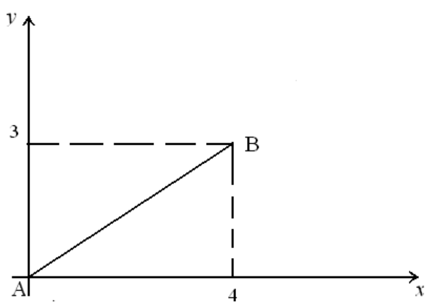

Рис. 9: Отрезок AB для примера 5

Уравнение прямой AB: $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x, \\ 0 \le x \le 4, \end{cases}$ тогда

$$I = \int\limits_L x \cdot y^2 dl = \int\limits_0^4 x \cdot (\frac{3}{4}x)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} dx = \frac{45}{64}\int\limits_0^4 x^3 dx = \frac{45}{64} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = 45.$$

Полярное представление кривой интегрирования.

Если кривая L задана уравнением $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$, в полярных координатах, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(rcos\varphi, rsin\varphi)\sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}d\varphi.$$

Пример 6.

Вычислить $I = \int\limits_L (x+y)dl$, где L задано уравнением в полярных координат $r = \sqrt{\sin(2\,\varphi)}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение:

Имеем

$$dl = \sqrt{\sin(2\,\varphi) + \frac{\cos^2(2\,\varphi)}{\sin(2\,\varphi)}}\,d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin(2\,\varphi)}} = \frac{d\varphi}{r},$$

тогда

$$I = \int\limits_L (x+y)dl = \int\limits_0^{\pi/2} (r\,\cos\varphi + r\,\sin\varphi)\frac{d\varphi}{r} = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = 2.$$

Криволинейный интеграл II-го рода.

Пусть на плоскости OXY задана непрерывная кривая $AB(L)$ длины l. Рассмотрим $P(x,y)$ – непрерывную в каждой точке дуги AB. Криволинейный интеграл II-го рода представляет решение задачи о вычислении работы переменной силы при перемещении материальной точки вдоль кривой L Далее см. рис. 10.

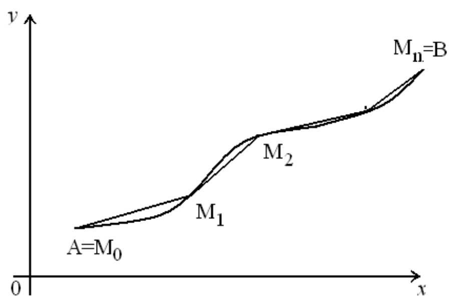

Рис. 10: Кривая AB в плоскости AB

1. Разобъем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$ произвольным образом на n х дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами $\triangle l_i, i = 1, \ldots, n$ в направлении от точки А до В.

2. Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольную точку (x_i, y_i).

3. Вычислим $P(x_i, y_i)$ и составим для функции $P(x,y)$ по кривой АВ интегральную сумму S_n :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i) \cdot \triangle x_i,$$

где $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ – проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на ось OX.

4. Пусть $\triangle = \max\limits_{1\le i\le n} l_i$.

5. Найдем предел интегральной суммы S_n, когда $n\to\infty$, так, что $\triangle\to 0$.

Определение.

Если интегральная сумма имеет предел, который не зависит: а) ни от способа разбиения L на $M_{i-1}M_i$; б) ни от выбора точек (x_i, y_i) в них; то этот предел называется криволинейным интегралом от функции $P(x, y)$ по координате x (II-го рода) и обозначается $\int\limits_{AB} P(x, y)dx$, т.е.

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \triangle\to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\triangle x_i,$$

Аналогично

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)dy = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \triangle\to 0}} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i)\triangle y_i,$$

где $\triangle y_i = y_i - y_{i-1}$ – проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на ось OY.

Теорема.

Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в каждой точке гладкой кривой AB, то криволинейный интеграл II-го рода существует.

Свойства криволинейного интеграла II-го рода.

1.

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = -\int\limits_{BA} P(x, y)dx.$$

2. Если c – константа, то

$$\int\limits_{AB} c\,P(x, y)dx = c\int\limits_{AB} P(x, y)dx.$$

3. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на AB и точка C делит на две дуги AC и CB, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \int\limits_{AC} P(x, y)dx + \int\limits_{CB} P(x, y)dx.$$

4. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой ($\oint$) не зависит от выбора начальной точки и зависит только от направления.

Явное представление кривой интегрирования.

Кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x), x\in[\alpha, \beta]$, где $\varphi(x)$ и $\varphi'_x(x)$– непрерывно дифференцируемые функции на $[a, b]$. Приняв x за параметр, имеем параметрическое уравнение кривой AB : $\begin{cases} x = x, \\ y = \varphi(x), x\in[a, b], \end{cases}$ то

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b} \Big[P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\cdot\varphi'_x(x)\Big]dx.$$

Пример 7.

Вычислить $I=\int\limits_L (x-y)^2dx+(x+y)^2dy$, где L – ломанная OAB, O(0;0), A(2;0), B(4;2).

Решение:

Ломанная $L: L = OA + AB$. Уравнение отрезка OA: $\begin{cases} y=0, \\ 0\le x\le 2. \end{cases}$

Уравнение отрезка AB: $\begin{cases} y=x-2, \\ 2\le x\le 4. \end{cases}$ Пусть $I = I_{OA}+I_{AB}$.

Вычислим I_{OA} :

$$I_{OA}=\int\limits_0^2 (x-0)^2dx+(x+0)^2\cdot 0dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

Вычислим I_{AB} :

$$I_{AB}=\int\limits_2^4 (x-(x-2))^2dx+(x+x-2)^2\cdot 1dx=\left(4\,\frac{x^3}{3}-8\frac{x^2}{2}+8\,x\right)\Big|_0^2=\frac{128}{3}.$$

Следовательно $I=I_{OA}+I_{AB}=45\frac{1}{3}$.

Связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе L этой области D.

Теорема. (формула Остроградского-Грина).

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в правильной области D, то имеет место формула

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

L – граница области D и интегрирование вдоль замкнутой кривой L производится в положительном направлении (область при обходе остается по левую сторону от границы).

Пример 8.

Вычислить с помощью формулы Остроградского-Грина криволинейный интеграл

$$I=\oint\limits_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$$

вдоль границы L треугольника ABC, против часовой стрелки, если $A(1;0), B(1;1), C(0;1)$.

Решение: Имеем

$$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2},\qquad Q(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2},$$

тогда

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{x^2+y^2-2\,y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\left(\frac{x^2+y^2-2\,x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Следовательно

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=0 \qquad \text{и} \qquad I=0.$$

Площадь плоской фигуры.

Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости OXY и ограниченной замкнутой линией L, можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

Задания для контрольной работы.

Необходимо решать все задачи.

1. С помощью интегрирования по частям вычислить определенный интеграл

$$I = \int\limits_0^{\pi} x\sin x dx.$$

2. Вычислить

$$I = \iint\limits_D (x^2 + 3xy)dxdy,$$

где D – область, ограниченная линиями: $y = x^3; y = 1; 2x + y - 12 = 0$.

3. Вычислить

$$I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

где D – область, заданная неравенствами $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.

4. Вычислить

$$I = \int\limits_L x^2 dl,$$

где кривая L задана уравнением $y = \ln x, 1 \le x \le e$.

5. Вычислить $I = \int\limits_L x \cdot ydl$, где L задано системой $\begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

6. Вычислить $I = \int\limits_L \frac{y^2+1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$, где $L = AB$ отрезок прямой от $A(1;2)$ до $B(2;4)$.

7. Вычислить с помощью формулы Остроградского-Грина криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_L (x^2 - y)dx - (x - y^2)dy$$

по дуге окружности $L : x^2 + y^2 = 5$.

8. Вычислить площадь плоской фигуры, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a\,\cos^3 t, a > 0, \\ y = a\,\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$