

Тема 1. Линейное программирование

Необходимо знать и уметь:

Знать:

- Основные этапы и принципы математического моделирования социально-экономических процессов ;
- Современные подходы к построению математических моделей социально-экономических систем;
- Классификацию экономико-математических моделей

Уметь:

- Разрабатывать математические модели исследуемых систем, проводить их анализ и оптимизацию основных параметров;
- Применять компьютерные технологии для анализа моделей и поиска решения.
- Обрабатывать и интерпретировать результаты моделирования.

Контрольные вопросы:

1. Оптимизационные задачи управления и этапы их решения.
2. Формулировка основной задачи линейного программирования (ОЗЛП).
3. Геометрическая интерпретация ОЗЛП.
4. Идея симплекс-метода. История возникновения.
5. Приведение задач линейного программирования к каноническому виду.
6. Алгоритм табличного симплекс-метода.
7. Прямая и двойственная задачи линейного программирования.
8. Основные теоремы двойственности. Экономический смысл двойственных оценок.
9. Формулировка транспортной задачи.
10. Закрытая и открытая транспортная задача.

Литература:

1. Красс М., Чупрынов Б. [Математика для экономистов: Учебное пособие](#) [Электронный ресурс]: СПб. : Питер, 2010, 464 с., УМО
2. Бережная, Е.В., Бережной, В.И. Математические методы моделирования экономических систем. –М.: Финансы и статистика, 2009. –432 с.

В контрольной работе необходимо выполнить 5 заданий (см. стр.35-40).

Студент выполняет задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его номера по списку (за исключением указаний в задаче).

Перед выполнением своего варианта заданий ознакомьтесь с презентацией лекции и решенными примерами.

Методы решения ОЗЛП и двойственной задачи.

Задача 1. Максимизировать целевую функцию. Решить задачу графо-аналитическим методом.

$$f(X) = 2x_1 + 2x_2$$

При ограничениях $3x_1 - 2x_2 \geq -6$; $3x_1 + x_2 \geq 3$; $x_1 \leq 3$.

Решение.

1 Заменяем знаки неравенств на знаки точных равенств и построим область решений

$$3x_1 - 2x_2 + 6 = 0;$$

$$3x_1 + x_2 - 3 = 0;$$

$$x_1 = 3.$$

Представим уравнения прямых в виде уравнения в отрезках.

$$-3/6x_1 + 2/6x_2 = 1;$$

$$\frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{3} = 1. a = -2; b = 3.$$

$$3x_1 + x_2 = 3;$$

$$x_1/1 + x_2/3 = 1; a = 1; b = 3.$$

Областью решения получается треугольник.

2 Построим линию уровня

$$f(X) = 2x_1 + 2x_2 = \text{const} = 0$$

$$x_2 = -x_1$$

Построим вектор – градиент

$$C = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \right) = (2, 2).$$

3 Будем перемещать линию уровня по направлению вектора градиента до пересечения с границей области возможных решений.

Данная линия пересечет границу области в точке $(3, 15/2)$. В данной точке функция примет максимальное значение.

4 Найдём максимальное значение функции

$$f(3, 15/2) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 15/2 = 21.$$

Задача 2. Минимизировать функцию $f(X) = 12x_1 + 4x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \geq 2$; $x_1 \geq 1/2$; $x_2 \leq 4$; $x_1 - x_2 \leq 0$.

Решение.

1 Заменяем знаки неравенств на знаки точных равенств и построим область решений

$$x_1 + x_2 = 2;$$

$$x_1 - x_2 = 0;$$

$$x_1 = 1/2;$$

$$x_2 = 4.$$

Представим уравнение прямой в виде уравнения в отрезках.

$$x_1 / 2 + x_2 / 2 = 1;$$

$$a = 2; b = 2.$$

Другое уравнение представим, как уравнение по угловому коэффициенту

$$x_2 = x_1$$

Областью решения получается четырехугольник.

2 Построим линию уровня

$$f(X) = 12x_1 + 4x_2 = \text{const} = 0$$

$$x_2 = -3x_1$$

Построим вектор – градиент:

$$C = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \right) = (12, 4).$$

3 Будем перемещать линию уровня по направлению, противоположному направлению градиента, до пересечения с границей области возможных решений. Прямая проходит через точку $M(1/2, 3/2)$. Это первая точка пересечения многоугольника решений с прямой в положительном направлении вектора C .

Данная линия пересечет границу области в точке $(3, 15/2)$. В данной точке функция примет минимальное значение.

4 Найдем минимальное значение функции:

$$f(1/2, 3/2) = 12/2 + 4 \cdot 3/2 = 12.$$

Задача 3. Построить начальный базис для целевой функции $f(X) = 5x_1 + 6x_2 - 5x_3 \rightarrow \min$ в минимум при следующих линейных ограничениях:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 \leq -15; \\ 2x_2 + 3x_3 \geq 24; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases},$$

Решение. В каноническом виде после введения дополнительных переменных x_4 и x_5 модель ЛП задавалась следующим образом: найти переменные x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 , обращающие целевую функцию $f(X) = 5x_1 + 6x_2 - 5x_3$ в минимум при следующих линейных ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 15; \\ 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 24; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}.$$

Так как дополнительные переменные вошли в уравнения со знаками «-», введем две искусственные переменные x_6 и x_7 .

Тогда модель ЛП примет вид: найти переменные $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, R_1, R_2$, обращающие целевую функцию $f(x) = 5x_1 + 6x_2 - 5x_3 + MR_1 + MR_2$ в минимум при следующих линейных ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 + R_1 = 15; \\ 2x_2 + 3x_3 - x_5 + R_2 = 24; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Приравняв все переменные, кроме искусственных, к нулю: $x_i = 0$ для всех $i = \overline{1,5}$, получаем начальное решение задачи, удовлетворяющее всем линейным ограничениям:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0; \quad R_1 = 15, \quad R_2 = 24.$$

Ответ. Начальный базис для реализации модели ЛП: $R_1 = 15, \quad R_2 = 24$. Переменные R_1 и R_2 – базисные; x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 – небазисные.

Задача 4 Построить начальный базис для следующей задачи. Модель ЛП формулируется следующим образом: найти переменные x_1, x_2, x_3 , обращающие целевую функцию $f(X) = 30x_1 + 23x_2 + 35x_3$ в максимум при следующих линейных ограничениях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 50; \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 40; \\ x_1 + x_2 \geq 4; \\ x_1 + x_3 \geq 3; \\ x_3 \geq 2; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 10; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Решение. В каноническом виде после введения дополнительных переменных x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 и перемены знака в целевой функции, задача формулировалась следующим образом: найти переменные $x_i, i = \overline{1,8}$, обращающие целевую функцию $f(X) = -30x_1 - 23x_2 - 35x_3$ в минимум при следующих линейных ограничениях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 50; \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_5 = 40; \\ x_1 + x_2 - x_6 = 4; \\ x_1 + x_3 - x_7 = 3; \\ x_3 - x_8 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 10; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,8}. \end{cases}$$

Дополнительные переменные x_4, x_5 вошли в уравнения со знаком +, следовательно, они войдут и в базис. Введем четыре искусственные переменные (в первые два уравнения искусственные переменные не вводятся): R_1, R_2, R_3, R_4 .

Модель ЛП примет следующий вид: найти переменные $x_i, i = \overline{1,8}$, обращающие целевую функцию $f(X) = -30x_1 - 23x_2 - 35x_3 + MR_1 + MR_2 + MR_3 + MR_4$ в минимум при следующих линейных ограничениях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 50; \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_5 = 40; \\ x_1 + x_2 - x_6 + R_1 = 4; \\ x_1 + x_3 - x_7 + R_2 = 3; \\ x_3 - x_8 + R_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + R_4 = 10; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 8} \end{cases}$$

Приравняв все неизвестные, кроме искусственных R_1, R_2, R_3, R_4 и дополнительных x_4, x_5 , к нулю, получим начальное решение задачи, удовлетворяющее всем линейным ограничениям:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = x_7 = x_8 = 0; x_4 = 50; x_5 = 40; R_1 = 4; R_2 = 3; R_3 = 2; R_4 = 10.$$

Ответ. Начальный базис для реализации модели ЛП:

$$x_4 = 50; x_5 = 40; R_1 = 4; R_2 = 3; R_3 = 2; R_4 = 10.$$

Переменные $x_4; x_5; R_1; R_2; R_3; R_4$ – базисные; $x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_8$ – небазисные.

Задача 5. Решить методом симплекс – таблиц задачу: Максимизировать $W(X) = 2x_1 + 5x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \leq 20, \\ x_2 \leq 30, \\ x_1 + x_2 \leq 40, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

1. Запишем задачу в стандартной форме, введя три остаточных переменных:

$$\text{Максимизировать } W(X) = 2x_1 + 4x_2 \Rightarrow W(X) - 2x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\text{при ограничениях } \begin{cases} x_1 + s_1 = 20, \\ x_2 + s_2 = 30, \\ x_1 + x_2 + s_3 = 40, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

и заполним симплекс – таблицу

Отыскать допустимое начальное базисное решение. Поскольку система ограничений содержит три линейные уравнения с пятью неизвестными, то любое ее базисное решение содержит три ненулевых компонент и две нулевые. Анализ ограничений показывает, что если переменным x_1, x_2 присвоить нулевое значение, получим допустимое (все переменные неотрицательны) базисное решение $s_1 = 20, s_2 = 30, s_3 = 40$. Запишем это решение в виде вектора $(0, 0, 20, 30, 40)$.

Заполним симплекс-таблицу

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решение
$W(X)$	-2	-4	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	0	20

S_2	0	1	0	1	0	30
S_3	1	1	0	0	1	40

Так как в целевой функции есть отрицательные коэффициенты, то увеличивая небазисные переменные, получим большие значения целевой функции. Следовательно, можно изменить базисные переменные.

Так как при переменной x_2 коэффициент больше, то будем вводить в базис данную переменную. Выберем переменную, выводимую из базиса. Для вывода переменной из базиса найдем

$$\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{i2}} \right\} = \min \{ 30 / 1, 40 / 1 \} = 30. \text{ Будем выводить из базиса переменную } S_2.$$

Ведущая строка (0,1,0,1,0,30).

З-строка.

$$\begin{aligned} \text{Текущая Z-строка:} & \quad (-2 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \\ -(-4) \times \text{Новая ведущая строка:} & \quad (0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \mid 30) \\ = \text{Новая Z-строка:} & \quad (-2 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \mid 120) \end{aligned}$$

Определим другие строки

Для s_1

$$\begin{aligned} & (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 20) \\ & - (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30)(0) \\ \hline & (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 20) \end{aligned}$$

Для s_3 :

$$\begin{aligned} & (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 40) \\ & - (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30)(1) \\ \hline & (1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 10) \end{aligned}$$

Симплекс-таблица принимает вид:

Базис	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Решение
Z	-2	0	0	4	0	120
S_1	1	0	1	0	0	20
x_2	0	1	0	1	0	30
S_3	1	0	0	-1	1	10

На следующей итерации введем в базис переменную x_1

Для вывода переменной из базиса найдем

$$\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{i1}} \right\} = \min \{ 10 / 1, 20 / 1 \} = 10. \text{ Будем выводить из базиса переменную } S_3.$$

Ведущая строка (1,0,0,-1,1,10).

З-строка.

$$\begin{aligned} \text{Текущая Z-строка:} & \quad (-2 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \mid 120) \\ -(-2) \times \text{Новая ведущая строка:} & \quad (1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \mid 10) \\ = \text{Новая Z-строка:} & \quad (0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \mid 140) \end{aligned}$$

Определим другие строки

Для s_1

$$\begin{aligned} & (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 30) \\ & - (1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 10)(1) \\ \hline & (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 20) \end{aligned}$$

Для x_2 :

$$\begin{aligned} & (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30) \\ & - (1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 10)(0) \\ \hline & (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30) \end{aligned}$$

Симплекс-таблица принимает вид:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Решение
$W(X)$	0	0	0	3	2	140
x_3	0	0	1	1	-1	20
x_2	0	1	0	1	0	30
x_1	1	0	0	-1	1	10

Ответ: $Z = -3x_4 - 2x_5 + 140$ (**max**) при $x_1 = 10, x_2 = 30$.

Задача 6. Найти максимум функции $\max Z = 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$

При ограничениях

$$x_1 - x_2 \geq 4,$$

$$x_1 \leq 10,$$

Решение

1 Приведем задачу к канонической форме

Введем дополнительные переменные

$$x_1 - x_2 - s_1 = 4,$$

$$x_1 + s_2 = 10,$$

Так как в первом ограничении переменная имеет знак минус, то введем искусственную переменную

$$x_1 - x_2 - s_1 + R = 4,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, R \geq 0.$$

Целевая функция примет вид $Z - 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + RM = 0$

Решим эту задачу табличным симплекс-методом.

Первая итерация 1, шаг 1. Определим допустимое начальное базисное решение M задачи. В качестве начальных базисных переменных возьмем искусственную переменную R и остаточную переменную s_2 . Так как в целевую функцию входят базисные переменные, то преобразуем целевую функцию

$$R = 4 - x_1 + x_2 + s_1$$

$$Z - 4x_1 - 2x_2 + M(4 - x_1 + x_2 + s_1) = 0;$$

$$Z - x_1(4 + M) - x_2(2 - M) + Ms_1 = -4M$$

Теперь можно составить начальную симплекс-таблицу, итерация 0.

Номер итерации	Базисные переменные	Переменные					Решение
		x_1	x_2	s_1	s_2	R	
0(начало вычислений)	Z	-(M+4)	(M-2)	M	0	0	-4M
	R	1	-1	-1	0	1	4
	s_2	1	0	0	1	0	10
1	Z	0	-6	-4	0	M+4	16
	x_1	1	-1	-1	0	1	4
	s_2	0	1	1	1	-1	6
2 оптимум	Z	0	0	2	6	M+4	52
	x_1	1	0	0	1	0	10
	x_2	0	1	1	1	-1	6

Анализ начальной симплекс-таблицы показывает, что допустимое начальное базисное

решение М-задачи оптимальным не является. Это следует из того, что коэффициент целевой функции при небазисной переменной x_1 равный $-(M+4)$ является отрицательным, так как по условию М- не определено большее число, а следовательно $M \gg 4$. Введению в базис подлежит x_1 .

Поскольку $4/1 < 10/1$, в соответствии с условием допустимости из базиса выведем переменную R. После чего начинаем новую итерацию.

Вторая итерация. Преобразуем строки начальной симплекс-таблицы.

Ведущая строка (1,-1,-1,0,1,4).

Z строка.

Текущая Z-строка: $(-(M+4) \quad M-2 \quad M \quad 0 \quad 0 \quad -4M)$

$-(-(M+4)) \times \text{Новая ведущая строка: } (1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 4)$

= Новая Z- строка: $(0 \quad -6 \quad -4 \quad 0 \quad M+4 \quad | \quad 16)$

Определим другие строки

Для s_2

$$\begin{array}{r} (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 10) \\ - (1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 4)(1) \\ \hline (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 6) \end{array}$$

Результаты преобразований представлены в табл. итерация 1.

Шаг 3. Анализ симплекс-таблицы, полученной после преобразований показывает, что оптимальное решение М-задачи пока не найдено, и переменная x_2 подлежит включению в базис.

Исключению из базиса подлежит переменная S_2 , поскольку именно для нее численное значение соотношения $\frac{b_i}{a_{ij}} = \min \{6/1\} = 6$; $a_{ij} > 0$ является минимальным.

Третья итерация, Ведущая строка (0,1,1,1,-1,6).

Z-строка.

Текущая Z-строка: $(0 \quad -6 \quad -4 \quad 0 \quad M+4 \quad 16)$

$-(-6) \times \text{Новая ведущая строка } (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad | \quad 6)$

= Новая Z-строка: $(0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad M+4 \quad | \quad 52)$

Определим другие строки

Для x_1

$$\begin{array}{r} (1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 4) \\ - (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 6)(-1) \\ \hline (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 10) \end{array}$$

Результаты преобразований представлены в табл. итерация 1.

Шаг 3. Поскольку после преобразования все коэффициенты в Z -строке таблицы оказались больше или равными нулю, полученное решение является оптимальным.

Как следует из таблицы, оптимальным решением М-задачи является вектор $X=(10,10,0,0,0)$, в котором искусственная переменная R оказалась равной нулю. Следовательно, первые две компоненты вектора оптимального решения М-задачи представляют собой оптимальный план решения исходной задачи, а величина линейной формы М задачи на ней равна величине линейной формы исходной задачи.

Максимальное значение функции равно 52.

Задача 7. Найти максимум функции $\max Z = x_1 + 2 \cdot x_2$.

При ограничениях

$$x_1 - x_2 \geq 6,$$

$$x_1 \leq 8,$$

Решение

1 Приведем задачу к канонической форме

Введем дополнительные переменные

$$x_1 - x_2 - s_1 = 6,$$

$$x_1 + s_2 = 8,$$

Так как в первом ограничении переменная имеет знак минус, то введем искусственную переменную

$$x_1 - x_2 - s_1 + R = 6$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, R \geq 0.$$

Целевая функция примет вид $Z - x_1 - 2 \cdot x_2 + RM = 0$

Решим эту задачу табличным симплекс-методом.

Первая итерация 1, шаг 1. Определим допустимое начальное базисное решение M задачи. В качестве начальных базисных переменных возьмем искусственную переменную R и остаточную переменную s_2 . Так как в целевую функцию входят базисные переменные, то преобразуем целевую функцию

$$R = 6 - x_1 + x_2 + s_1$$

$$Z - x_1 - 2x_2 + M(6 - x_1 + x_2 + s_1) = 0;$$

$$Z - x_1(1 + M) + x_2(M - 2) + Ms_1 = -6M$$

Теперь можно составить начальную симплекс-таблицу, итерация 0.

Номер итерации	Базисные переменные	Переменные					Решение
		x_1	x_2	s_1	s_2	R	
0(начало вычислений)	Z	$-(M+1)$	$(M-2)$	M	0	0	$-6M$
	R	1	-1	-1	0	1	6
	s_2	1	0	0	1	0	8
1	Z	0	-3	-1	0	$M+1$	6
	x_1	1	-1	-1	0	1	6
	s_2	0	1	1	1	-1	2
2 оптимум	Z	0	0	2	3	$M-2$	12
	x_1	1	-2	-2	-1	0	4
	x_2	0	1	1	1	-1	2

Анализ начальной симплекс-таблицы показывает, что допустимое начальное базисное решение M -задачи оптимальным не является. Это следует из того, что коэффициент целевой функции при небазисной переменной x_1 равный $-(M+1)$ является отрицательным, $M-2$ является положительным, так как по условию M - не определено большее число, а следовательно $M \gg 2$. Введению в базис подлежит x_1 .

Поскольку $6/1 < 8/1$, в соответствии с условием допустимости из базиса выведем переменную R . После чего начинаем новую итерацию.

Вторая итерация. Преобразуем строки начальной симплекс-таблицы.

Ведущая строка $(1, -1, -1, 0, 1, 6)$.

Z строка.

Текущая Z-строка:	$-(M+1)$	$(M-2)$	M	0	0	$-6M$
$-(-(M+1)) \times$ Новая ведущая строка:	1	-1	-1	0	1	6
= Новая Z- строка:	0	-3	-1	0	$M+1$	6

Определим другие строки

Для s_2

Текущая s_2 -строка:	1	0	0	1	0	8
$-1 \times$ Новая ведущая строка:	1	-1	-1	0	1	6
= Новая s_2 - строка:	0	1	1	1	-1	2

Результаты преобразований представлены в табл. итерация 1.

Шаг 3. Анализ симплекс-таблицы, полученной после преобразований показывает, что оптимальное решение М-задачи пока не найдено, и переменная x_2 подлежит включению в базис.

Исключению из базиса подлежит переменная s_2 , поскольку именно для нее численное значение соотношения $\frac{b_i}{a_{ij}} = \min \{6/1\} = 6; a_{ij} > 0$ является минимальным.

Третья итерация, Ведущая строка (0,1,1,1,-1,2).

Z строка.

Текущая Z-строка:	0	-3	-1	0	M+1	6
$-(-3) \times$ Новая ведущая строка:	0	1	1	1	-1	2
= Новая Z- строка:	0	0	2	3	M-2	12

Определим другие строки

Для x_1

Текущая x_1	1	-1	-1	0	1	6
$-1 \times$ Новая ведущая строка:	0	1	1	1	-1	2
= Новая x_1 - строка:	1	-2	-2	-1	0	4

Результаты преобразований представлены в табл. итерация 2.

Поскольку после преобразования все коэффициенты в Z -строке таблицы оказались больше или равными нулю, полученное решение является оптимальным.

Как следует из таблицы, оптимальным решением М-задачи является вектор $X=(8,2,0,0,0)$, в котором искусственная переменная R оказалась равной нулю. Следовательно, первые две компоненты вектора оптимального решения М-задачи представляют собой оптимальный план решения исходной задачи, а величина линейной формы М задачи на ней равна величине линейной формы исходной задачи.

Максимальное значение функции равно 12.

Задача 8. Минимизировать $W(X) = 4x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приведем задачу к стандартной форме, введя одну остаточную, одну избыточную и две искусственных переменных R_1 и R_2 . Две искусственные переменные вводятся потому, что первое и второе ограничение не имеют остаточных переменных, которые можно ввести в базис. Найдем искусственное начальное решение М методом.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + R_1 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

В базис вводятся дополнительные и остаточная переменная
Симплекс-таблица принимает вид

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	Решение
Z	-4+7M	-1+4M	-M	0	0	0	9M
R_1	3	1	0	0	1	0	3
R_2	4	3	-1	0	0	1	6
x_4	1	2	0	1	0	0	4

1 итерация. Поскольку решается задача минимизации, то находится наибольший положительный коэффициент.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	Решение
Z	0	(1+5M)/3	-M	0	(4-7M)/3	0	4+2M
x_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
R_2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2
x_4	0	5/3	0	1	-1/3	0	3

2 итерация

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	Решение
Z	0	(1+5M)/3	-M	0	(4-7M)/3	0	4+2M
x_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
x_2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2
x_4	0	5/3	0	1	-1/3	0	3

Сначала вычислим новую Z-строку:

	Старая Z-строка:	0	(1+5M)/3	-M	0	(4-7M)/3	0	4+2M
*(1+5M)/5	Ведущая строка	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2
	Новая Z-строка:	0	0	1/5	0	(16-55M)/15	-(1+M)/5	3,6

3 итерация.

После удаления искусственных переменных исходная задача будет записана

Задача 9. Исходная задача имеет вид:

$$f(X) = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Решение

Двойственная задача имеет вид

$$f(X) = 9y_1 + 6y_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -2y_1 + y_2 \leq 1 \\ 3y_1 - 6y_2 \leq 3 \\ -y_1 - y_2 \leq 1 \end{cases}$$

Решив графическим методом, получим

$$Y^* = (1/2, 2); S(Y^*) = 33/2.$$

По теореме двойственности $L(X^*) = 33/2$.

Так как значения в оптимальной точке известны, то можно подставить их в систему ограничений для двойственной задачи. Получим

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 2 = 3 \\ -2 \cdot 1/2 + 2 = 1 \\ 3 \cdot 1/2 - 6 \cdot 2 \leq 3 \\ -1/2 - 2 \leq 1 \end{cases}$$

Таким образом, первое и второе ограничения представляют собой равенства, а третье и четвертое неравенства. Следовательно, $x_3 = x_4 = 0$.

Ограничения в исходной задаче принимают вид

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$$

$$X^* = (21/4; 3/4; 0; 0);$$

Отсюда, $L(X^*) = 33/2$.

Пример Дана задача линейного программирования в нестандартной форме

$$\min Z = 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2,$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 = 5,$$

$$-x_1 + 5 \cdot x_2 \geq 3,$$

$$4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 8,$$

x_1 не ограничена в знаке, $x_2 \geq 0$.

Запишем эту задачу в стандартной форме. Для этого сделаем замену переменных $x_1 = x_1' - x_1''$, введем во второе ограничение избыточную переменную x_3 , а в третье - добавочную переменную x_4 . Получим

$$\min Z = 5 \cdot x_1' - 5 \cdot x_1'' + 6 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4,$$

$$x_1' - x_1'' + 2 \cdot x_2 = 5,$$

$$-x_1' + x_1'' + 5 \cdot x_2 - x_3 = 3,$$

$$4 \cdot x_1' - 4 \cdot x_1'' + 7 \cdot x_2 + x_4 = 8,$$

$$x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Сформулируем двойственную задачу. Поскольку в прямой задаче целевая функция минимизируется, целевая функция двойственной задачи имеет вид $\max W = 5 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 8 \cdot y_3$.

По этой же причине первое, второе и третье ограничения двойственной задачи, ассоциированные соответственно с переменными x_1', x_1'', x_2 записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 + 4 \cdot y_3 &\leq 5, \\ -y_1 + y_2 - 4 \cdot y_3 &\leq -5, \\ 2 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 + 7 \cdot y_3 &\leq 6. \end{aligned}$$

Поскольку переменная x_3 встречается только во втором, а переменная x_4 - только в третьем уравнении прямой задачи, ассоциированные с ними ограничения двойственной задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} 0 \cdot y_1 - y_2 + 0 \cdot y_3 &\leq 0, \\ 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + y_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из трех переменных двойственной задачи одна $-y_1$ оказалась неограниченной в знаке.

С помощью теорем двойственности, зная решение одной из задач можно найти оптимальное решение другой не решая ее.

Рассмотрим смешанную задачу.

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 - x_3 &\rightarrow \max; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 3; \\ 2x_1 + 3x_3 &\leq 4; \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Двойственная для нее задача будет иметь вид:

$$\begin{aligned} 3y_1 + 4y_2 &\rightarrow \min; \\ y_1 + 2y_2 &\geq 1; \\ 3y_1 &\geq -6; \\ 3y_1 + 3y_2 &\geq -1; \\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Если использовать каноническую форму задачи линейного программирования, то имеем дело с несимметричной задачей линейного программирования.

Пример

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &\rightarrow \max; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq 5; \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Каноническая форма задачи имеет вид:

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10;$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 5;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Двойственная задача будет иметь вид:

$$10y_1 + 5y_2 \rightarrow \min;$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 5;$$

$$2y_1 + y_2 \geq 2;$$

$$y_1 - 3y_2 \geq 1;$$

$$y_1 \geq 0;$$

$$y_2 \geq 0.$$

Задача. Решить прямую и двойственную задачи. Сравнить результаты решения. Прямую задачу решить симплекс методом. Двойственную графоаналитическим методом.

$$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

1. Решим прямую задачу линейного программирования
Стандартная форма задачи

$$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; s_1 \geq 0; s_2 \geq 0.$$

Целевая функция имеет вид:

$$z - x_1 - 2x_2 = 0.$$

Симплекс-таблица имеет вид

Этап	Базис	X1	X2	S1	S2	Решение
0	z	-1	-2	0	0	0
	S1	2	1	1	0	4
	S2	2	3	0	1	6
1	z	1/3	0	0	2/3	4
	S1	2	1	1	0	4
	X2	2	3	0	1	6

Z1

z	-1	-2	0	0	0
-2/3	2	3	0	1	6
	1/3	0	0	2/3	4

S1

S1	2	1	1	0	4
0	2	3	0	1	6

	2	1	1	0	4
--	---	---	---	---	---

Решение $X^* = (0 \ 2 \ 2 \ 0)$; $f(X^*) = 4$.

2. Построим двойственную задачу линейного программирования.

$$4y_1 + 6y_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + 3y_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0.$$

3. Решим задачу, используя теоремы двойственности.

$$x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j \right) = 0;$$

$$y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0;$$

$$x_2 \neq 0;$$

$$y_1 + 3y_2 = 2;$$

Подставим в ограничения значения переменных в целевой точке. Получим

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 < 4 \\ 3x_2 = 6 = 6. \end{cases}$$

Первое из двух ограничений является ограничением-строгим неравенством. Следовательно, $y_1 = 0$.

Тогда, $Y^* = (0 \ 2/3)$. Таким образом, теневая цена первого ресурса равна нулю.

Ресурс имеет нулевую ценность. Теневая цена второго ресурса равна 2/3. При увеличении ресурса будет расти доход. Решим задачу, если добавлена единица второго ресурса.

$$X^* = (0 \ 2,33 \ 1,67 \ 0); f(X^*) = 4,67.$$

Отчет по пределам устойчивости имеет вид

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Лист: [Книга1]Лист1

Отчет создан: 16.03.2014 20:05:01

Ячейки переменных

		Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
\$A\$2	x1	0	-0,333333333	1	0,333333333	1E+30
\$B\$2	x2	2	0	2	1E+30	0,5

Ограничения

		Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
\$C\$6		2	0	4	1E+30	2
\$C\$7		6	0,666666667	6	6	6

Задача. Определить устойчивость решения задачи ЛП.

Этап	Базис	X1	X2	S1	S2	Решение
0	z	-1	-2	0	0	0
	S1	2	1	1	0	4
	S2	2	3	0	1	6
1	z	1/3	0	0	2/3	4
	S1	2	1	1	0	4
	X2	2	3	0	1	6

$$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; s_1 \geq 0; s_2 \geq 0.$$

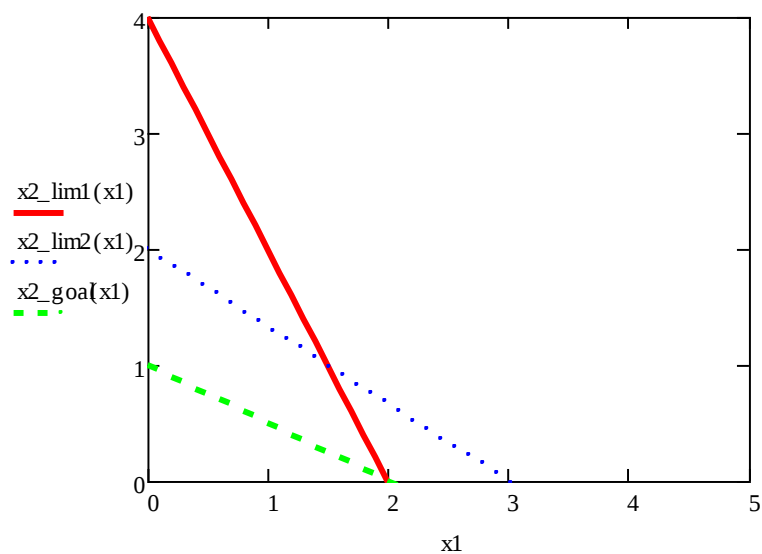
Решим задачу графоаналитическим методом

$$2x_1 + x_2 = 4.$$

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} = 1;$$

$$2x_1 + 3x_2 = 6;$$

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} = 1;$$



Первое ограничение. (красная линия). Сверху нет ограничений. Снизу – точка на оси x_1 (0,2).

$$2x_1 + x_2 = 2$$

Допустимые ограничения $x_1 \in [2, \infty)$.

Второе ограничение (синяя линия). Сверху ограничение – точка (0,4). Снизу ограничение – точка (0,0)

$$2x_1 + 3x_2 \Big|_{x_1=0, x_2=4} = 12;$$

$$2x_1 + 3x_2 \Big|_{x_1=0, x_2=0} = 6;$$

Допустимые ограничения $x_2 \in [4, 12]$ $\Delta b_2^l = 6 - 4 = 2$; $\Delta b_2^t = 12 - 6 = 6$; .

Ограничения на целевую функцию

Второе ограничение

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6;$$

$$c_1 / c_2 \leq 2 / 3;$$

$$c_2 = 2; \rightarrow c_1 = 4 / 3;$$

$$\Delta c_1 = 0,33$$

$$c_1 = 1;$$

$$c_2 / c_1 = 1 / 3;$$

$$c_2 = 1,5;$$

$$\Delta c_2 = 0,5$$

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Лист: [Книга1]Лист5

Отчет создан: 17.03.2014 22:21:13

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$A\$2	x1	0	-0,333333333	1	0,333333333	1E+30
\$B\$2	x2	2	0	2	1E+30	0,5

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$C\$6		2	0	4	1E+30	2
\$C\$7		6	0,666666667	6	6	6

Задача 10. Решение задачи ЛП средствами Excel.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$f(X) = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}$$

Выполнить поиск решения пошагово. Сохранить сценарий. Создать отчет с результатами поиска.

Задача 11. Решение задачи ЛП средствами Excel. Проверить устойчивость и пределы
Математическая постановка задачи имеет вид:

$$f(X) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110 \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16 \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Задача 12. Решение задачи ЛП средствами Excel.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$f(X) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 \leq 100 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 40 \\ 1 \leq x_1 \leq 12; x_3 \geq 2 \\ x_2 \geq 0; x_4 = 3. \end{cases}$$

Пусть в данной постановке переменные $x_1 - x_4$ означают количество выпускаемой продукции предприятием. Предполагается, что производится четыре вида продукции. Целевая функция определяет размер прибыли предприятия. Первое ограничение свидетельствует о сырьевых ресурсах. Второе – о финансовых расходах на производство продукции четырех видов. Третье ограничение свидетельствует о трудовых ресурсах. Необходимо определить размеры выпускаемой продукции для каждого вида, обеспечивающие максимум прибыли

Рассмотрим вторую постановку данной задачи, целью решения которой является минимизация расхода имеемых ресурсов. Для выполнения данной постановки представим рассматриваемую задачу в канонической форме, введя дополнительные переменные (остаточные)

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_1 = 110 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 + y_2 = 100 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + y_3 = 40 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

В данной постановке дополнительные переменные определяют величину неиспользованных ресурсов. Таким образом, чтобы решить задачу минимизации ресурсов, можно решить задачу максимизации неиспользованных ресурсов.

Методы решения транспортной задачи линейного программирования

Задача 1 Способом «северо-западного угла» построить исходный опорный план

Постав- щики	Мощ- ность постав- щиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		20	110	40	110
1	60	1 x_{11}	2 x_{12}	5 x_{13}	3 x_{14}
2	120	1 x_{21}	6 x_{22}	5 x_{23}	2 x_{24}
3	100	6 x_{31}	3 x_{32}	7 x_{33}	4 x_{34}

Р е ш е н и е. Дадим переменной x_{11} максимально возможное значение или, иными словами, максимально возможную поставку в клетку (1,1) — “северо-западный” угол таблицы поставок: $x_{11} = \min \{60, 20\} = 20$. После этого спрос 1-го потребителя будет полностью удовлетворен, в результате чего первый столбец таблицы поставок выпадет из последующего рассмотрения (заполненные клетки будем перечеркивать сплошной линией (см. табл. 7.2) клетки, выпавшие из последующего рассмотрения, перечеркнуты пунктирной линией. В таблице поставок найдем новый “северо-западный” угол — клетку (1,2) и дадим в нее максимально возможное значение. Учитывая, что 1-й поставщик уже отдал 20 единиц груза и у него осталось только $40 = 60 - 20$ единиц груза, получаем, что $x_{12} = \min \{40, 110\} = 40$. После этого мощность 1-го поставщика полностью реализована и из рассмотрения выпадет первая строка таблицы поставок (перечеркиваем сплошной линией клетку (1,2) и пунктирной линией оставшиеся свободные клетки первой строки). В оставшейся таблице снова находим “северо-западный угол” и т. д. В результате получаем следующее исходное распределение поставок (см. табл. 7.2).►

Число заполненных клеток в полученном распределении оказалось равным $m+n-1 = 3+4-1 = 6$, т.е. числу основных (базисных) переменных. Это, конечно, не случайно. Действительно, на каждом шаге (кроме последнего) данного метода из

Таблица 7.2

	20	110	40	110
60	1 20	2 40	5 40	3 10
120	1 40	6 70	5 40	2 10
100	6 40	3 70	7 40	4 100

рассмотрения выпадали либо строка, либо столбец, а на последнем шаге и строка, и столбец. Поэтому число заполненных клеток (число шагов) на единицу меньше, чем сумма числа строк и столбцов таблицы поставок, т.е. равно $m+n-1$. Оказывается (см. теорему 7.2), что эта особенность шагов метода “северо-западного” угла служит причиной того, что полученное распределение является базисным.

Задача 2 Способом наименьшего элемента построить исходный опорный план

Таблица 7.3

	20	110	40	110
60	1	2	5	3
120	1	6	5	2
100	6	3	7	4

Таблица 7.4

	20	110	40	110
60	1	2	5	3
120	1	6	5	2
100	6	3	7	4

Решение. Находим в таблице поставок (см. табл. 7.1) клетки с наименьшим коэффициентом затрат. Таких клеток две — (1,1) и (2,1) с коэффициентами затрат, равными 1. Сравним максимально возможные поставки для этих клеток: для клетки (1,1) $x_{11} = \min \{60, 20\} = 20$, для клетки (2,1) $x_{21} = \min \{120, 20\} = 20$. Так как они совпадают, то максимально возможную поставку даем

в любую из них. Например, даем поставку, равную 20 единицам, в клетку (2,1). В результате спрос первого потребителя удовлетворен и первый столбец таблицы поставок выпадает из последующего рассмотрения (табл. 7.3).

Таблица 7.5

	20	110	40	110
60	1	2	5	3
120	1	6	5	2
100	6	3	7	4

В оставшейся таблице наименьшим коэффициентом затрат обладают две клетки: $c_{12} = c_{24} = 2$. Сравним максимально возможные поставки для этих клеток: для клетки (1,2) $x_{12} = \min \{60, 110\} = 60$; для клетки (2,4) $x_{24} = \min \{120 - 20, 110\} = 100$. Даем поставку в клетку (2,4), для которой максимально возможная поставка оказалась больше: $x_{24} = 100$. При этом из рассмотрения выпадает вторая строка таблицы поставок (табл. 7.4).

Аналогично, продолжая заполнение таблицы поставок шаг за шагом, получаем $\bar{x}_{12} = \min \{60, 110\} = 60$, $\bar{x}_{32} = \min \{100, 110 - 60\} = 50$, $x_{34} = \min \{100 - 50, 110 - 100\} = 10$, $\bar{x}_{33} = \min \{100 - 60, 40\} = 40$ (табл. 7.5).►

Сравним найденное распределение поставок с распределением, полученным для той же задачи по методу “северо-западного” угла (см. задачу 7.2, табл. 7.2). Вычислим для каждого из этих распределений суммарные затраты в денежных единицах:

в задаче 7.2:

$$F_0 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 6 \cdot 70 + 5 \cdot 40 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 100 = 1140;$$

в задаче 7.3:

$$F_0 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 50 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 40 + 4 \cdot 10 = 810.$$

Как и ожидалось, при использовании метода “северо-западного” угла суммарные затраты больше, чем при применении метода наименьших затрат. Таким образом, во втором случае мы находимся ближе (по числу необходимых шагов) к оптимуму, чем в первом. Докажем, что распределения, получаемые с помощью указанных методов, являются базисными, и рассмотрим те особые случаи, которые могут встретиться при использовании этих методов.¹

Рассмотрим теперь те *особые случаи*, когда на некотором шаге заполнения из рассмотрения выпадают одновременно и строка и столбец. Укажем, как следует поступать, чтобы метод заполнения по-прежнему удовлетворял условиям теоремы 7.2 и получаемое распределение поставок было базисным.

Задача 3. способом «северо-западного угла» построить опорный план при условии вырожденности задачи

Р е ш е н и е. Воспользуемся методом “северо-западного” угла. На первом шаге следует дать поставку, равную 20 единицам, в клетку (1,1). В результате будет удовлетворен спрос 1-го потребителя и из рассмотрения выпадет первый столбец. На втором шаге поставку в 10 единиц следует дать в клетку (1,2). При

Таблица 7.6

	20	10	40
30	1	3	5
30	3	3	2
10	4	1	2

этом из последующего рассмотрения выпадет и 1-й поставщик (который реализовал остатки своего груза), и 2-й потребитель, полностью удовлетворивший свой спрос. Продолжая использовать метод “северо-западного” угла, мы получим, конечно, заполнение таблицы поставок, но число заполненных клеток окажется меньше, чем число основных (базисных) переменных, равное $m+n-1=3+3-1=5$. Такое распределение не будет базисным, и для продолжения решения распределительный метод будет неприемлем. Избежать этого можно, используя следующий искусственный прием.

Разобьем второй шаг на два шага. Допустим, что после поставки в клетку (1,2) из рассмотрения выпадает, например, только первая строка. Для того чтобы вывести из рассмотрения второй столбец, делаем еще один шаг: даем нулевую (фиктивную) поставку в произвольную, но не вычеркнутую клетку второго столбца, например, в клетку (2,2). После таких трех шагов имеем табл. 7.7.

Аналогично можно было допустить, что после второго шага из рассмотрения выпал только второй столбец. Тогда на третьем шаге нулевую поставку следует дать в произвольную, но не вычеркнутую клетку первой строки.

При последующем заполнении таблицы поставок используем метод “северо-западного” угла обычным способом. В результате получаем распределение поставок (табл. 7.8).►

Таблица 7.7

	20	10	40
30	1 20	3 10	3
30	3	3 0	2
10	4	1	2

Таблица 7.8

	20	10	40
30	1 20	3 10	3
30	3	3 0	2 30
10	4	1	2 10

Перечеркнутые сплошной чертой клетки, отвечающие базисным переменным, в дальнейшем будем называть заполненными, несмотря на то, что среди них возможны клетки с нулевыми поставками.

Рассмотренный искусственный прием применяется также при методе наименьших затрат, если при использовании этого метода на некотором шаге из рассмотрения выпадают одновременно и строка, и столбец.

Задача 4 Пусть опорное решение имеет вид

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i
A_1	2 90	5	2	90
A_2	4	1 300	5 100	400
A_3	3 50	6	8 60	110
Заявки b_j	140	300	160	600

Найти оптимальный план.

Решение

Проверим найденное решение на оптимальность, добавив в распределительную таблицу столбец u_i и строку v_j .

Полагая, $u_1 = 0$, запишем данное значение в таблицу. Для ячейки (1,1), расположенной в первой строке, выполнено условие $u_1 + v_1 = 2$; $v_1 = 2$. заполним полученную ячейку таблицы.

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	u_i
A_1	2 90	5	2	90	0
A_2	4	1 300	5 100	400	-2
A_3	3 50	6	8 60	110	1
Заявки	140	300	160		

b_j					
v_j	2	3	7		

Далее нужно анализировать ту ячейку таблицы, для которой потенциал известен.

Для занятой ячейки (3,1) $u_3 + v_1 = 3$; $v_1 = 2 \rightarrow u_3 = 1$.

Для ячейки (3,3) $u_3 + v_3 = 8$; $u_3 = 1 \rightarrow v_3 = 7$.

Для ячейки (2,3) $u_2 + v_3 = 5$; $v_3 = 7 \rightarrow u_2 = -2$.

Для ячейки (2,2) $u_2 + v_2 = 1$; $u_2 = -2 \rightarrow v_2 = 3$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу. Вычисляем оценки свободных ячеек.

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 < 0;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 > 0;$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 < 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 < 0.$$

Получили одну оценку больше нуля. Следовательно, полученное решение не является оптимальным. Следовательно, его можно улучшить.

Перейдем к другому решению, в котором нужно перераспределить груз, перемещая его из занятых ячеек в свободные.

Для свободной ячейки построим цикл, все вершины которого кроме одной находятся в занятых ячейках, углы прямые. Множество вершин четно. Около свободной ячейки ставят знак «+». Затем поочередно проставляют знаки (-) и (+). У вершин со знаком (-) выбирают груз с наименьшим весом и перемещают его в вершину со знаком (+). В результате перераспределения получается новое опорное решение.

Строим цикл для ячейки (1,3). У вершин цикла ставим оценки

90

-	+
+	-

50

60

С вершины со знаком (-) возьмем наименьшее значение. Оно равно 60. Его прибавляем к грузам со знаком (+) и отнимаем у грузов со знаком (-). Получаем новый цикл

30

60

+	-
-	+

110

Новое опорное решение, представленное матрицей, имеет вид:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученное решение на оптимальность.

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	u_i
A_1	2 30	5	2 60	90	0
A_2	4	1 300	5 100	400	3
A_3	3 110	6	8	110	1

Заявки b_j	140	300	160		
v_j	2	-2	2		

Найдем потенциалы занятых и оценки свободных ячеек.

Возьмем $u_1 = 0$.

Далее нужно анализировать ту ячейку таблицы, для которой потенциал известен.

Для занятой ячейки (1,3) $u_1 + v_3 = 2$; $\rightarrow v_3 = 2$.

Для ячейки (2,3) $u_2 + v_3 = 5$; $v_3 = 2 \rightarrow u_2 = 3$.

Для ячейки (2,2) $u_2 + v_2 = 1$; $u_2 = 3 \rightarrow v_2 = -2$.

Для ячейки (1,1) $u_1 + v_1 = 2$; $u_1 = 0 \rightarrow v_1 = 2$.

Для ячейки (3,1) $u_3 + v_1 = 3$; $v_1 = 2 \rightarrow u_3 = 1$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу. Вычисляем оценки свободных ячеек.

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 2 - 5 = -7 < 0;$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 3 + 2 - 4 = 1 > 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 - 2 - 6 = -7 < 0;$$

$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 1 + 2 - 8 = -5 < 0.$$

Шаг 3 Строим цикл для ячейки (2,1). У вершин цикла ставим оценки

30 60

-	+
+	-

100

С вершины со знаком (-) возьмем наименьшее значение. Оно равно 30. Его прибавляет к грузам со знаком (+) и отнимаем у грузов со знаком (-). Получаем новый цикл

90

+	-
-	+

30

70

Новое опорное решение, представленное матрицей, имеет вид:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученное решение на оптимальность.

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	u_i
$\underline{A_1}$	2	5	2	90	0
A_2	4	1	5	400	3
A_3	3	6	8	110	2
Заявки b_j	140	300	160		

v_j	1	-2	2		
-------	---	----	---	--	--

Найдем потенциалы занятых и оценки свободных ячеек.

Возьмем $u_1 = 0$.

Далее нужно анализировать ту ячейку таблицы, для которой потенциал известен.

Для занятой ячейки (1,3) $u_1 + v_3 = 2; \rightarrow v_3 = 2$.

Для ячейки (2,3) $u_2 + v_3 = 5; v_3 = 2 \rightarrow u_2 = 3$.

Для ячейки (2,2) $u_2 + v_2 = 1; u_2 = 3 \rightarrow v_2 = -2$.

Для ячейки (2,1) $u_2 + v_1 = 4; u_2 = 3 \rightarrow v_1 = 1$.

Для ячейки (3,1) $u_3 + v_1 = 3; v_1 = 1 \rightarrow u_3 = 2$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу. Вычисляем оценки свободных ячеек.

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1 - 2 = -1 < 0;$$

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 2 - 5 = -7 > 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 2 - 2 - 6 = -6 < 0;$$

$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 2 + 2 - 8 = -4 < 0.$$

Таким образом, все оценки свободных ячеек отрицательные. Следовательно, найденное решение является оптимальным.

Стоимость транспортных расходов равна

$$L(X^*) = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280.$$

По сравнению с исходным опорным решением транспортные расходы уменьшились на $1610 - 1280 = 330$ денежных единиц.

Задача 5 Пусть опорное решение имеет вид

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	7	13	9	8	240
		130		110	
A_2	14	8	7	10	40
		40			
A_3	3	15	20	6	110
	90			20	
Заявки b_j	90	190	40	130	

Найти оптимальный план.

Решение

$$\text{Запасы поставщиков } \sum_{i=1}^3 a_i = 390 \text{ тон. } \text{Запросы потребителей } \sum_{j=1}^4 b_j = 450.$$

Следовательно, задача не является закрытой. Чтобы сделать ее закрытой введем фиктивного производителя с грузом 60 т. Тариф фиктивного производителя зададим большой величиной для примера 20. Получим таблицу.

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	7	13	9	8	240
		130		110	
A_2	14	8	7	10	40

			40		
A_3	3	15	20	6	110
	90			20	
A_ϕ	20	20	20	20	
		60			
Заявки b_j	90	190	40	130	

Проверим найденное решение на оптимальность, добавив в распределительную таблицу столбец u_i и строку v_j .

Полагая, $u_1 = 0$, запишем данное значение в таблицу. Для ячейки (1,1), расположенной в первой строке, выполнено условие $u_1 + v_1 = 2$; $v_1 = 2$. заполним полученную ячейку таблицы.

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i	u_i
<u>A_1</u>	7	13	9	8	240	0
		130		110		
A_2	14	8	7	10	40	-5
		0	40			
A_3	3	15	20	6	110	-2
	90			20		
A_ϕ	20	20	20	20	60	7
		60				
Заявки b_j	90	190	40	130		
v_j	5	13	12	8		

Далее нужно анализировать ту ячейку таблицы, для которой потенциал известен.

Для занятой ячейки (1,2) $u_1 + v_2 = 13$; $u_1 = 0 \rightarrow v_2 = 13$.

Для ячейки (4,2) $u_4 + v_2 = 20$; $v_2 = 13 \rightarrow u_4 = 7$.

Число $m + n - 1 = 7$. Заполненных ячеек шесть. Следовательно, задача является вырожденной. Для того, чтобы сделать ее невырожденной. Для исключения вырожденности необходимо в какую-либо ячейку внести нулевую поставку. Такая ячейка становится условно занятой. При ее выборе целесообразно выбрать такую ячейку, чтобы тариф из возможных кандидатов был минимальным. Выдерем ячейку (2,2) в качестве условно занятой.

Для ячейки (2,2) $u_2 + v_2 = 8$; $v_2 = 13 \rightarrow u_2 = -5$.

Для ячейки (2,3) $u_2 + v_3 = 7$; $u_2 = -5 \rightarrow v_3 = 12$.

Для ячейки (1,4) $u_1 + v_4 = 8$; $u_1 = 0 \rightarrow v_4 = 8$.

Для ячейки (3,4) $u_3 + v_4 = 6$; $v_4 = 8 \rightarrow u_3 = -2$.

Для ячейки (3,1) $u_3 + v_1 = 3$; $u_3 = -2 \rightarrow v_1 = 5$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу. Вычисляем оценки свободных ячеек.

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 5 - 7 = -2 < 0;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 12 - 9 = 3 > 0;$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -5 + 5 - 14 = -14 < 0;$$

$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -5 + 8 - 10 = -7 < 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 13 - 15 = -4 < 0;$$

$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -2 + 12 - 20 = -10 < 0;$$

$$\Delta_{\phi 1} = u_{\phi} + v_1 - c_{\phi 1} = 7 + 5 - 20 = -8 < 0;$$

$$\Delta_{\phi 3} = u_{\phi} + v_3 - c_{\phi 3} = 7 + 12 - 20 = -1 < 0;$$

$$\Delta_{\phi 4} = u_{\phi} + v_4 - c_{\phi 4} = 7 + 8 - 20 = -5 < 0.$$

Получили одну оценку больше нуля. Следовательно, полученное решение не является оптимальным. Следовательно, его можно улучшить.

Шаг 2 Перейдем к другому решению, в котором нужно перераспределить груз, перемещая его из занятых ячеек в свободные.

Для свободной ячейки (1,3) построим цикл, все вершины которого кроме одной находятся в занятых ячейках, углы прямые. Множество вершин четно. Около свободной ячейки ставят знак «+». Затем поочередно проставляют знаки (-) и (+). У вершин со знаком (-) выбирают груз с наименьшим весом и перемещают его в вершину со знаком (+). В результате перераспределения получается новое опорное решение.

Строим цикл для ячейки (1,3). У вершин цикла ставим оценки

130

-	+
+	-

0

40

С вершины со знаком (-) возьмем наименьшее значение. Оно равно 40. Его прибавляет к грузам со знаком (+) и отнимаем у грузов со знаком (-). Получаем новый цикл

90

40

+	-
-	+

40

Новое опорное решение, представленное матрицей, имеет вид:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученное решение на оптимальность.

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i	u_i
A_1	7	13	9	8	240	0
		90	40	110		
A_2	14	8	7	10	40	-5
		40				
A_3	3	15	20	6	110	-2
	90			20		
A_{ϕ}	20	20	20	20	60	7
		60				
Заявки	90	190	40	130		

b_j						
v_j	5	13	9	8		

Найдем потенциалы занятых и оценки свободных ячеек.

Возьмем $u_1 = 0$.

Далее нужно анализировать ту ячейку таблицы, для которой потенциал известен.

Для занятой ячейки (1,4) $u_1 + v_4 = 8; \rightarrow v_4 = 8$.

Для занятой ячейки (1,3) $u_1 + v_3 = 9; \rightarrow v_3 = 9$.

Для занятой ячейки (1,2) $u_1 + v_2 = 13; \rightarrow v_2 = 13$.

Для ячейки (2,2) $u_2 + v_2 = 8; v_2 = 13 \rightarrow u_2 = -5$.

Для ячейки (3,4) $u_3 + v_4 = 6; v_4 = 8 \rightarrow u_3 = -2$.

Для ячейки (3,1) $u_3 + v_1 = 3; u_3 = -2 \rightarrow v_1 = 5$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу. Вычисляем оценки свободных ячеек.

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 5 - 7 = -2 < 0;$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -5 + 5 - 14 = -14 < 0;$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -5 + 9 - 7 = -3 < 0;$$

$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -5 + 8 - 10 = -7 < 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 13 - 15 = -4 < 0;$$

$$\Delta_{\phi 1} = u_{\phi} + v_1 - c_{\phi 1} = 7 + 5 - 20 = -8 < 0;$$

$$\Delta_{\phi 3} = u_{\phi} + v_3 - c_{\phi 3} = 7 + 9 - 20 = -4 < 0;$$

$$\Delta_{\phi 4} = u_{\phi} + v_4 - c_{\phi 4} = 7 + 8 - 20 = -5 < 0.$$

Таким образом, все оценки свободных ячеек отрицательные. Следовательно, найденное решение является оптимальным.

Стоимость транспортных расходов равна

$$L(X^*) = 90 \cdot 13 + 40 \cdot 9 + 110 \cdot 8 + 40 \cdot 8 + 90 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 3120.$$

По сравнению с исходным опорным решением транспортные расходы уменьшились на $1610 - 1280 = 330$ денежных единиц.

Задача 1 Найти опорный план транспортной задачи методами «Северо-западного угла», «Наименьшей стоимости», «Фогеля»:

Задача 6

	B1	B2	B3	Запасы a_i
A1	4	2	4	6
A2	4	3	2	2
A3	2	5	3	6
Заявки b_j	5	5	4	

	B1	B2	B3	Запасы a_i
A1	5			1
A2				2
A3				6
Заявки b_j	0	5	4	

	B1	B2	B3	Запасы a_i
A1	5	1		0
A2				2
A3				6
Заявки b_j	0	5	4	

	B1	B2	B3	Запасы a_i
A1	5	1		0
A2		2		0
A3				6
Заявки b_j	0	2	4	

	B1	B2	B3	Запасы a_i
A1	5	1		0
A2		2		0
A3		2		4
Заявки b_j	0	0	4	

	B1	B2	B3	Запасы a_i
A1	5	1		0
A2		2		0
A3		2	4	0
Заявки b_j	0	0	0	

Проверим найденное решение на оптимальность, добавив в распределительную таблицу столбец u_i и строку v_j .

	B1	B2	B3	Запасы a_i
A1	4	2	4	6
A2	4	3	2	2
A3	2	5	3	6
Заявки b_j	5	5	4	

Полагая, $u_1 = 0$, запишем данное значение в таблицу. Для ячейки (1,1), расположенной в первой строке, выполнено условие $u_1 + v_1 = 4$; $v_1 = 4$. заполним полученную ячейку таблицы.

ПО \ ПН	B1	B2	B3	Запасы a_i	u_i
<u>A1</u>	4 5	2 1	4	6	0
A2	4	3 2	2	2	1
A3	2	5 2	3 4	6	3
Заявки b_j	5	5	4		
v_j	4	2	0		

$$X_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Далее нужно анализировать ту ячейку таблицы, для которой потенциал известен.

Для занятой ячейки (1,2) $u_1 + v_2 = 2; u_1 = 0 \rightarrow v_2 = 2$.

Для ячейки (2,2) $u_2 + v_2 = 3; v_2 = 2 \rightarrow u_2 = 1$.

Для ячейки (3,2) $u_3 + v_2 = 5; v_2 = 2 \rightarrow u_3 = 3$.

Для ячейки (3,3) $u_3 + v_3 = 3; u_3 = 3 \rightarrow v_3 = 0$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу. Вычисляем оценки свободных ячеек.

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 4 = 0;$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 1 + 4 - 4 = 1 > 0;$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 1 + 0 - 2 = -1 < 0;$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 4 - 2 = 5 > 0.$$

Получили три оценки больше нуля. Следовательно, полученное решение не является оптимальным. Следовательно, его можно улучшить. Выберем максимальную из них.

Перейдем к другому решению, в котором нужно перераспределить груз, перемещая его из занятых ячеек в свободные.

Для свободной ячейки построим цикл, все вершины которого кроме одной находятся в занятых ячейках, углы прямые. Множество вершин четно. Около свободной ячейки ставят знак «+». Затем поочередно проставляют знаки (-) и (+). У вершин с о знаком (-) выбирают груз с наименьшим весом и перемещают его в вершину со знаком (+). В результате перераспределения получается новое опорное решение.

Строим цикл для ячейки (3,1). У вершин цикла ставим оценки

5	-	1	+
	+	2	-

С вершины со знаком (-) возьмем наименьшее значение. Оно равно 2. Его прибавляет к грузам со знаком (+) и отнимаем у грузов со знаком (-). Получаем новый цикл

3	3
2	0

Новое опорное решение, представленное матрицей, имеет вид:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученное решение на оптимальность.

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	u_i
A_1	4 3	2 3	4	6	0
A_2	4	3 2	2	2	1
A_3	2	5	3	6	-2

	2		4		
Заявки b_j	5	5	4		
v_j	4	2	5		

Шаг 2

Найдем потенциалы занятых и оценки свободных ячеек.

Возьмем $u_1 = 0$.

Далее нужно анализировать ту ячейку таблицы, для которой потенциал известен.

Для занятой ячейки (1,1) $u_1 + v_1 = 4; \rightarrow v_1 = 4$.

Для ячейки (1,2) $u_1 + v_2 = 2; u_1 = 0 \rightarrow v_2 = 2$.

Для ячейки (2,2) $u_2 + v_2 = 3; v_2 = 2 \rightarrow u_2 = 1$.

Для ячейки (3,1) $u_3 + v_1 = 2; v_1 = 4 \rightarrow u_3 = -2$.

Для ячейки (2,3) $u_3 + v_3 = 3; u_3 = -2 \rightarrow v_3 = 5$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу. Вычисляем оценки свободных ячеек.

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 1 > 0;$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 1 > 0;$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 4 > 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 2 - 5 = -5 < 0.$$

Максимальное значение равно 4. Введем соответствующие переменные в базис.

3-	3+	
0	2-	+
2+	0	4-

Минимальное значение у элементов со знаком «-» равно 2. Изменим значения переменных.

Получим

1	5	
0	0	2
4	0	2

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем потенциалы занятых и оценки свободных ячеек.

Возьмем $u_1 = 0$.

Далее нужно анализировать ту ячейку таблицы, для которой потенциал известен.

Для занятой ячейки (1,1) $u_1 + v_1 = 4; \rightarrow v_1 = 4$.

Для ячейки (1,2) $u_1 + v_2 = 2; u_1 = 0 \rightarrow v_2 = 2$.

Для ячейки (3,1) $u_3 + v_1 = 2; v_1 = 4 \rightarrow u_3 = -2$.

Для ячейки (3,3) $u_3 + v_3 = 3; u_3 = -2 \rightarrow v_3 = 5$.

Для ячейки (2,3) $u_2 + v_3 = 2; v_3 = 5 \rightarrow u_2 = -3$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу. Вычисляем оценки свободных ячеек.

	B1	B2	B3	ui
A1			1	0
A2	-3	-4		-3
A3		-5		-2
vi	4	2	5	

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 5 - 4 = 1 > 0$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -3 + 4 - 4 = -3 < 0$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -3 + 2 - 3 = -4 < 0$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 2 - 5 = -5 < 0$$

Есть один положительный элемент

Шаг 4

1-	+
4+	2-

Минимальное число со знаком – равно 1. Изменим элементы свободные и базисные.

Получим

0	1
5	1

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

	B1	B2	B3	ui
A1		5	1	0
A2			2	-2
A3	5		1	-1
vi	4	2	4	

	B1	B2	B3	ui
A1	0			
A2	-2	-3		
A3		-4		
vi				

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 4 - 4 = 0 = 0$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 4 - 4 = -2 < 0$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -2 + 2 - 3 = -3 < 0$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -1 + 2 - 5 = -4 < 0$$

Таким образом, нет положительных элементов. Задача поиска оптимума решена.

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции

$$Z = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 33$$

Задача о назначениях.

Пример. Имеется четыре исполнителей работ и 4 вида работ. В матрице указано время, расходуемое при выполнении i -м исполнителем j -й работы. Необходимо минимизировать время.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вычтем минимальные числа из каждой строки. Получим

$$C2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Так как минимальное назначение не получено (второй, третий и четвертый столбцы). Вычитая из каждого столбца минимальное значение, получим

$$C3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Ни одно из назначений не получено (должно быть в каждой строке и столбце по одному нулю). Проводим минимальное число прямых через строки и столбцы так, чтобы удалить все нули. Получим

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Минимальный элемент матрицы равен 2. Вычеркиваем его из всех невычеркнутых элементов и складываем со значениями элементов, стоящими на пересечении вычеркиваемых строк и столбцов. Получим

$$C3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Выбираем элементы так, чтобы нулевые элементы были во всех строках и во всех столбцах.

Получим

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Суммарное время выполнения работ равно

Контрольная работа

Задача 1. Решить ОЗЛП графическим методом:

1.	$W = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 6; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4. \end{cases}$	6.	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 30; \\ 2x_1 + x_2 \leq 20. \end{cases}$
2.	$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} x_1 \geq 4; \\ x_2 \geq 3; \\ x_1 + x_2 \leq 8. \end{cases}$	7.	$W = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ -x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$
3.	$W = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7; \\ x_1 \leq 3; \\ x_2 \leq 1. \end{cases}$	8.	$W = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8. \end{cases}$
4.	$W = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ x_1 + 2x_2 \leq 5. \end{cases}$	9.	$W = x_1 - 4x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 8; \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 16. \end{cases}$
5.	$W = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} x_1 \geq 3; \\ x_2 \geq 4; \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 9. \end{cases}$	10.	$W = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + 10x_2 \leq 1; \\ -2x_1 + 24x_2 \leq 1. \end{cases}$

Задача 2.

Решить ОЗЛП симплекс-методом и сформулировать двойственную задачу

1. $W = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 3; \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 9. \end{cases}$	6. $W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 7; \\ -2x_1 + 9x_2 \leq 21. \end{cases}$
2. $W = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 15; \\ x_1 + 6x_2 \leq 7. \end{cases}$	7. $W = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 8; \\ -3x_1 + 8x_2 \leq 4. \end{cases}$
3. $W = 4x_1 - x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 9; \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 4. \end{cases}$	8. $W = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 9; \\ x_1 + 3x_2 \leq 6. \end{cases}$
4. $W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 7; \\ -2x_1 + 9x_2 \leq 21. \end{cases}$	9. $W = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 5; \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 50. \end{cases}$
5. $W = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 + 3x_2 \leq 7. \end{cases}$	10. $L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$ при ограничениях: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$

Задача 3.

Решить задачу ЛП средствами Excel.

Необходимо выполнить ВСЕ задачи, сформулированные в файле ПЗ_ЛП.
Для этого воспользуйтесь материалом, изложенным в файле Excel-ЛП.

Результаты, полученные при решении на компьютере, необходимо сохранить в виде файла Excel, распечатать отчет и уметь объяснить ход решения.

Задача 4.

Решить транспортную задачу по варианту.

1.

$a_i \backslash b_j$	70	30	20	40
90	1	3	4	5
30	5	3	1	2
40	2	1	4	2

2.

$a_i \backslash b_j$	30	80	60	110
60	6	8	15	4
130	9	15	2	3
90	6	12	7	1

3.

$a_i \backslash b_j$	120	80	60
100	2	4	2
70	5	5	6
70	4	6	3
20	6	8	1

4.

$a_i \backslash b_j$	240	40	110
90	7	15	3
190	13	8	15
40	9	7	20
130	8	10	6

5.

23.5. Требуется спланировать перевозку строительного материала с трех заводов к четырем строительным площадкам, используя железнодорожную сеть. В течение каждого квартала на четырех площадках требуется соответственно 5, 10, 20, 15 вагонов строительных материалов. Возможности различных заводов соответственно равны 10, 15 и 25 вагонов в квартал. Условия задачи даны в табл. 23.15. Числа на пересечении строк и столбцов таблицы означают стоимость перевозки одного вагона (усл. ед.).

Таблица 23.15

		Строительство и его потребности				
		1	2	3	4	
		5	10	20	15	
Заводы и их возможности	1	10	8	3	5	2
	2	15	4	1	6	4
	3	25	1	9	4	3

6.

8.1. В пунктах *A* и *B* находятся соответственно 150 и 90 т горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуются соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость перевозки 1 т горючего из пункта *A* в пункты 1, 2, 3 равна 60, 10, 40 тыс. руб. за 1 т соответственно, а из пункта *B* в пункты 1, 2, 3 — 120, 20, 80 тыс. руб. за 1 т соответственно.

Составьте план перевозок горючего, минимизирующий общую сумму транспортных расходов.

7.

8.2. Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй — 30 платформ, третий — 40 платформ. *Требуется поставить* платформы следующим потребителям: первому — 70 шт., второму — 30, третьему — 20, четвертому — 40 шт. Стоимость перевозки одной платформы от поставщика до потребителя указана в следующей таблице (д. е.):

Поставщики	Потребители			
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

8.

8.3. Строительство магистральной дороги включает задачу заполнения имеющихся на трассе выбоин до уровня основной дороги и срезания в некоторых местах дороги выступов. Срезанным грунтом заполняются выбоины. Перевозка грунта осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояние в километрах от срезов до выбоин и объем работ указаны в следующей таблице:

Поставщики	Потребители			Наличие грунта, т
	I	II	III	
A	1	2	3	110
B	2	1	3	130
C	1	2	4	20
Требуемое количество грунта, т	100	140	60	

Составьте план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков.

9.

8.4. Груз, хранящийся на трех складах и требующий для перевозки 60, 80, 106 автомашин соответственно, необходимо перевезти в четыре магазина. Первому магазину требуется 44 машины груза, второму — 70, третьему — 50 и четвертому — 82 машины. Стоимость пробега одной автомашины за 1 км составляет 10 д. е. Расстояния от складов до магазинов указаны в следующей таблице:

Склады	Магазины			
	1	2	3	4
1	13	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Составьте оптимальный по стоимости план перевозки груза от складов до магазинов.

10.

8.5. На складах А, В, С находится сортовое зерно 100, 150, 250 т, которое нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50 т, пункту 2 – 100, пункту 3 – 200, пункту 4 – 150 т сортового зерна. Стоимость доставки 1 т зерна со склада А в указанные пункты соответственно равна (д. е.) 80, 30, 50, 20; со склада В – 40, 10, 60, 70; со склада С – 10, 90, 40, 30.

Составьте оптимальный план перевозки зерна из условия минимума стоимости перевозки.

Задача 5.

Решить транспортную задачу средствами Excel.

Необходимо выполнить ВСЕ задачи, сформулированные в файле ПЗ_ТрансЗадача.

Для этого воспользуйтесь материалом, изложенным в файле Excel-ЛП.

Результаты, полученные при решении на компьютере, необходимо сохранить в виде файла Excel, распечатать отчет и уметь объяснить ход решения.