

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Кубанский государственный технологический университет»

Кафедра производства строительных конструкций
и строительной механики



РАСЧЕТ КРИВОГО БРУСА

Методические указания и задания к расчетно-графической
работе № 1 по курсу «Сопротивление материалов»
для студентов III курса очной формы обучения
по направлению 270800 «Строительство»

Краснодар

2013

1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О КРИВЫХ БРУСЬЯХ

Под кривым бруском в сопротивлении материалов понимают твердое тело, геометрическая форма которого образуется движением в пространстве некоторой плоской фигуры (поперечного сечения кривого бруса), центр тяжести которой всегда перемещается по некоторой кривой (оси кривого бруса), а плоскость фигуры нормальна указанной кривой. Различают кривой брус постоянного сечения и кривой брус переменного сечения. По виду оси кривые брусья подразделяются на плоские (когда ось кривого бруса является некоторой плоской кривой) и пространственные (когда ось кривого бруса является пространственной кривой). Отдельной разновидностью кривого бруса является естественно закрученный кривой брус. В таком брусе плоская фигура поперечного сечения при своем движении по оси одновременно осуществляет вращение вокруг касательной к ней. Такими брусьями являются, например, лопасти воздушного винта самолёта или вентилятора.

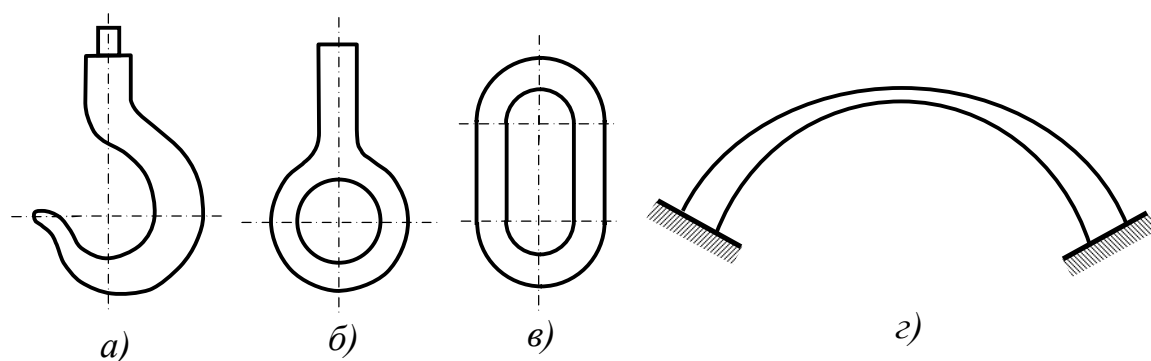


Рисунок 1.1

В дальнейшем ограничимся рассмотрением таких плоских кривых брусьев, которые имеют симметричные поперечные сечения, а внешняя нагрузка приложена в плоскости, которой принадлежит ось бруса. К таким кривым брусьям относятся крюки подъемных кранов (рис. 1.1,а), проушины (рис. 1.1,б), звенья цепей (рис. 1.1,в), арки перекрытий зданий и сооружений или мостовые арки (рис. 1.1,г) и т.д.

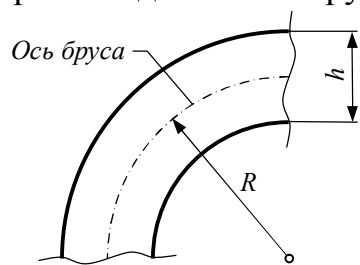


Рисунок 1.2

Кривизна характеризуется отношением радиуса кривизны оси кривого бруса R к наибольшей высоте его поперечного сечения h (рис. 1.2). В зависимости от этого отношения кривые брусья подразделяются на две группы: брусья большой кривизны если $R/h \leq 5$ и брусья малой кривизны при $R/h > 5$.

При расчете брусьев малой кривизны нормальные напряжения с достаточной для практики точностью можно определять по формулам,

полученным для прямых брусев. Аналогичным образом по формулам расчета прямых брусев можно определять и касательные напряжения в брусках большой кривизны.

Распределение нормальных напряжений в поперечных сечениях брусев большой кривизны существенно отличается от их распределения в сечениях прямых брусев. При уменьшении соотношения размеров R/h погрешность при вычислении нормальных напряжений резко возрастает, потому эти напряжения в брусках большой кривизны должны определяться по специальным формулам.

2 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В КРИВЫХ БРУСЬЯХ

В поперечных сечениях плоского кривого бруса так же, как в сечениях плоской рамы, состоящей из ряда прямолинейных стержней, возникает три внутренних силовых фактора: изгибающий момент M_x , продольная сила N_z и поперечная сила Q_y . Особенность расчета состоит в том, что используется полярная система координат (радиус кривизны оси бруса ρ и угол φ).

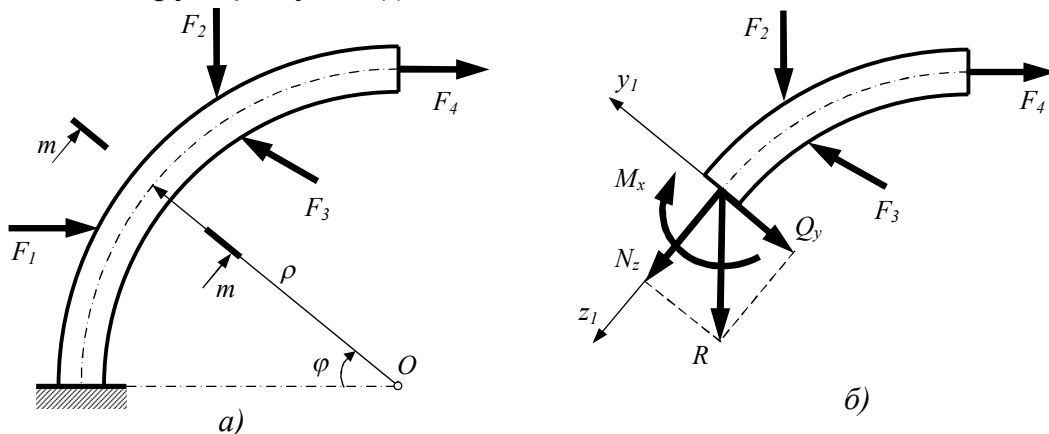


Рисунок 2.1

Рассмотрим кривой брус, нагруженный системой внешних сил (рис. 2.1,а), действующих в главной плоскости инерции его поперечных сечений. Рассечем брус плоскостью $m-m$, которой принадлежит радиус кривизны его оси ρ . Эта плоскость в исследуемой точке будет перпендикулярна оси бруса.

Внешние силы, приложенные к отсеченной части бруса, должны уравниваться внутренними силами, распределенными по сечению $m-m$. Действие внутренних сил можно заменить равнодействующей силой R , приложенной в центре тяжести поперечного сечения бруса, и парой сил (изгибающим моментом) M_x (рис. 2.1,б). Равнодействующую R можно разложить на две составляющие силы: поперечную силу

Q_y , направленную по оси y_1 , которая совпадает с направлением радиуса кривизны ρ , и продольную силу N_z , направленную по касательной к оси бруса (ось z_1).

Таким образом, в общем случае нагружения кривого бруса в его поперечных сечениях действуют три внутренних силовых фактора. Величину M_x , Q_y и N_z можно найти из уравнений равновесия статики, составленных для отсеченной части бруса. В аналитические выражения для всех внутренних усилий будут входить тригонометрические функции угла φ , следовательно, в пределах каждого грузового участка кривого бруса эпюры будут изменяться по нелинейному закону. При построении эпюр внутренних усилий в кривом брусѣ задаются шагом изменения угла $\Delta\varphi$, который обычно принимают равным 30 или 15 градусам, и вычисляют численные значения их ординат в расчетных сечениях. За нулевую линию принимают ось кривого бруса. Ординаты, характеризующие внутренние силовые факторы в исследуемом сечении, откладывают в принятом масштабе по радиусам кривизны. Положительные ординаты эпюр Q_y и N_z откладывают вне контура кривого бруса. Построение эпюры изгибающего момента M_x выполняется со стороны растянутых волокон. Порядок построения эпюр внутренних усилий в кривом брусѣ рассмотрим в следующем примере.

ПРИМЕР 2.1

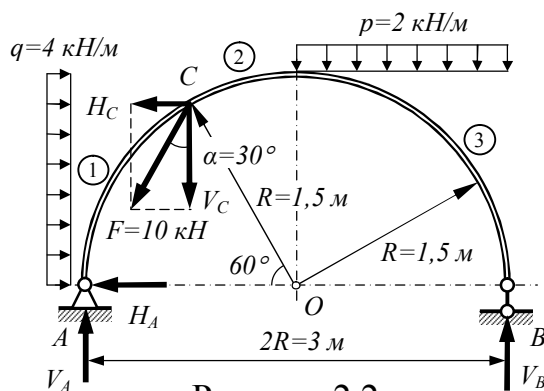


Рисунок 2.2

Исходные данные задачи

На кривой брус, изображенный на рисунке 2.2, действует система внешних нагрузок. Для заданного кривого бруса требуется записать аналитические выражения для внутренних силовых факторов в пределах каждого грузового участка и построить эпюры M_x , Q_y и N_z .

Решение задачи

Чтобы упростить дальнейшие вычисления разложим заданную силу F , действующую под углом α к вертикали, на вертикальную и горизонтальную составляющие.

$$V_C = F \cdot \cos \alpha = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН};$$

$$H_C = F \cdot \sin \alpha = 10 \cdot 0,500 = 5,0 \text{ кН}.$$

Далее определяем опорные реакции кривого бруса. Для определения опорных реакций составим следующие уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0; \quad V_A \cdot 2R + \frac{qR^2}{2} - H_C R \cdot \sin 60^\circ - V_C R \cdot (1 + \cos 60^\circ) - \frac{pR^2}{2} = 0;$$

$$V_A = \frac{-\frac{qR^2}{2} + H_C R \cdot \sin 60^\circ + V_C R \cdot (1 + \cos 60^\circ) + \frac{pR^2}{2}}{2R} =$$

$$= \frac{-\frac{4 \cdot 1,5^2}{2} + 5,0 \cdot 1,5 \cdot 0,866 + 8,66 \cdot 1,5 \cdot (1 + 0,5) + \frac{2 \cdot 1,5^2}{2}}{2 \cdot 1,5} = 7,91 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = 0; \quad V_B \cdot 2R - \frac{qR^2}{2} + H_C R \cdot \sin 60^\circ - V_C R \cdot (1 - \cos 60^\circ) - pR^2(1 + 0,5) = 0;$$

$$V_B = \frac{\frac{qR^2}{2} - H_C R \cdot \sin 60^\circ + V_C R \cdot (1 - \cos 60^\circ) + pR^2(1 + 0,5)}{2R} =$$

$$= \frac{\frac{4 \cdot 1,5^2}{2} - 5,0 \cdot 1,5 \cdot 0,866 + 8,66 \cdot 1,5 \cdot (1 - 0,5) + 2 \cdot 1,5^2(1 + 0,5)}{2 \cdot 1,5} = 3,75 \text{ кН};$$

$$\sum x = 0; \quad -H_A + qR - H_C = 0; \quad H_A = -H_C + qR = -5 + 4 \cdot 1,5 = 1 \text{ кН}.$$

Для проверки найденных значений вертикальных опорных реакций составим сумму проекций всех сил на ось y

$$\sum y = 0; \quad V_A - pR - V_C + V_B = 0;$$

$$3,75 - 2 \cdot 1,5 - 8,66 + 7,91 = 11,66 - 11,66 = 0.$$

Следовательно, опорные реакции найдены верно.

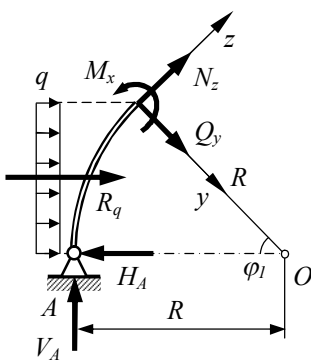


Рисунок 2.3

Разобьем заданный кривой брус на три грузовых участка. Проведем через произвольную точку первого грузового участка поперечное сечение. Положение этого сечения определяется углом φ_1 (рис. 2.3). В пределах первого грузового участка это угол изменяется в следующих границах $0 \leq \varphi_1 \leq 60^\circ$. Ось y подвижной системы координат направим по радиусу кривизны, а ось z будет перпендикулярна ей и является касательной к оси бруса в рассматриваемой точке. В поперечном сечении левой отсеченной части кривого бруса прикладываем внутренние силовые факторы в положительном направлении. Для того, чтобы по-

лучить аналитические выражения M_x , Q_y и N_z в пределах первого участка составим следующие уравнения равновесия статики

$$\begin{aligned} \sum z = 0; \quad N_z + V_A \cos \varphi_1 - H_A \sin \varphi_1 + R_q \sin \varphi_1 &= 0; \\ N_z &= -V_A \cos \varphi_1 + H_A \sin \varphi_1 - qR \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1; \\ \sum y = 0; \quad Q_y - V_A \sin \varphi_1 - H_A \cos \varphi_1 + R_q \cos \varphi_1 &= 0; \\ Q_y &= V_A \sin \varphi_1 + H_A \cos \varphi_1 - qR \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1; \\ \sum m = 0; \quad M_x - V_A R(1 - \cos \varphi_1) - H_A R \sin \varphi_1 + R_q (R \sin \varphi_1) / 2 &= 0; \\ M_x &= V_A R(1 - \cos \varphi_1) + H_A R \sin \varphi_1 - q(R \sin \varphi_1)^2 / 2. \end{aligned}$$

Задаваясь шагом изменения угла $\Delta \varphi = 15^\circ$, вычисляем численные значения ординат эпюр внутренних силовых факторов в расчетных сечениях первого грузового участка (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Значение внутренних силовых факторов в расчетных сечениях первого грузового участка

Угол φ_1	$\sin \varphi_1$	$\cos \varphi_1$	N_z	Q_y	M_x
0	0,000	1,000	-7,910	1,000	0,000
15	0,259	0,966	-7,784	1,513	0,491
30	0,500	0,866	-7,850	2,223	1,215
45	0,707	0,707	-7,886	3,300	2,286
60	0,866	0,500	-7,589	4,752	3,857

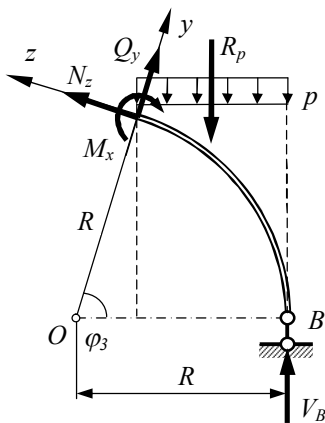


Рисунок 2.4

При построении эпюр внутренних усилий в пределах второго и третьего участков целесообразно рассматривать равновесие правой отсеченной части кривого бруса. Рассматриваем третий грузовой участок. Положение нормального сечения определяется углом φ_3 (рис. 2.4), который изменяется в границах $0 \leq \varphi_3 \leq 90^\circ$. Оси подвижной системы координат направляем по радиусу кривизны и по касательной к оси бруса в рассматриваемой точке. В поперечном сечении правой отсеченной части кривого бруса прикладываем внутренние силовые факторы в положительном направлении. Составляем аналитические выражения для M_x , Q_y и N_z в пределах третьего грузового участка используя следующие уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum z = 0; \quad N_z + V_B \cos \varphi_3 - R_p \cos \varphi_3 &= 0; \\ N_z &= -V_B \cos \varphi_3 + pR(1 - \cos \varphi_3) \cdot \cos \varphi_3; \\ \sum y = 0; \quad Q_y + V_B \sin \varphi_3 - R_p \sin \varphi_3 &= 0; \\ Q_y &= -V_B \sin \varphi_3 + pR(1 - \cos \varphi_3) \cdot \sin \varphi_3; \\ \sum m = 0; \quad M_x - V_B R(1 - \cos \varphi_3) + R_p R(1 - \cos \varphi_3) / 2 &= 0; \\ M_x &= V_B R(1 - \cos \varphi_3) - p[R(1 - \cos \varphi_3)]^2 / 2. \end{aligned}$$

Задаваясь шагом изменения угла $\Delta \varphi = 15^\circ$, вычисляем численные значения ординат эпюр внутренних силовых факторов в расчетных сечениях третьего грузового участка (табл. 2.2).

Таблица 2.2 – Значение внутренних силовых факторов в расчетных сечениях третьего грузового участка

Угол φ_3	$\sin \varphi_3$	$\cos \varphi_3$	N_z	Q_y	M_x
0	0,000	1,000	-3,750	0,000	0,000
15	0,259	0,966	-3,523	-0,944	0,189
30	0,500	0,866	-2,900	-1,674	0,713
45	0,707	0,707	-2,030	-2,030	1,455
60	0,866	0,500	-1,125	-1,949	2,250
75	0,966	0,259	-0,395	-1,474	2,933
90	1,000	0,000	0,000	-0,750	3,375

Рассматриваем второй грузовой участок. Положение нормального сечения определяется углом φ_2 (рис. 2.5), который изменяется в границах $0 \leq \varphi_2 \leq 60^\circ$.

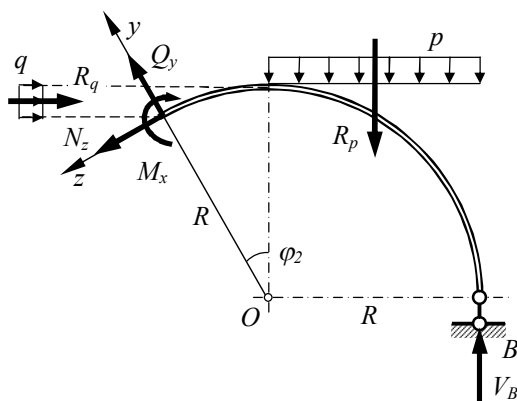


Рисунок 2.5

Оси подвижной системы координат направляем по радиусу кривизны и по касательной к оси бруса. В поперечном сечении правой отсеченной части кривого бруса прикладываем внутренние усилия в положительном направлении. Составляем аналитические выражения для M_x , Q_y и N_z в пределах второго грузового участка используя следующие уравнения равновесия

новесия

$$\sum z = 0; \quad N_z - V_B \sin \varphi_2 + R_p \sin \varphi_2 - R_q \cos \varphi_2 = 0;$$

$$\begin{aligned}
N_z &= V_B \sin \varphi_2 - pR \sin \varphi_2 + qR(1 - \cos \varphi_2) \cdot \cos \varphi_2; \\
\sum y &= 0; \quad Q_y + V_B \cos \varphi_2 - R_p \cos \varphi_2 - R_q \sin \varphi_2 = 0; \\
Q_y &= -V_B \cos \varphi_2 + pR \cos \varphi_2 + qR(1 - \cos \varphi_2) \cdot \sin \varphi_2; \\
\sum m &= 0; \quad M_x - V_B R(1 + \sin \varphi_2) + R_p R(0,5R + R \sin \varphi_2) + R_q R(1 - \cos \varphi_2)/2 = 0; \\
M_x &= V_B R(1 + \sin \varphi_2) - pR^2(0,5 + \sin \varphi_2) - q[R(1 - \cos \varphi_2)]^2/2.
\end{aligned}$$

Задаваясь шагом изменения угла $\Delta \varphi = 15^\circ$, вычисляем численные значения ординат эпюр внутренних силовых факторов в расчетных сечениях третьего грузового участка (табл. 2.3).

Таблица 2.3 – Значение внутренних силовых факторов в расчетных сечениях второго грузового участка

Угол φ_2	$\sin \varphi_2$	$\cos \varphi_2$	N_z	Q_y	M_x
0	0,000	1,000	0,000	-0,750	3,375
15	0,259	0,966	0,392	-0,672	3,661
30	0,500	0,866	1,071	-0,248	3,857

По полученным значениям усилий в поперечных сечениях кривого бруса строим эпюры M_x , Q_y и N_z (рис. 2.6).

Построенные эпюры внутренних усилий можно проверить следующим образом. В приопорных сечениях кривого бруса скачки на эпюрах Q_y и N_z должны численно равняться найденным значениям опорных реакций. На границах грузовых участков значения изгибающих моментов слева и справа должны равняться друг другу, так как к бруску не приложены внешние сосредоточенные моменты. В сечении C на брус действует сосредоточенная сила F , следовательно на эпюрах Q_y и N_z должны возникать скачки. Их величина численно равна проекциям этой силы на подвижные оси z и y , проведенные в рассматриваемом сечении. Сила F наклонена к оси z в сечении C на угол 30° , тогда имеем

$$F_z = F \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}; \quad F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,500 = 5,0 \text{ кН}.$$

Исходя из построенной эпюры продольных усилий N_z получаем $7,589 + 1,071 = 8,66$, что равно $F_z = 8,66$ кН. Анализируя эпюру поперечных сил Q_y имеем $4,752 + 0,248 = 5,0$, что равно $F_y = 5,0$ кН.

Выполненные проверки показывают, что эпюры внутренних усилий в заданном кривом бруске построены верно.

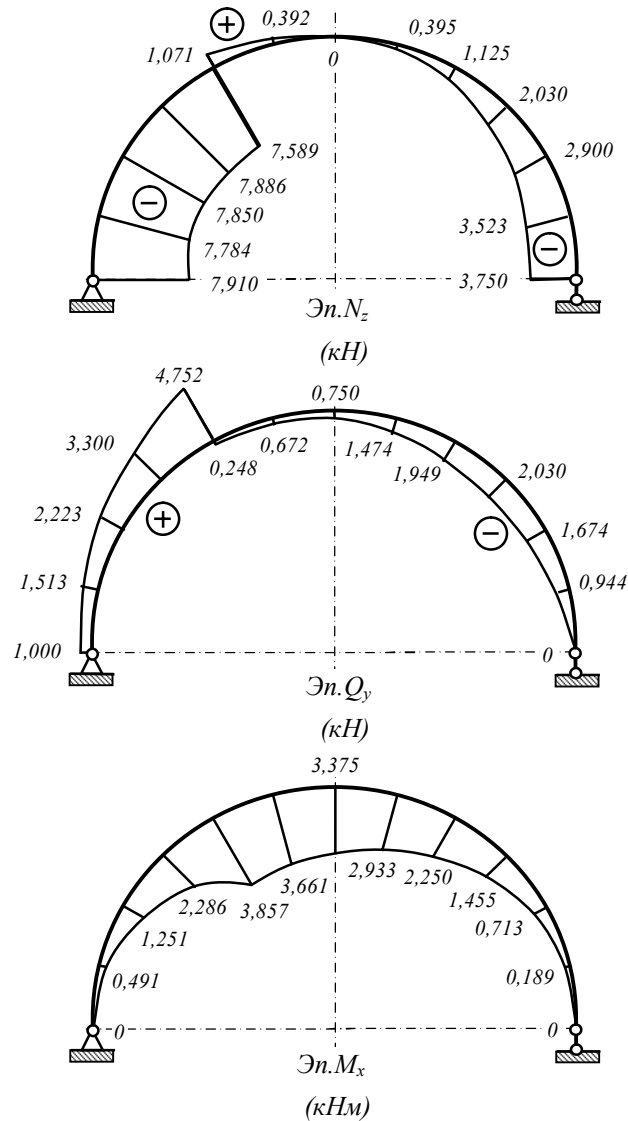


Рисунок 2.6

3 НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СЕЧЕНИИ КРИВОГО БРУСА

Для определения напряжений при чистом изгибе плоского кривого бруса, будем считать справедливой гипотезу плоских сечений. При определении деформаций волокон бруса напряжениями, возникающими в радиальном направлении, пренебрегаем. Рассматриваем брус с сечениями, симметричными относительно оси Oy , лежащей в плоскости кривизны бруса, а изгибающий момент действует в этой плоскости.

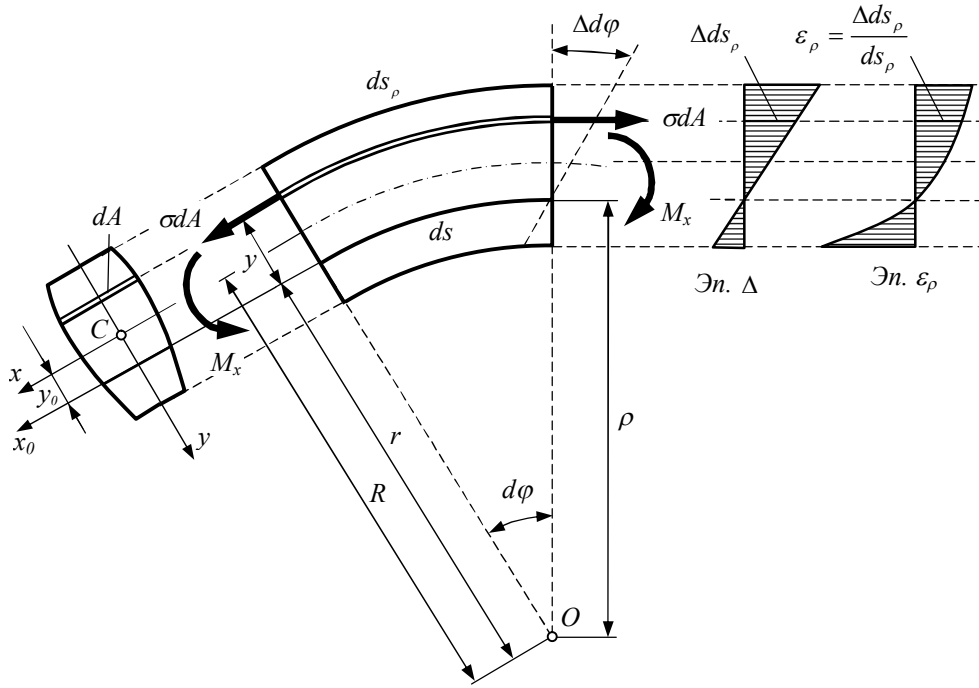


Рисунок 3.1

Рассмотрим деформацию малого элемента кривого бруса под действием изгибающего момента (рис. 3.1). Абсолютные удлинения волокон изменяются по высоте сечения по линейному закону, а относительные – по гиперболическому. Это объясняется тем, что длина дуги $ds_\rho = \rho d\varphi$ изменяется по высоте, тогда для произвольного волокна, находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя, получаем

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta ds_\rho}{ds_\rho} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{y}{\rho} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{y}{y+r}.$$

Так как продольные волокна не давят друг на друга, то по закону Гука имеем

$$\sigma = E\varepsilon_\rho = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{y}{y+r}. \quad (3.1)$$

При чистом изгибе продольная сила равна нулю, тогда $N_z = \iint_A \sigma dA = 0$.

Используя это выражение, получаем

$$N_z = \iint_A E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{y}{y+r} dA = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \iint_A \frac{y}{y+r} dA = 0.$$

Но так как множитель, стоящий перед интегралом, не может равняться нулю, то нулю равен следующий интеграл

$$\iint_A \frac{y}{y+r} dA = 0. \quad (3.2)$$

Полученное равенство является условием существования нейтральной линии. Из уравнения (3.2) видно, что нейтральная ось не проходит через центр тяжести поперечного сечения, так как в этом случае нулю должен был бы равняться статический момент сечения

$$\iint_A y dA = 0.$$

Запишем момент внутренних усилий относительно нейтрального слоя через нормальные напряжения и приравняем его внешнему моменту

$$M_x = \iint_A y(\sigma dA) = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \iint_A \frac{y^2}{y+r} dA. \quad (3.3)$$

Интеграл в уравнении (12.4) можно представить в виде

$$\iint_A \frac{y^2}{y+r} dA = \iint_A \left(y - \frac{ry}{y+r} \right) dA = \iint_A y dA - r \iint_A \frac{y}{y+r} dA.$$

Второе слагаемое в соответствии с выражением (3.2) равно нулю, поэтому

$$\iint_A \frac{y^2}{y+r} dA = \iint_A y dA = S_{x_0} = Ay_0, \quad (3.4)$$

где $S_{x_0} = Ay_0$ - статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси (y_0 - расстояние от центра тяжести сечения до нейтральной оси).

После подстановки равенства (3.4) в уравнение (2.4) получаем

$$M_x = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} S_{x_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M_x}{ES_{x_0}}. \quad (3.5)$$

Подставляя уравнение (3.5) в формулу для нормальных напряжений (3.1) и учитывая, что $r + y = \rho$, окончательно получаем

$$\sigma = \frac{M_x y}{S_{x_0} \rho}. \quad (3.6)$$

Полученное выражение значительно отличается от формулы для определения нормальных напряжений при изгибе прямого бруса. Из уравнения (3.6) следует, что нормальные напряжения по высоте поперечного сечения кривого бруса изменяются по гиперболическому зако-

ну. Для сравнения формул, полученных при изгибе прямого и кривого бруса, преобразуем формулу (3.4)

$$S_{x_0} = \iint_A \frac{y^2}{y+r} dA = \frac{1}{r} \iint_A \frac{y^2}{1+y/r} dA.$$

Введем обозначение

$$\widehat{J}_x = \iint_A \frac{y^2}{1+y/r} dA.$$

Данный интеграл называется *моментом инерции для сечения кривого бруса*. Легко заметить, что при $r \rightarrow \infty$ момент инерции \widehat{J}_x в пределе стремится к осевому моменту инерции прямого бруса J_x . Таким образом получаем

$$S_{x_0} = \frac{1}{r} \widehat{J}_x.$$

Подставляя это выражение в формулу (3.6) при $r+y=\rho$, получаем

$$\sigma = \frac{M_x}{\widehat{J}_x} \frac{y}{1+y/r}.$$

Если $r \rightarrow \infty$, то эта формула в пределе будет совпадать с формулой, полученной для прямого бруса $\sigma = M_x y / J_x$.

Чтобы определить величину нормальных напряжений по формуле (3.6), необходимо установить положение нейтральной линии. Для этого нужно определить радиус кривизны нейтрального слоя r или расстояние от центра тяжести до нейтральной линии y_0 . Между двумя указанными величинами существует следующая связь $y_0 = R - r$.

Рассмотрим точное решение поставленной задачи. Преобразуем выражение (3.2), учитывая, что $r+y=\rho$ и $y=\rho-r$

$$\iint_A \frac{y}{y+r} dA = \iint_A \frac{\rho-r}{\rho} dA = \iint_A dA - r \iint_A \frac{dA}{\rho} = 0.$$

$$r = \frac{A}{\iint_A \frac{dA}{\rho}}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим частный случай, когда кривой брус имеет прямоугольное поперечное сечение. Учитывая, что $dA = b d\rho$, то

$$\iint_A \frac{dA}{\rho} = b \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} = b(\ln R_2 - \ln R_1) = b \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Следовательно,

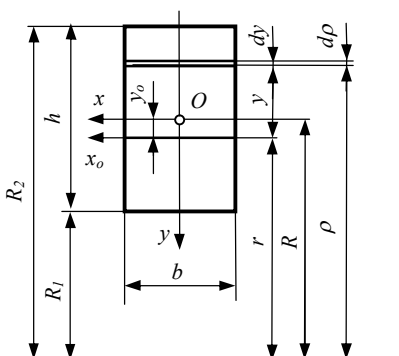


Рисунок 3.2

$$r = \frac{A}{b \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.8)$$

Для приближенного решения задачи об определении положения нейтральной линии при изгибе кривого бруса, воспользуемся формулой

$$S_{x_0} = \frac{1}{r} \hat{J}_x = Ay_0.$$

Отсюда

$$y_0 = \frac{\hat{J}_x}{rA}.$$

Таблица 3.1 – Определение положения нейтральной линии

Тип сечения	Точное решение	Приближенное решение
	$r = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$	$y_0 = \frac{h^2}{12R}$
	$r = \frac{d^2}{8(R - \sqrt{R^2 - D^2/4})}$	$y_0 = \frac{d^2}{16R}$
	$r = \frac{(b_1 + b_2)h^2}{2 \left[(b_1 R_2 - b_2 R_1) \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2)h \right]}$	$y_0 = \frac{b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2}{18(b_1 + b_2)^2} \cdot \frac{h^2}{R}$

При уменьшении кривизны бруса момент инерции кривого бруса приближается к обычному осевому моменту инерции, а радиус кривиз-

ны нейтрального слоя r – к радиусу кривизны оси бруса R . Следовательно, приближенно можно считать, что

$$y_0 \approx \frac{J_x}{RA}. \quad (3.9)$$

Для прямоугольного поперечного сечения получаем

$$y_0 \approx \frac{\left(\frac{bh^3}{12}\right)}{Rbh} = \frac{h^2}{12R}.$$

В таблице 3.1 приведены точные и приближенные формулы для определения положения нейтрального слоя для различных типов поперечных сечений кривого бруса.

Если в сечении кривого бруса одновременно возникают изгибающие моменты и продольные силы, то нормальные напряжения определяют суммированием двух выражений, полученных для указанных воздействий:

$$\sigma = \frac{N_z}{A} \pm \frac{M_x}{S_{x_0}} \frac{y}{\rho}. \quad (3.11)$$

В этой формуле момент определяется относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, так как напряжения от продольной силы найдено из условия, что продольная сила приложена в центре тяжести поперечного сечения.

ПРИМЕР 3.1

Исходные данные задачи

Для заданного кривого бруса, изображенного на рисунке 3.3, требуется:

1. Построить эпюры внутренних силовых факторов M , N и Q .
2. Установить положение опасного сечения и вычислить величину нормальных напряжений в крайних точках поперечного сечения.
3. Построить эпюру распределения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения кривого бруса.

В расчете принять:

$\alpha = 40^\circ$ $\alpha = 40^\circ$; $r = 20$ см; $d = 4,4$ см; $F = 1500$ Н; форма поперечного сечения кривого бруса – прямоугольник.

Решение задачи

Разложим внешнюю силу P , приложенную к точке C , на вертикальную и горизонтальную составляющие.

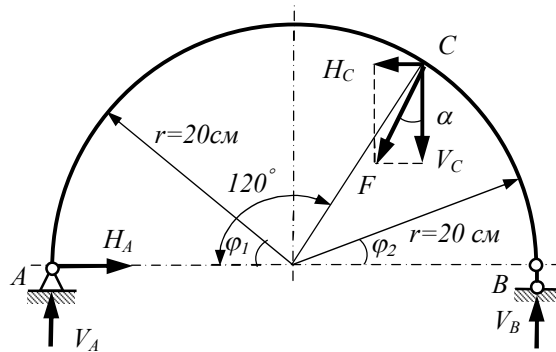


Рисунок 3.3

$$H_C = F \cdot \sin \alpha = 1500 \cdot 0,6428 = 964,2 \text{ Н};$$

$$V_C = F \cdot \cos \alpha = 1500 \cdot 0,766 = 1149,1 \text{ Н}.$$

Используя уравнения равновесия статики, находим опорные реакции кривого бруса.

$$\sum x = 0; H_A - H_C = 0; H_A = H_C = 964,2 \text{ Н};$$

$$\sum m_A = 0; V_C \cdot r \cdot (1 + \cos 60^\circ) - H_C \cdot r \cdot \sin 60^\circ - V_B \cdot 2r = 0;$$

$$V_B = (V_C \cdot (1 + \cos 60^\circ) - H_C \cdot \sin 60^\circ) / 2 =$$

$$= (1149,1 \cdot (1 + 0,5) - 964,2 \cdot 0,866) / 2 = 444,3 \text{ Н};$$

$$\sum m_B = 0; V_C \cdot r \cdot (1 - \cos 60^\circ) + H_C \cdot r \cdot \sin 60^\circ - V_A \cdot 2r = 0;$$

$$V_A = (V_C \cdot (1 - \cos 60^\circ) + H_C \cdot \sin 60^\circ) / 2 =$$

$$= (1149,1 \cdot (1 - 0,5) + 964,2 \cdot 0,866) / 2 = 704,8 \text{ Н};$$

$$\sum y = 0; V_A + V_B - V_C = 0; 704,8 - 1149,1 + 444,3 = 0.$$

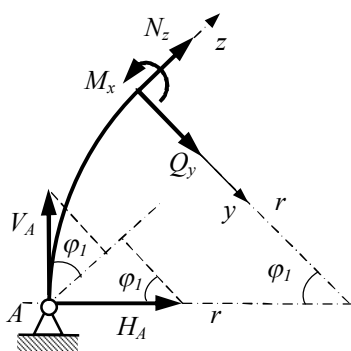


Рисунок 3.4

Заданный кривой брус имеет два грузовых участка. Записываем аналитические выражения для внутренних силовых факторов на каждом грузовом участке. Первый грузовой участок $0 \leq \varphi_1 \leq 120^\circ$.

$$\sum z = 0; N_z + H_A \cdot \sin \varphi_1 + V_A \cdot \cos \varphi_1 = 0;$$

$$N_z = -H_A \cdot \sin \varphi_1 - V_A \cdot \cos \varphi_1;$$

$$\sum y = 0; Q_y - V_A \cdot \sin \varphi_1 + H_A \cdot \cos \varphi_1 = 0;$$

$$Q_y = V_A \cdot \sin \varphi_1 - H_A \cdot \cos \varphi_1;$$

$$\sum m = 0; M_x - V_A r \cdot (1 - \cos \varphi_1) + H_A r \cdot \sin \varphi_1 = 0;$$

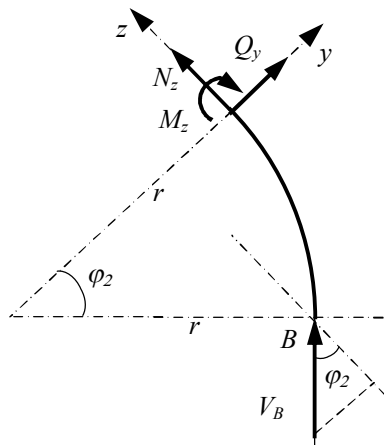


Рисунок 3.5

$$M_x = V_A r \cdot (1 - \cos \varphi_1) - H_A r \cdot \sin \varphi_1.$$

Второй грузовой участок $0 \leq \varphi_2 \leq 60^\circ$.

$$\sum z = 0; N_z + V_B \cdot \cos \varphi_2 = 0;$$

$$N_z = -V_B \cdot \cos \varphi_2;$$

$$\sum y = 0; Q_y + V_B \cdot \sin \varphi_2 = 0;$$

$$Q_y = -V_B \cdot \sin \varphi_2;$$

$$\sum m = 0; M_x - V_B r \cdot (1 - \cos \varphi_2) = 0;$$

$$M_x = V_B r \cdot (1 - \cos \varphi_2).$$

Задаемся шагом изменения угла $\Delta \varphi = 30^\circ$. Определяем тригонометрические функции соответствующих углов и строим эпюры внутренних силовых факторов в кривом брусе.

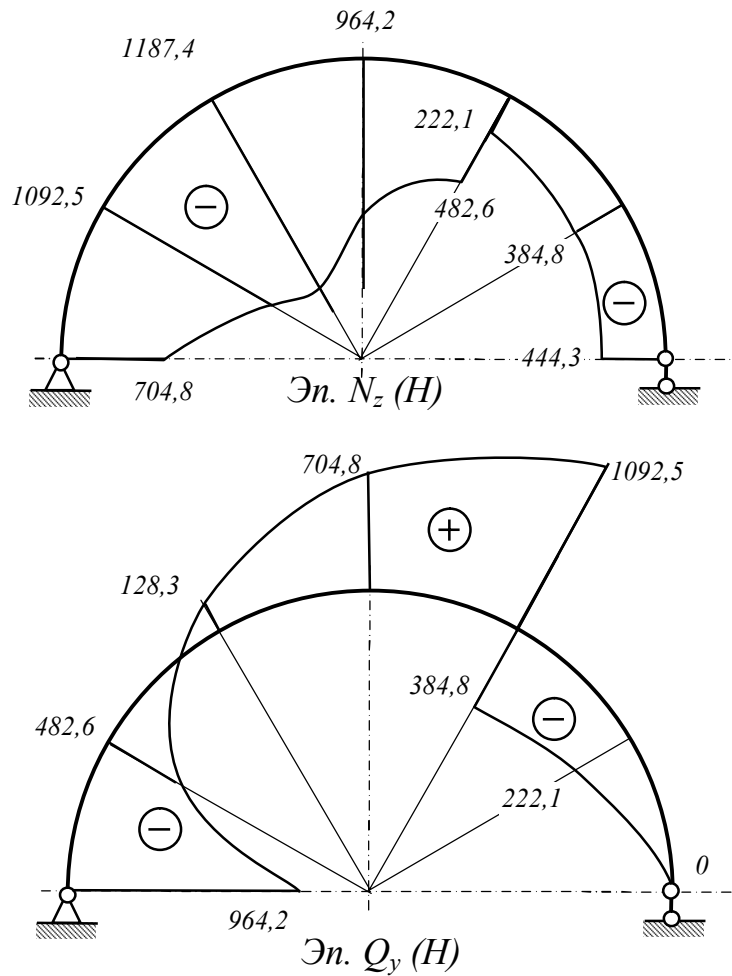


Рисунок 3.6

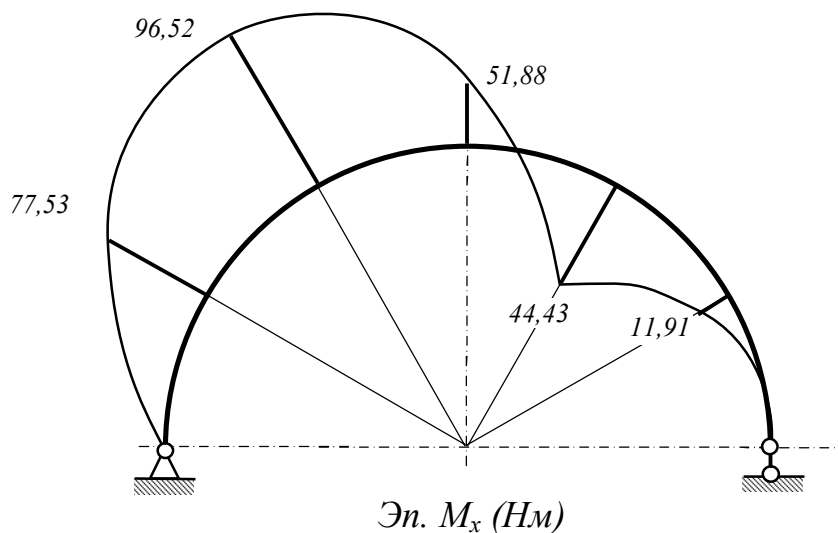


Рисунок 3.7

Исходя из построенных эпюр, определяем положение опасного сечения. В этом сечении $M_x = 96,52$ Нм, $N_z = -1187,4$ Н.

$$\sigma_i = \pm \frac{N_z}{A} \pm \frac{M_x y_i}{SR_i},$$

где y_i – координаты опасных точек поперечного сечения, отсчитываемые от нейтральной линии;

S – статический момент сечения относительно нейтральной линии;

R_i – радиус кривизны крайних волокон кривого бруса;

A – площадь поперечного сечения кривого бруса.

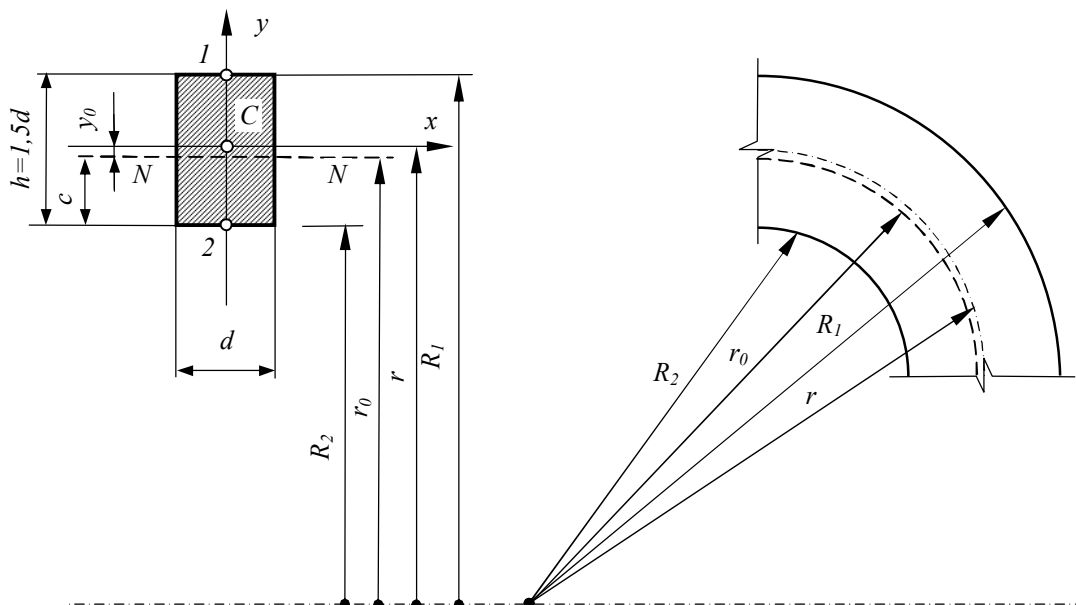


Рисунок 3.8

Вычисляем площадь поперечного сечения заданного кривого бруса

$$A = hb = 1,5d \cdot d = 1,5d^2 = 1,5 \cdot 4,4^2 = 29,04 \text{ см}^2.$$

Для того, чтобы вычислить величины S , R_i и y_i , определяем положение центра тяжести поперечного сечения и вычисляем радиус кривизны нейтрального слоя. Расстояние от основания прямоугольника до его центра тяжести равно

$$c = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}1,5d = \frac{1,5 \cdot 4,4}{2} = 3,3 \text{ см.}$$

Определяем радиусы кривизны крайних волокон кривого бруса

$$R_2 = r - c = 20 - 3,3 = 16,7 \text{ см}; \quad R_1 = R_2 + h = 16,7 + 1,5 \cdot 4,4 = 23,3 \text{ см.}$$

Радиус кривизны нейтрального слоя прямоугольного поперечного сечения находим по следующей формуле

$$r_0 = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{1,5 \cdot 4,4}{\ln \frac{23,3}{16,7}} = 19,81716 \text{ см.}$$

Определяем расстояние между нейтральной линией и главной центральной осью поперечного сечения x

$$y_0 = r - r_0 = 20 - 19,81716 = 0,18284 \text{ см.}$$

Проверяем полученный результат, используя приближенную формулу

$$y_0 \approx \frac{J_x}{r \cdot A} = \frac{105,42}{20 \cdot 29,04} = 0,1815 \text{ см,}$$

$$\text{где } J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{d \cdot (1,5d)^3}{12} = \frac{3,375d^4}{12} = \frac{3,375 \cdot 4,4^4}{12} = 105,42 \text{ см}^4.$$

Так как найденное значение y_0 достаточно близко ранее полученному, то, следовательно, вычисления выполнены верно.

Статический момент сечения относительно нейтральной линии равен

$$S = A \cdot y_0 = 29,04 \cdot 0,18284 = 5,31 \text{ см}^3.$$

Опасными точками поперечного сечения являются точки наиболее удаленные от нейтрального слоя. Находим координаты опасных точек относительно нейтральной оси

$$y_1 = R_1 - r_0 = 23,3 - 19,81716 = 3,483 \text{ см};$$

$$y_2 = r_0 - R_2 = 19,81716 - 16,7 = 3,117 \text{ см.}$$

Вычисляем нормальные напряжения в опасных точках сечения. В точке 1 напряжения от действия продольной силы N_z будут сжимаю-

щими, а от действия изгибающего момента M_x – растягивающими. Тогда получаем

$$\sigma_1 = -\frac{1187,4}{29,04 \cdot 10^{-4}} + \frac{96,52 \cdot 3,483}{5,31 \cdot 10^{-6} \cdot 23,3} = -0,409 + 2,717 = 2,308 \text{ МПа.}$$

В точке 2 напряжения от действия продольной силы N_z будут сжимающими, а от действия изгибающего момента M_x – сжимающими. Тогда

$$\sigma_2 = -\frac{1187,4}{29,04 \cdot 10^{-4}} - \frac{96,52 \cdot 3,117}{5,31 \cdot 10^{-6} \cdot 16,7} = -0,409 - 3,393 = -3,802 \text{ МПа.}$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания

Составители: Молдаванов Сергей Юрьевич;
Дунаев Владислав Игоревич

Редактор
Компьютерная верстка
НОВ

Н.А. Колычева
С.Ю. Молдаванов

Подписано в печать
60x84/16
Бумага офсетная
Печ. л. 2,75
Усл. печ. л. 2,6
Уч.-изд. л. 2,0

Формат
Офсетная печать
Изд. № 182
Тираж 75 экз.
Заказ №

Цена руб.

Кубанский государственный технологический университет
350072, г. Краснодар, Московская 2, кор. А
Типография КубГТУ: 350058, г. Краснодар, ул. Старокубанская, 88/4,