

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королева  
(национальный исследовательский университет)»

## **Теория случайных процессов. Сборник задач**

*Электронные методические указания к практическим занятиям*

Самара 2011

УДК 519.21

Составитель: **Храмов Александр Григорьевич**

**Теория случайных процессов. Сборник задач** [Электронный ресурс]: электрон. метод. указания к практ. занятиям / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (нац. исслед. ун-т); сост. А.Г. Храмов. – Электрон. текстовые дан. (0,18 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Темы задач: терминология и основные понятия случайных процессов, вероятностные распределения и моментные функции, процессы с независимыми приращениями, стационарные в широком смысле процессы и их корреляционные и спектральные характеристики, цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем, дифференциальные уравнения Колмогорова.

Сборник задач предназначен для проведения практических занятий при подготовке бакалавров по направлению 010400.62 *«Прикладная математика и информатика»*, изучающих дисциплину *«Теория случайных процессов»* в 5 и 6 семестрах.

Разработан на кафедре технической кибернетики.

# Содержание

1	Определение случайных процессов. Моментные функции.....	4
1.1	Определение и вероятностные распределения .....	4
1.2	Моментные функции случайных процессов.....	4
1.3	Ортогональное разложение случайных процессов .....	6
2	Стационарные случайные процессы.....	7
2.1	Определение стационарности и моментные функции .....	7
2.2	Спектральная плотность мощности.....	7
2.3	Эргодические случайные процессы.....	8
3	Марковские процессы.....	9
3.1	Цепи Маркова с дискретным временем .....	9
3.2	Цепи Маркова с непрерывным временем .....	11
3.3	Процессы гибели и размножения.....	12
4	Случайные последовательности .....	12
4.1	Моментные функции случайных последовательностей.....	12
	Список рекомендуемой литературы.....	13

# 1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

## 1.1 Определение и вероятностные распределения

- 1.1.1 Найти двумерную плотность вероятности случайного процесса  $\xi(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ , если случайные величины  $\alpha$  и  $\beta$  независимы и распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а  $\omega$  - детерминированная величина.
- 1.1.2 Найти одномерную плотность вероятности случайного процесса  $\xi(t) = \alpha \sin \omega t$ , если случайная величина  $\alpha$  имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ , а  $\omega$  - детерминированная величина.
- 1.1.3 Найти одномерную плотность вероятности случайного процесса  $\xi(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ , если случайная величина  $\varphi$  распределена равномерно на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , а  $\omega$  - детерминированная величина.
- 1.1.4 Найти одномерное и двумерное распределения случайного процесса  $\eta(t) = (-1)^{\xi(t)}$ , где  $\xi(t)$  - пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ .
- 1.1.5 Записать двумерную плотность распределения  $f_w(t, s, x, y)$  Винеровского случайного процесса  $w(t)$ .
- 1.1.6 Записать одномерный ряд распределения  $p_\pi(t, k) = \Pr\{\pi(t) = k\}$  пуассоновского процесса  $\pi(t)$ .
- 1.1.7 Записать двумерный ряд распределения  $p_\pi(t, s, k, m) = \Pr\{\pi(t) = k, \pi(s) = m\}$  пуассоновского процесса  $\pi(t)$ .

## 1.2 Моментные функции случайных процессов

- 1.2.1 Найти моментные функции случайного процесса  $\xi(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ , если случайные величины  $\alpha$  и  $\beta$  независимы и распределены по нормальному закону с математическим ожиданием  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ , а  $\omega$  - детерминированная величина.
- 1.2.2 Найти моментные функции случайного процесса  $\xi(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$ , если случайные величины  $\alpha$  и  $\varphi$  независимы и распределены равномерно на отрезках  $[-A, A]$  и  $[-\pi, \pi]$  соответственно,  $\omega$  - детерминированная величина.
- 1.2.3 Найти моментные функции случайного процесса  $\xi(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$ , если случайная величина  $\alpha$  распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а случайная величина  $\varphi$  распределена равномерно на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Случайные величины  $\alpha$  и  $\varphi$  независимы,  $\omega$  - детерминированная величина.
- 1.2.4 Найти моментные функции случайного процесса  $\xi(t) = \alpha \cos(\omega t)$ , если случайные величины  $\alpha$  и  $\omega$  независимы и распределены равномерно на отрезках  $[-A, A]$  и  $[-\Omega, \Omega]$  соответственно.

- 1.2.5 Найти корреляционную функцию случайного процесса  $\xi(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ , если случайные величины  $\omega$  и  $\varphi$  независимы и распределены равномерно соответственно на отрезках  $[-\Omega, \Omega]$  и  $[-\pi, \pi]$ .
- 1.2.6 Найти моментные функции случайного процесса  $Y(t) = (-1)^{X(t)}$ , где  $X(t)$  - пуассоновский процесс с параметром  $\lambda$ .
- 1.2.7 Найти корреляционную функцию случайного процесса  $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$ ,  $T > 0$ , где  $\xi(t)$  - винеровский процесс с параметром  $\sigma^2$ .
- 1.2.8 Найти корреляционную функцию случайного процесса  $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$ ,  $T > 0$ , где  $\xi(t)$  - пуассоновский процесс с параметром  $\lambda$ .
- 1.2.9 Найти корреляционную функцию случайного процесса  $\eta(t) = \xi(t+T) + \xi(t)$ ,  $T > 0$ , где  $\xi(t)$  - винеровский процесс с параметром  $\sigma^2$ .
- 1.2.10 Найти корреляционную функцию случайного процесса  $\eta(t) = \sin \xi(t)$ , где  $\xi(t)$  - винеровский процесс с параметром  $\sigma^2 = 1$ .
- 1.2.11 Найти дисперсию случайного процесса  $\eta(t) = \cos \xi(t)$ , если  $\xi(t)$  - винеровский процесс.
- 1.2.12 Найти корреляционную функцию комплекснозначного случайного процесса  $\eta(t) = \exp[i\xi(t)]$ , если  $\xi(t)$  - винеровский процесс с параметром  $\sigma^2 = 1$ .
- 1.2.13 Найти корреляционную функцию комплекснозначного случайного процесса  $\xi(t) = X \exp(i\omega t) + Y \exp(-i\omega t)$ , если комплексные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию, а  $\omega$  - детерминированная величина.
- 1.2.14 Найти корреляционную функцию комплекснозначного случайного процесса  $\xi(t) = X(t) + iY(t)$ , если вещественные случайные процессы  $X(t)$  и  $Y(t)$  независимы и являются стационарными в широком смысле с корреляционными функциями  $R_X(\tau)$  и  $R_Y(\tau)$  соответственно.
- 1.2.15 Найти моментные функции случайного процесса  $\xi(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$ , если случайные величины  $\alpha$  и  $\varphi$  независимы и распределены равномерно на отрезках  $[-A, A]$  и  $[-\pi, \pi]$  соответственно,  $\omega$  - детерминированная величина.
- 1.2.16 Найти моментные функции случайного процесса  $\xi(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$ , если случайная величина  $\alpha$  распределена по нормальному закону с математическим ожиданием  $m$  дисперсией  $\sigma^2$ , а случайная величина  $\varphi$  распределена равномерно на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Случайные величины  $\alpha$  и  $\varphi$  независимы,  $\omega$  - детерминированная величина.
- 1.2.17 Является ли стационарным в узком смысле случайный процесс  $\eta(t) = \exp(\xi(t))$ , если  $\xi(t)$  - стационарный в узком смысле случайный процесс?
- 1.2.18 Пусть  $\xi(t)$  - пуассоновский процесс. Является ли процесс  $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$ ,  $T > 0$  стационарным в широком смысле?
- 1.2.19 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $Z_t = X_t + Y_t$ , если  $X_t$  и  $Y_t$  - независимые стационарные в широком смысле случайные процессы?

- 1.2.20 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $\xi(t) = \sin \omega t$ , если случайная величина  $\omega$  распределена равномерно на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ?
- 1.2.21 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$ ,  $T > 0$ , если  $\xi(t)$  - пуассоновский процесс?
- 1.2.22 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $\xi(t)$  имеет корреляционную функцию  $R_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ . Найти дисперсию случайного процесса  $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$ ,  $T > 0$ .
- 1.2.23 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $\xi(t)$  имеет корреляционную функцию  $R_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ . Найти дисперсию случайного процесса  $\eta(t) = \xi(t+T) + \xi(t)$ ,  $T > 0$ .
- 1.2.24 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $Z_t = X_t Y_t$ , если  $X_t$  и  $Y_t$  - независимые стационарные в широком смысле случайные процессы?

### 1.3 Ортогональное разложение случайных процессов

- 1.3.1 Записать разложение Карунена-Лозва винеровского процесса  $\xi(t)$  с параметром  $\sigma^2 = 1$  на отрезке  $[0;1]$ .
- 1.3.2 Записать ортогональное разложение на отрезке  $[0;1]$  стационарного случайного процесса  $\xi(t)$ , имеющего нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию  $R_\xi(\tau) = \exp(-|\tau|)$ .
- 1.3.3 Записать разложение Карунена-Лозва стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  с нулевым математическим ожиданием и треугольной корреляционной функцией  $R_\xi(\tau) = \begin{cases} (1-|\tau|), & |\tau| \leq 1; \\ 0, & |\tau| > 1 \end{cases}$  на отрезке  $t \in [-1,1]$ .
- 1.3.4 Какое минимальное количество членов надо взять в разложении Карунена-Лозва винеровского процесса  $\xi(t)$  с параметром  $\sigma^2 = 1$  на отрезке  $[0;1]$ , чтобы обеспечить 10-процентную относительную интегральную среднюю квадратичную погрешность аппроксимации?
- 1.3.5 Записать ортогональное разложение стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $R_\xi(\tau) = \cos(\tau)$  на отрезке  $t \in [0, \pi]$ .
- 1.3.6 Записать ортогональное разложение стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $R_\xi(\tau) = \cos(\tau)$  на отрезке  $t \in [-\pi, \pi]$ .
- 1.3.7 Записать ортогональное разложение стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $R_\xi(\tau) = \exp(-|\tau|)$  на отрезке  $t \in [0,1]$ .

## 2 СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 2.1 Определение стационарности и моментные функции

- 2.1.1 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $\xi(t) = \sin \omega t$ , если случайная величина  $\omega$  распределена равномерно на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ?
- 2.1.2 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$ ,  $T > 0$ , если  $\xi(t)$  - пуассоновский процесс? Найти корреляционную функцию процесса  $\eta(t)$ .
- 2.1.3 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $\xi(t)$  имеет корреляционную функцию  $R_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ . Найти дисперсию случайного процесса  $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$ ,  $T > 0$ .
- 2.1.4 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $\xi(t)$  имеет корреляционную функцию  $R_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ . Найти дисперсию случайного процесса  $\eta(t) = \xi(t+T) + \xi(t)$ ,  $T > 0$ .
- 2.1.5 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $Z_t = X_t Y_t$ , если  $X_t$  и  $Y_t$  - независимые стационарные в широком смысле случайные процессы?
- 2.1.6 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $Z_t = X_t + Y_t$ , если  $X_t$  и  $Y_t$  - независимые стационарные в широком смысле случайные процессы?
- 2.1.7 Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $Y_t = \exp(X_t)$ , если  $X_t$  - стационарный в узком смысле случайный процесс?
- 2.1.8 Является ли стационарным в узком смысле случайный процесс  $Y_t = \exp(X_t)$ , если  $X_t$  - стационарный в узком смысле случайный процесс?
- 2.1.9 Найти корреляционную функцию комплекснозначного случайного процесса  $\eta(t) = \exp[i\xi(t)]$ , если  $\xi(t)$  - стационарный вещественный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $R_\xi(\tau) = \exp(-|\tau|)$ .

### 2.2 Спектральная плотность мощности

- 2.2.1 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $X_t$  имеет спектральную плотность мощности  $S_X(\omega)$ . Найти спектральную плотность мощности  $S_Y(\omega)$  случайного процесса  $Y_t = X_{t+T} - X_t$ ,  $T > 0$ .
- 2.2.2 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $X_t$  имеет корреляционную функцию  $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ . Найти спектральную плотность стационарного в широком смысле случайного процесса  $Y_t = X_{t+T} - X_t$ ,  $T > 0$ .
- 2.2.3 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $X_t$  имеет корреляционную функцию  $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta\tau)$ . Найти спектральную плотность мощности этого случайного процесса.

2.2.4 При каких значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $R_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \beta|\tau|)$  является корреляционной функцией некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса  $X_t$ ?

2.2.5 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $X_t$  имеет корреляционную функцию  $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ . Найти спектральную плотность мощности этого случайного процесса.

2.2.6 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $X_t$  имеет корреляционную

функцию  $R_X(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), & |\tau| \leq T; \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}$ . Найти и изобразить графически спектральную

плотность мощности этого случайного процесса.

2.2.7 Доказать, что не существует стационарного в широком смысле случайного процесса

$X_t$  с корреляционной функцией  $R_X(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| \leq T; \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}$ .

2.2.8 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $X_t$  имеет спектральную

плотность мощности  $S_X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \Omega; \\ 0, & |\omega| > \Omega \end{cases}$ . Найти и изобразить графически

корреляционную функцию этого случайного процесса.

2.2.9 Стационарный в широком смысле случайный процесс  $X_t$  имеет спектральную

плотность мощности  $S_X(\omega) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\omega|}{\Omega}\right), & |\omega| \leq \Omega; \\ 0, & |\omega| > \Omega \end{cases}$ . Найти и изобразить графически

корреляционную функцию этого случайного процесса.

## 2.3 Эргодические случайные процессы

2.3.1 Является ли эргодическим по математическому ожиданию случайный процесс  $\xi(t) = X \cos \omega t + Y \sin \omega t$ , если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией, а  $\omega$  - детерминированная величина?

2.3.2 Является ли эргодическим по второму начальному моменту случайный процесс  $\xi(t) = X \cos \omega t + Y \sin \omega t$ , если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией, а  $\omega$  - детерминированная величина?



- 2.3.3 Удовлетворяет ли закону больших чисел случайный процесс  $\xi(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ , если случайная величина  $\varphi$  распределена равномерно на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , а  $\omega$  – детерминированная величина?
- 2.3.4 Является ли эргодическим по второму начальному моменту случайный процесс  $\xi(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ , если случайная величина  $\varphi$  распределена равномерно на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , а  $\omega$  – детерминированная величина?
- 2.3.5 Является ли эргодическим по математическому ожиданию случайный процесс  $\xi(t) = X \sin(\omega t)$ , если случайная величина  $X$  распределена равномерно на отрезке  $[-1, 1]$ , а  $\omega$  – детерминированная величина?
- 2.3.6 Является ли эргодическим по второму начальному моменту случайный процесс  $\xi(t) = X \sin(\omega t)$ , если случайная величина  $X$  распределена равномерно на отрезке  $[-1, 1]$ , а  $\omega$  – детерминированная величина?

### 3 МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

#### 3.1 Цепи Маркова с дискретным временем

- 3.1.1 Двое играют в “орлянку” до полного банкротства одного из них. Чему равна средняя продолжительность игры, если начальные капиталы игроков равны, соответственно, одной и ста ставкам?
- 3.1.2 Двое играют в “орлянку” до полного банкротства одного из них. Найти вероятность завершения игры до пятого бросания монеты включительно, если начальные капиталы игроков равны, соответственно, одной и трём ставкам?
- 3.1.3 Двое играют в “орлянку” до полного банкротства одного из них. Найти вероятность выигрыша каждого из игроков, если начальные капиталы игроков равны, соответственно, одной и девяти ставкам?
- 3.1.4 Цепь Маркова с дискретным временем имеет два состояния. Вероятности переходов равны  $1/2$  и  $1/3$ . Найти предельные вероятности стационарного состояния.
- 3.1.5 В начальный момент времени частица находится в начале координат. В каждый целочисленный момент времени частица смещается на единицу вправо или влево с одинаковой вероятностью независимо от предыдущих перемещений. Найти корреляционную функцию случайного процесса  $\xi(n)$  (координата частицы в момент времени  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ).
- 3.1.6 В начальный момент времени частица находится в начале координат. В каждый целочисленный момент времени частица смещается на единицу вправо или влево с одинаковой вероятностью независимо от предыдущих перемещений. Найти вероятность нахождения частицы в точке  $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  в произвольный момент времени  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ .
- 3.1.7 Двое играют в одну из азартных игр до полного банкротства одного из них. В каждой партии один из игроков выигрывает один рубль у другого с определенной вероятностью. Каковы должны быть вероятности выигрыша партии каждым из игроков, чтобы вероятности банкротства каждого из игроков были одинаковы, если начальный капитал первого игрока составляет один рубль, а начальный капитал второго игрока составляет два рубля?

- 3.1.8 Двое играют в одну из азартных игр до полного банкротства одного из них. В каждой партии один из игроков выигрывает один рубль у другого с определенной вероятностью. Вероятность выигрыша каждой партии первым игроком в два раза выше вероятности выигрыша партии вторым игроком. Вероятность банкротства которого из игроков выше, если начальный капитал второго игрока в два раза выше начального капитала первого игрока?
- 3.1.9 Двое играют в одну из азартных игр до полного банкротства одного из них. В каждой партии один из игроков выигрывает один рубль у другого с определенной вероятностью. Вероятность выигрыша каждой партии первым игроком в два раза выше вероятности выигрыша партии вторым игроком. Найти среднюю продолжительность игры, если начальные капиталы каждого из игроков равны пяти рублям?
- 3.1.10 Двое играют в одну из азартных игр до полного банкротства одного из них. В каждой партии один из игроков выигрывает один рубль у другого с определенной вероятностью. Каковы должны быть вероятности выигрыша партии каждым из игроков, чтобы вероятности банкротства каждого из игроков были одинаковы, если начальный капитал первого игрока составляет один рубль, а начальный капитал второго игрока составляет два рубля?
- 3.1.11 Найти среднюю продолжительность игры при игре с бесконечно богатым соперником, если вероятность выигрыша каждой партии равна  $0,49$ , а начальный капитал игрока составляет  $10$  единиц.
- 3.1.12 Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника первым дуэлянтом при каждом выстреле равна  $1/2$ , вторым –  $1/3$ . Дуэль продолжается до первого попадания. Найти вероятность того, что дуэль закончится не более чем за шесть выстрелов.
- 3.1.13 Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника первым дуэлянтом при каждом выстреле равна  $1/2$ , вторым –  $1/3$ . Дуэль продолжается до первого попадания. Найти вероятности поражения каждого из соперников.
- 3.1.14 Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника первым дуэлянтом при каждом выстреле равна  $1/2$ , вторым –  $1/3$ . Дуэль продолжается до первого попадания. Найти среднюю продолжительность дуэли.
- 3.1.15 Частица совершает случайное блуждание на плоскости, перемещаясь по узлам решетки  $3 \times 3$  на один шаг во всех допустимых горизонтальных и вертикальных направлениях с одинаковой вероятностью. Найти предельные вероятности положений частицы. Найти математическое ожидание расстояния от частицы до центральной точки решетки в бесконечной момент времени.
- 3.1.16 Частица совершает случайное блуждание в пространстве, перемещаясь по узлам решетки  $3 \times 3 \times 3$  на один шаг во всех допустимых направлениях с одинаковой вероятностью. Найти предельные вероятности положений частицы. Найти математическое ожидание расстояния от частицы до центральной точки решетки в бесконечной момент времени.
- 3.1.17 Частица совершает случайное блуждание на плоскости, перемещаясь по узлам решетки  $3 \times 3$  на один шаг во всех допустимых горизонтальных и вертикальных направлениях с равной вероятностью. Угловые положения являются поглощающими. В начальный момент времени частица находится в центре. Найти вероятность поглощения частицы до шестого шага включительно и математическое ожидание числа шагов до поглощения.
- 3.1.18 Частица совершает случайное блуждание в пространстве, перемещаясь на каждом шаге из центра куба в одну из вершин куба с одинаковыми вероятностями или из вершин куба в центр куба. Найти предельную вероятность нахождения частицы в центре куба.

- 3.1.19 Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания каждым дуэлянтом в соперника при каждом выстреле равна  $p$ . Дуэль продолжается до первого попадания. При какой вероятности  $p$  средняя продолжительность дуэли будет равна четырем выстрелам?

## 3.2 Цепи Маркова с непрерывным временем

- 3.2.1 В систему с двумя линиями обслуживания поступают заявки с интенсивностью  $2c^{-1}$ . Среднее время обслуживания заявки –  $1c$ . Если при поступлении заявки все линии заняты, то заявка теряется. Найти вероятности стационарного состояния (вероятность занятости ровно  $m$  линий обслуживания).
- 3.2.2 В систему с одной линией обслуживания поступают заявки с интенсивностью  $\lambda$ . Среднее время обслуживания заявки равно  $T$ . Если при поступлении заявки линия обслуживания занята, то заявка теряется. Найти соотношение между параметрами  $\lambda$  и  $T$ , при котором вероятность занятости линии обслуживания в стационарном состоянии равна  $1/2$ .
- 3.2.3 В систему с одной линией обслуживания поступают заявки с интенсивностью  $\lambda$ . Среднее время обслуживания заявки равно  $T$ . Если при поступлении заявки линия обслуживания занята, то заявка теряется. Найти вероятность потери заявки в стационарном состоянии.
- 3.2.4 Сколько мест должно быть на автомобильной парковке, чтобы вероятность её полного заполнения была не больше  $0,1$ . Автомобили прибывают на парковку с интенсивностью  $10$  штук в час, среднее время парковки равно  $12$  минутам.
- 3.2.5 Найти вероятностное распределение времени ожидания второго события в простейшем потоке событий.
- 3.2.6 Однородная цепь Маркова с непрерывным временем имеет три состояния. Интенсивности перехода из первого состояния во второе и из второго состояния в третье равны  $\lambda$ . В начальный момент времени цепь Маркова находится в первом состоянии. Найти и изобразить графически вероятность нахождения цепи Маркова во втором состоянии в произвольный момент времени  $t$ .
- 3.2.7 В систему с двумя линиями обслуживания поступают заявки с интенсивностью  $\lambda$ . Среднее время обслуживания заявки на каждой линии равно  $T$ . Если при поступлении заявки все линии обслуживания заняты, то заявка теряется. Если при поступлении заявки обе линии обслуживания свободны, то заявка поступает на первую линию. Найти вероятности занятости каждой линии в стационарном состоянии.
- 3.2.8 В систему с двумя линиями обслуживания поступают заявки с интенсивностью  $\lambda$ . Среднее время обслуживания заявки на первой линии равно  $T$ . Среднее время обслуживания заявки на второй линии равно  $2T$ . Если при поступлении заявки все линии обслуживания заняты, то заявка теряется. Если при поступлении заявки обе линии обслуживания свободны, то заявка поступает на первую линию. Найти вероятность потери заявки в стационарном состоянии.
- 3.2.9 В систему с одной линией обслуживания поступают заявки с интенсивностью  $\lambda$ . Среднее время обслуживания заявки равно  $T$ . Если при поступлении заявки линия обслуживания занята, то заявка теряется. Найти соотношение между параметрами  $\lambda$  и  $T$ , при котором вероятность занятости линии обслуживания в стационарном состоянии равна  $p$ .
- 3.2.10 В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности  $\lambda$ , частица перемещается из точки с координатой  $0$  в точку с координатой  $1$  или из точки с координатой  $1$  в точку с координатой  $0$ . В начальный момент времени частица находится в точке с координатой  $0$ . Пусть  $\xi(t)$  - координата частицы в момент времени  $t$ . Найти моментные функции случайного процесса  $\xi(t)$ .

- 3.2.11 В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности  $\lambda$ , частица перемещается по сторонам треугольника, переходя из одной вершины в другую по часовой стрелке. Найти вероятности нахождения частицы в каждой вершине треугольника в произвольный момент времени  $t$ .
- 3.2.12 В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности  $\lambda$ , частица перемещается из центра единичного квадрата в его вершины с одинаковыми вероятностями и из вершин квадрата в его центр. Найти математическое ожидание расстояния от частицы до центра квадрата в момент времени  $t$  при условии, что в начальный момент времени частица находилась в центре квадрата.

### 3.3 Процессы гибели и размножения

- 3.3.1 Частицы размножаются делением на три с интенсивностью  $\lambda$ . В начальный момент времени имеется одна частица. Найти вероятность того, что в момент времени  $t$  будет ровно  $n$  частиц.
- 3.3.2 Частицы размножаются делением пополам и гибнут с одинаковой интенсивностью, равной  $\lambda$ . В начальный момент времени имеется одна частица. Найти вероятность того, что в момент времени  $t$  будет ровно  $n$  частиц.

## 4 СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### 4.1 Моментные функции случайных последовательностей

- 4.1.1 Некоррелированная стационарная в широком смысле случайная последовательность  $\xi(n)$  имеет математическое ожидание  $m$  и дисперсию  $\sigma^2$ . Последовательность  $\eta(n)$  порождается из последовательности  $\xi(n)$  по формуле  $\eta(n) = \sum_{k=0}^N \xi(n-k)$ . Найти моментные функции случайной последовательности  $\eta(n)$ . Изобразить графически корреляционную функцию.
- 4.1.2 Некоррелированная стационарная в широком смысле случайная последовательность  $\xi(n)$  имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Последовательность  $\eta(n)$  порождается из последовательности  $\xi(n)$  по формуле  $\eta(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \xi(n-k)$ ,  $|a| < 1$ . Найти корреляционную функцию случайной последовательности  $\eta(n)$ .
- 4.1.3 Стационарная в широком смысле случайная последовательность  $\xi(n)$  имеет спектральную плотность мощности  $\Phi_{\xi}(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \in [\omega_1; \omega_2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$   $0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$ . Найти корреляционную функцию случайной последовательности  $\xi(n)$ .
- 4.1.4 Стационарная в широком смысле случайная последовательность  $\xi(n)$  имеет экспоненциальную корреляционную функцию  $R_{\xi}(m) = \sigma^2 \rho^{|m|}$ ,  $|\rho| < 1$ . Найти корреляционную функцию случайной последовательности  $\eta(n) = \xi(n) - \rho \xi(n-1)$ .

- 4.1.5 Стационарная в широком смысле случайная последовательность  $\xi(n)$  имеет экспоненциальную корреляционную функцию  $R_\xi(m) = \sigma^2 \rho^{|m|}$ ,  $|\rho| < 1$ . Найти корреляционную функцию случайной последовательности  $\eta(n) = \xi(n) + \xi(n-1) + \xi(n-2)$ .

## Список рекомендуемой литературы

1. **Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций** [Текст]: учеб. пособие / [Б. Г. Володин и др.]; под общ. ред. А.А. Свешникова. – Изд. 4-е, стер. – СПб. Лань, 2008. – 445с. – ISBN 978-5-8114-0708-8.
2. **Миллер, Б.М.** Теория случайных процессов в примерах и задачах [Текст] / Б. М. Миллер, А. Р. Панков; под ред. А. И. Кибзуна. – М. : Наука: Физматлит. – 2007. – 317с.