





стых шарниров распределяется следующим образом:  $III_1^{(1)}=0$ ,  $III_2^{(1)}=1$ ,  $III_5^{(1)}=2$ ; число опорных связей (реакций)  $C_0=5$  (по узлам число опорных связей распределяется так:  $C_{0(1)}=2$ ;  $C_{0(6)}=3$ ). Таким образом,  $W=3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 5 = -2$ . Отсюда следует вывод о том, что ЗРС дважды статически неопределимая. С целью проведения анализа ЗРС на *мгновенную неизменяемость* ее диски, включая опорный (1-й) показаны на рис. 8.4 освобожденными от связей.

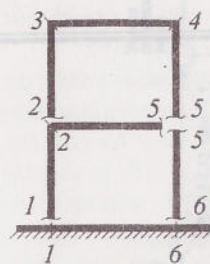
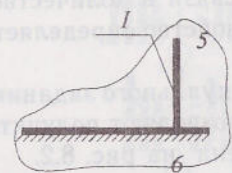
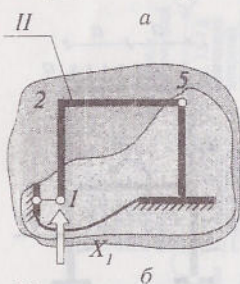


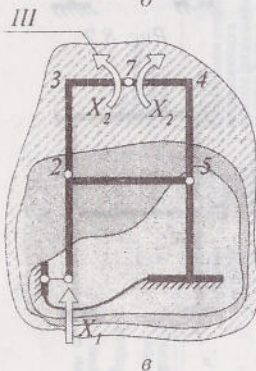
Рис. 8.4



а



б



в

Рис. 8.5

Вариант образования «поэтажной» схемы ЗРС из последовательности элементарных расчетных схем показан на рис. 8.5. При построении «этажей» рекомендуется сохранять связи с землей в виде жесткой заделки, поскольку для таких частей определение изгибающего момента можно проводить без определения опорных реакций.

Как следует из данных рис. 8.5, *первый* этаж ЗРС (рис. 8.5, а) образован диском 5-й, жестко заделанным в землю.

*Второй* этаж (рис. 8.5, б) получен присоединением ломаного бруса 1-2-5 простым шарниром к узлу 5 ранее образованного этажа и горизонтальным опорным стержнем в узле 1 в земле. Обратите внимание, что при образовании шарнирно-стержневого треугольника этим способом обнаружилась *лишняя* внешняя связь, реакция которой обозначена как  $X_1$ .

Наконец, *третий* этаж (рис. 8.5, в) получен присоединением двух ломаных брусев (диски 2-3-7 и 7-4-5), объединенных простым шарниром в узле 7, и к узлам 2 и 5 второго этажа ЗРС. При этом важно отметить, что узел 7 *создан искусственно* с целью образования трехшарнирной рамы из элемента 2-3-4-5 за счет удаления связей по моменту из узла 7. Реакции *пары* *лишних* внутренних связей обозначены как  $X_2$ .

Следует обратить внимание на то, что обозначения реакций *лишних* связей являются традиционными и их не следует путать с обозначениями опорных реакций вдоль оси  $X$  ГСК.

Мгновенная неизменяемость выявленная этажей обеспечена наличием шарнирно-стержневых

треугольников, образованных связями, наложенными на диски, входящие в состав каждого этажа. Эти треугольники отмечены римскими цифрами I, II, III на рис. 8.6.

Наличие поэтажной схемы образования ЗРС (рис. 8.5) позволяет назначить **порядок** расчета ЗРС в виде *последовательности* задач о расчете элементарных расчетных схем (рис. 8.7).

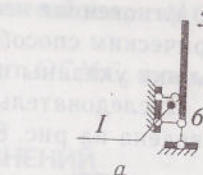
Так, на *1-м* этапе расчета решается задача о равновесии трехшарнирной рамы (рис. 8.7, ①), отрезанной сечениями в узлах 2 и 5; на *2-ом* этапе — ломаного бруса между узлами 1, 2 и 5 (рис. 8.7, ②), на *3-ем* этапе — однопролетной бесконсольной балки между узлами 5 и 6 (рис. 8.7, ③).

Напомним, что реакции, вычисленные при расчете вышележащих этажей и взятые с противоположными направлениями, являются (как правило!) *дополнительной* нагрузкой для нижележащих этажей.

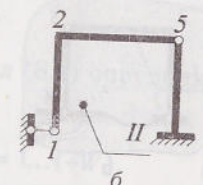
Таким образом, в ходе построения поэтажной схемы выявлено не только число *лишних* связей, но и их характер. Кроме того, назначена система, обладающая свойством статической определимости и мгновенной неизменяемости, — *основная система метода сил* (ОСМС).

### 8.3. ВЫБОР ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДА СИЛ

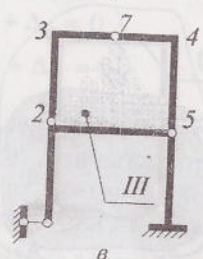
ОСМС существует во многих вариантах, количество которых зависит от того, насколько разработчик заменяющей системы владеет способами организации внутренних и внешних связей, и одновременно — приемами проведения качественной стороны кинематического анализа. Именно умение выделять «лишние» связи при сохранении мгновенной неизменяемости заменяющей системы определяет существо работы по созданию основной системы метода сил.



а



б



в

Рис. 8.6

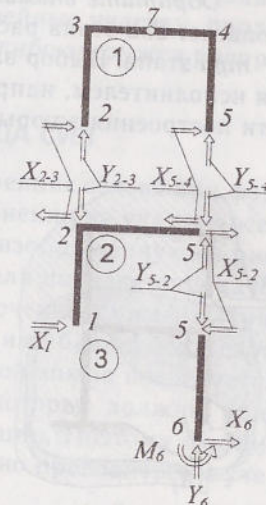
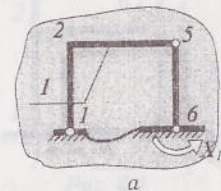


Рис. 8.7



Мгновенная неизменяемость системы на рис. 8.8 доказывается геометрическим способом. Соответствующие шарнирно-стержневые треугольники указаны на рис. 8.9.

Последовательность расчета ОСМС, изображенной на рис. 8.8, приведена на рис. 8.10.



а

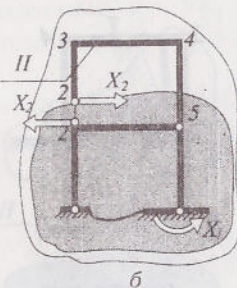
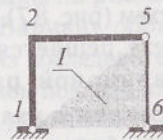


Рис. 8.8



а

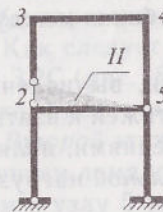


Рис. 8.9

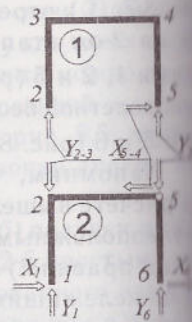
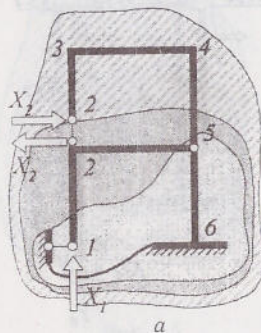
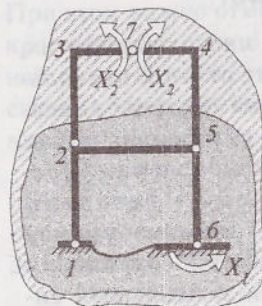


Рис. 8.10

Обратите внимание: вариант основной системы на рис. 8.8 предполагает два этапа расчета, в то время как основная система рис. 8.5 — три этапа. Выбор варианта ОСМС для реализации осуществляется исполнителем, например, из соображений наименьшей трудоемкости построения эпюры определяющих усилий.



а



б

Рис. 8.11

В тоже время могут быть приняты во внимание и рассуждения исполнителя о том, что элементарные расчетные схемы одного вида ему удастся обчислить более надежно, чем другого вида. Например, на рис. 8.11, а приведен вариант основной системы, основанный на

балке 5-6 и ломаных брусках 1-2-5, 2-3-4-5; на рис. 8.11, б — вариант, основанный на трехшарнирных рамах 1-2-5-6 (ключевой шарнир 6) и 2-3-4-5 (ключевой шарнир 7).

Для дальнейших построений примем вариант ОСМС, представленный на рис. 8.5, а.

## 8.4. КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МЕТОДА СИЛ

Каноническая система уравнений метода сил (8.2) определяется количеством лишних связей ( $W = -2$ ) в виде (8.3).

$$[\delta] \cdot \{X\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{(-W)} \delta_{ij} X_j + \Delta_i = 0, \quad j = 1 \dots (-W). \quad (8.2)$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_1 = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_2 = 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

Напомним, что коэффициенты и свободные члены канонической системы уравнений (КСУ) являются перемещениями. Для задачи расчета от статической нагрузки — это перемещения от статической же нагрузки двух видов: той, что приложена к ЗРС, и нагрузки от единичных значений реакций каждой из отброшенных связей.

Вычисление этих перемещений будем вести в матричной форме, для чего нужно составить схему дискретизации ЗРС на основе способа контролируемых сечений. В соответствии с этим способом оси заданной расчетной схемы разбиваются на прямолинейные участки, пролет каждого из которых либо свободен от нагрузки, либо загружен распределенной нагрузкой постоянной интенсивности.

## 8.5. МАТРИЧНАЯ ФОРМА МЕТОДА СИЛ

Важно отметить, что отбрасывание внутренних связей при формировании ОСМС может изменить систему разбиения на участки осей ЗРС. Например, если принять за основу ОСМС, изображенную на рис. 8.11, б, то в точке 7 на оси участка верхнего ригеля появляется в качестве «направляющей» силы единичный сосредоточенный момент. При этом, слева от точки 7 и справа от нее внутренние изгибающие моменты будут разными, так что для их учета на единичной эпюре потребуются дополнительные контролируемые сечения, которые должны принадлежать разным участкам схемы дискретизации. Поэтому формирование схемы дискретизации должно обязательно проводиться с учетом выбранной основной системы.



### 8.5.1. РАЗРАБОТКА СХЕМЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

На рис. 8.12, а приведена **схема дискретизации**, построенная на основе только ЗРС. На рис. 8.12, б эта схема доработана с учетом появления шарнира в верхнем ригеле (реакции  $X_2$ ). Номера участков на рис. 8.12 указаны в кружочках, а знаки ординат на этих участках — в квадратиках.

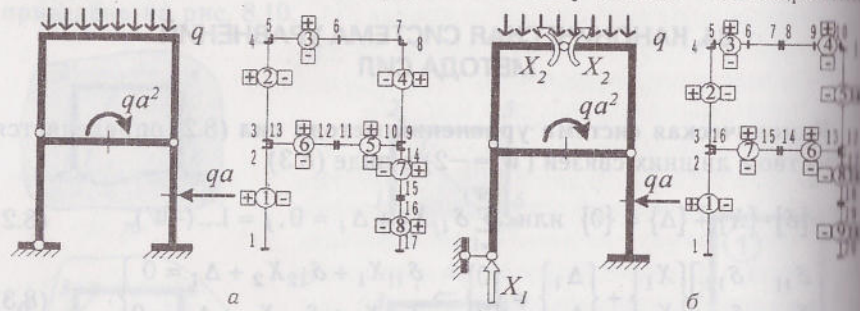


Рис. 8.12

Правило назначения знаков ординат заключается в том, что для каждого участка сторона оси, в которую откладываются положительные ординаты эпюры изгибающего момента, назначается произвольно. Но в дальнейшем, при переходе от эпюры к эпюре, принятое соглашение *изменять нельзя*. Рекомендуется назначать одно и то же правило знаков вдоль участков, лежащих на одной прямой — вертикальной или горизонтальной, как это выполнено на схемах рис. 8.12.

**Построение матриц** для вычисления перемещений требует наличия эпюр определяющих усилий (в данной задаче — изгибающих моментов) с ординатами, вычисленными в каждом контролируемом сечении назначенной схемы дискретизации. При этом правильность эпюр должна быть *проконтролирована*.

На рис. 8.13 приведены эпюры от нагрузки, приложенной в ЗРС («грузовая» эпюра, рис. 8.13, а) и эпюры от единичных значений реакций отброшенных связей («направляющие» эпюры, рис. 8.13, б, в).

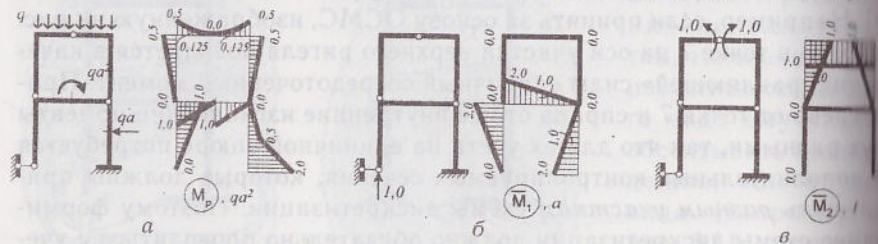


Рис. 8.13

### 8.5.2. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУЗОВОЙ И НАПРАВЛЯЮЩИХ ЭПЮР

Данные с эпюр рис. 8.13 с учетом схемы дискретизации (см. рис. 8.12) позволяют построить матрицы грузовых  $\{M_p\}$  и направляющих  $\{\bar{M}_x\}$  изгибающих моментов (8.4). Пунктирными линиями разделены ординаты, принадлежащие одному и тому же участку. В матрице направляющих моментов  $(M_x)$  первый столбец построен по эпюре  $M_1$ , а второй — по  $M_2$ .

$$\{M_p\} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} \begin{matrix} 0,0 \\ -1,0 \\ 0,0 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,125 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,125 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ -1,0 \\ 0,0 \\ -1,0 \\ 0,0 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 2,0 \end{matrix} qa^2; \quad (\bar{M}_x) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} \begin{matrix} 0,0a & 0,0 \\ 2,0a & 0,0 \\ 0,0a & 0,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & 0,0 \\ 0,0a & 0,0 \\ 1,0a & 0,0 \\ 1,0a & 0,0 \\ 2,0a & 0,0 \\ 0,0a & 0,0 \\ -1,0a & 0,0 \\ -1,0a & 0,0 \\ -2,0a & 0,0 \end{matrix} \quad (8.4)$$

### 8.5.3. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ПОДАТЛИВОСТИ

Построение матрицы податливости также основано на схеме дискретизации, представленной на рис. 8.12. Определяющими данными при этом являются количество участков и число контролируемых сечений на каждом из них в отдельности. Поскольку на начальном этапе формируются матрицы податливости *отдельных участков*:



$$\begin{aligned}
 b_{1-2} &= \frac{l_{1-2}}{6E_{1-2}J_{1-2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2a}{6E \cdot J} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \\
 b_{3-4} &= \frac{l_{3-4}}{6E_{3-4}J_{3-4}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2a}{6E \cdot 2J} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = b_{11-12}; \\
 b_{5-7} &= \frac{l_{5-7}}{6E_{5-7}J_{5-7}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{a}{6E \cdot 3J} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = b_{8-10}; \\
 b_{13-14} &= \frac{l_{13-14}}{6E_{13-14}J_{13-14}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{a}{6E \cdot 4J} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = b_{15-16}; \\
 b_{17-18} &= \frac{l_{17-18}}{6E_{17-18}J_{17-18}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{a}{6E \cdot J} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = b_{19-20}.
 \end{aligned}$$

Приведем выражения (8.5) к виду с общим множителем (8.6), а затем определим наибольший общий знаменатель коэффициентов-множителей матриц (8.4) и числители, отличные от единицы, которые появились при приведении к общему знаменателю, используем в качестве скалярных множителей для элементов соответствующих матриц.

$$\begin{aligned}
 b_{1-2} &= \frac{24a}{72EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{a}{72EJ} \begin{bmatrix} 48 & 24 \\ 24 & 48 \end{bmatrix}; \\
 b_{3-4} &= \frac{12a}{72EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{a}{72EJ} \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix} = b_{11-12}; \\
 b_{5-7} &= \frac{4a}{72EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{a}{72EJ} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = b_{8-10}; \\
 b_{13-14} &= \frac{3a}{72EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{a}{72EJ} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = b_{15-16}; \\
 b_{17-18} &= \frac{12a}{72EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{a}{72EJ} \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix} = b_{19-20}.
 \end{aligned}$$

Теперь мы готовы к составлению матрицы податливости ОСМС в том виде, который уже может быть использован для выполнения матричных операций формул, определяющих коэффициенты и свободные члены КСУ. Для получения такого выражения выполним объединение матриц участков в единую матрицу (символом  $\emptyset$  обозначены матрицы, состоящие из нулевых элементов), размещая блоки матриц податливости участков на диагонали общей матрицы (8.7). При этом выделенный общий множитель матриц (8.6) выносим за матричные скобки

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{1-2} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & b_{3-4} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & b_{5-7} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & b_{8-10} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & b_{11-12} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & b_{13-14} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & b_{15-16} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & b_{17-18} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & b_{19-20} & \emptyset \end{bmatrix} =$$

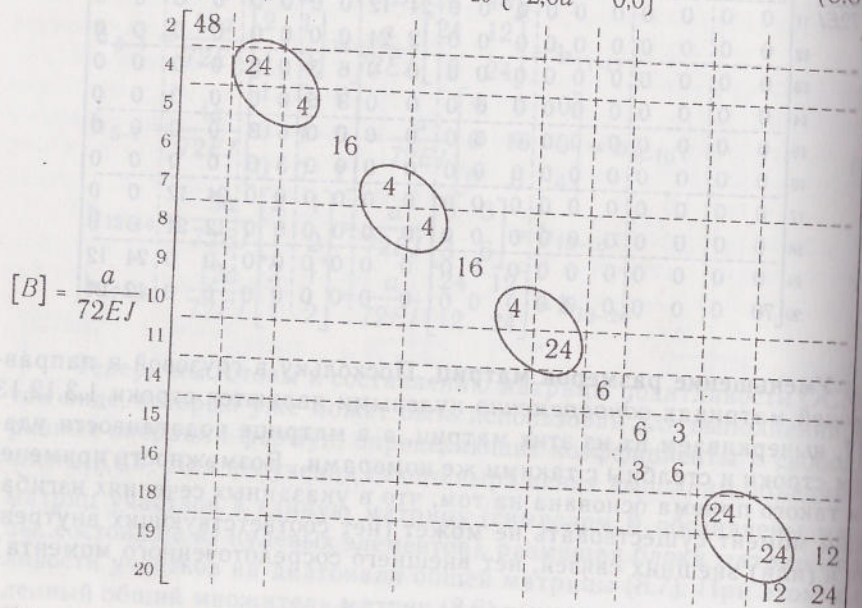
$$\frac{a}{72EJ} \begin{bmatrix} 48 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

**Уменьшение размеров матриц.** Поскольку в грузовой и направляющей матрицах одновременно нулевыми являются строки 1,3,12,13 и 17, вычеркиваем их из этих матриц, а в матрице податливости удаляем строки и столбцы с такими же номерами. Возможность применения такого приема основана на том, что в указанных сечениях изгибающий момент существовать не может (нет соответствующих внутренних и (или) внешних связей, нет внешнего сосредоточенного момента).



Результат реализации приема приведен в виде формул (8.8). Отметим, что число строк матриц уменьшилось на 25%.

$$\{M_p\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1,0 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,125 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,125 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ -1,0 \\ 0,0 \\ -1,0 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 2,0 \end{Bmatrix} qa^2; \quad (\overline{M}_x) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2,0a & 0,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 1,0a & 0,0 \\ 1,0a & 0,0 \\ 2,0a & 0,0 \\ -1,0a & 0,0 \\ -1,0a & 0,0 \\ -2,0a & 0,0 \end{Bmatrix}; \quad (8.8)$$



Дальнейший анализ матриц с ординатами изгибающего момента обнаруживает *одинаковые смежные строки* со следующими номерами 4-5, 7-8, 10-11, 18-19. В связи с этим возможно уменьшение размеров матриц изгибающих моментов путем удалением одной из парных строк (например, строки с большим номером в паре). Результаты применения приема показаны в виде формул (8.9).

$$\{M_p\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1,0 \\ 0,5 \\ 0,125 \\ 0,0 \\ 0,125 \\ 0,5 \\ -1,0 \\ 0,0 \\ -1,0 \\ 0,5 \\ 2,0 \end{Bmatrix} qa^2; \quad (\overline{M}_x) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2,0a & 0,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 1,0a & 0,0 \\ 1,0a & 0,0 \\ 2,0a & 0,0 \\ -1,0a & 0,0 \\ -2,0a & 0,0 \end{Bmatrix}. \quad (8.9)$$

Возможность применения этого приема основана на том, что наложенные на соответствующую точку *внутренние* связи (в отсутствии внешнего сосредоточенного момента) не разрешают возникновение неравновешенного внутреннего изгибающего момента в силу совместной работы сечений этой точки оси.

Совместность работы сечений, образующих точку оси расчетной схемы требует учета вклада в эту работу жесткости обоих смежных участков. Именно поэтому для матрицы податливости строки и столбцы с номерами из состава перечисленных пар *складываются*, а не удаляются. Сложение по парам строк и столбцов напрямую, хотя и простая, но довольно громоздкая операция. Поэтому предлагается следующий прием, основанный на том, что строки и столбцы содержат нулевые элементы везде, кроме трех диагоналей.

Слагаемые для вычисления определяются *сдвигом по диагонали* нижележащих блоков матрицы на вышележащие так, чтобы элементы главной диагонали парных строк оказались в одной ячейке матрицы. Для данного примера такими слагаемыми оказываются элементы, выделенные овалами в матрице податливости (8.8).

Сдвигаемые элементы нижележащих матриц вне главной диагонали просто располагаются на новых местах в матрице-результате.



[illegible]

Определение коэффициентов и свободных членов КСУ в матричной форме реализуется по формулам:

$$[\delta] = (\overline{M}_x)^T [B] (\overline{M}_x) = (C) (\overline{M}_x); \{\Delta\} = (\overline{M}_x)^T [B] \{M_p\} = (C) \{M_p\}. \quad (8.1)$$

Здесь символ  $T$ , как и раньше, означает операцию транспонирования (расположение элементов столбцов в строку и наоборот):

$$(\overline{M}_x)^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 10 & 14 & 15 & 16 & 18 & 20 \\ 2a & 0a & 0a & 0a & 0a & 0a & a & a & 2a & -a & -2a \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(C) = (\overline{M}_x)^T \cdot \frac{a}{72EJ} =$$

2	48																		
4		28																	
6			16																
7				8															
9					16														
10						28													
14							6												
15								6	3										
16									3	6									
18												48	12						
20													12	24					

$$= \frac{a}{72EJ} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 10 & 14 & 15 & 16 & 18 & 20 \\ 96a & 0a & 0a & 0a & 0a & 0a & 6a & 12a & 15a & -72a & -60a \\ 0 & -28 & -16 & -8 & -16 & -28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2,0a & 0,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 0,0a & -1,0 \\ 1,0a & 0,0 \\ 1,0a & 0,0 \\ 2,0a & 0,0 \\ -1,0a & 0,0 \\ -2,0a & 0,0 \end{bmatrix} = \frac{a}{72EJ} \begin{bmatrix} 432a^2 & 0 \\ 0 & 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}; \\
 & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1,0 \\ 0,5 \\ 0,125 \\ 0,0 \\ 0,125 \\ 0,5 \\ -1,0 \\ 0,0 \\ -1,0 \\ 0,5 \\ 2,0 \end{bmatrix} \left\{ qa^3 = \frac{qa^3}{72EJ} \begin{Bmatrix} -273a \\ -32 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \right. \\
 & \left. \begin{matrix} \{\delta\} = (C)(\overline{M}_x) = (C) \\ \{\Delta\} = (C)\{M_p\} = (C) \end{matrix} \right.
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$



Теперь можно записать КСУ метода сил в виде, который позволяет перейти к выбору метода решения этой системы уравнений:

$$\frac{a}{72EI} \begin{bmatrix} 432a^2 & 0 \\ 0 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \frac{qa^3}{72EI} \begin{Bmatrix} -273a \\ -32 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 432a^2 & 0 \\ 0 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -273a \\ -32 \end{Bmatrix} qa^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8.13)$$

### 8.5.5. РЕШЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно проводить любым известным исполнителю методов (Крамера, Гаусса, Холецкого и пр.). Решение системы уравнений (13)

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 273 / 432a \\ 32 / 96 \end{Bmatrix} qa^2 = \frac{qa^2}{144} \begin{Bmatrix} 91 / a \\ 48 \end{Bmatrix}. \quad (8.14)$$

Использовать полученные результаты можно только *после проведения всех проверок*, которые рекомендуются в методе сил.

### 8.5.6. ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ СОСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Контроль, который осуществляется в методе сил, проверяет правильность определения неизвестных, коэффициентов и свободных членов КСУ, но не правильность построения эпюр определяющих усилий. Поэтому возможен случай, когда безошибочно проведенные вычисления дают общий неверный результат задачи.

Проверки правильности применения метода сил начнем с контроля решения КСУ подстановкой решения в уравнения:

$$\frac{a}{72EI} \begin{bmatrix} 432a^2 & 0 \\ 0 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 91 / 144 \\ 48 / 144 \end{Bmatrix} qa^2 + \frac{qa^3}{72EI} \begin{Bmatrix} -273a \\ -32 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8.15)$$

Не стоит обольщаться очевидной правильностью результата в данном конкретном случае: опыт показывает, что ошибки, связанные с неверным решением КСУ, встречаются достаточно часто.

Следующим шагом будет проверка правильности вычисления коэффициентов при неизвестных. Для этого нужно иметь *суммарную* матрицу направляющих моментов, которая получается сложением элемен-

тов матрицы  $(\bar{M}_x)$  (8.9), стоящих в одной строке  $\{\bar{M}_x\} = \sum_{j=1}^{(-W)} \{\bar{M}_j\}$ .

$$\{\bar{M}_x\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 2,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 1,0 \\ 1,0 \\ 2,0 \\ -1,0 \\ -2,0 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0 \\ -1,0 \\ -1,0 \\ -1,0 \\ -1,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 2,0 \\ -1,0 \\ -1,0 \\ -1,0 \\ -1,0 \\ 1,0 \\ 1,0 \\ 1,0 \\ 2,0 \\ -1,0 \\ -2,0 \end{bmatrix};$$

$$\{\bar{M}_x\}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 10 & 14 & 15 & 16 & 18 & 20 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Суть проверки отражена формулой:

$$\{\bar{M}_x\}^T [B] \{M_p\} = \sum_{i=1}^{(-W)} \Delta_i. \quad (8.16)$$

Здесь в левой части стоит результат, который нужно подсчитать перемножением матриц, а в правой — путем суммирования всех коэффициентов при неизвестных, вычисленных ранее.

Проведем вспомогательные вычисления, необходимые для подсчета левой части равенства (8.16).

$$\{\bar{M}_x\}^T [B] = \{\bar{M}_x\}^T \cdot \frac{a}{72EI} =$$

2	48									
4		28								
6			16							
7				8						
9					16					
10						28				
14							6			
15								6	3	
16									3	6
18										48
20										

$$= (C) = \frac{a}{72EI} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 10 & 14 & 15 & 16 & 18 & 20 \\ 96 & -28 & -16 & -8 & -16 & -28 & 6 & 12 & 15 & -72 & -60 \end{pmatrix}.$$



Теперь нетрудно вычислить значение левой части:

$$\{\bar{M}_\Sigma\}^T [B] \{\bar{M}_\Sigma\} = (C) \{\bar{M}_\Sigma\} = (C) \begin{Bmatrix} 2,0 \\ -1,0 \\ -1,0 \\ -1,0 \\ -1,0 \\ -1,0 \\ 1,0 \\ 1,0 \\ 2,0 \\ -1,0 \\ -2,0 \end{Bmatrix} = \quad (8.17)$$

$$= \frac{a}{72EJ} \begin{bmatrix} 192 + 28 + 16 + \\ + 8 + 16 + 28 + \\ + 6 + 12 + 30 + \\ + 72 + 120 \end{bmatrix} = \frac{a}{72EJ} [528];$$

и значение правой части равенства (8.16):

$$\sum_{i=1}^{(-W)} \sum_{j=1}^{(-W)} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \delta_{ij} = \frac{a}{72EJ} [432 + 0 + 0 + 96] = \frac{a}{72EJ} [528]. \quad (8.18)$$

Нетрудно убедиться, что проверка матрицы коэффициентов при неизвестных подтвердила корректность вычислений этих коэффициентов по той направляющей матрице, которая была принята к расчету.

Приведем формулу проверки свободных членов КСУ:

$$\{\bar{M}_\Sigma\}^T [B] \{M_p\} = \sum_{i=1}^{(-W)} \Delta_i. \quad (8.19)$$

Здесь в левой части требуется провести вычисления над участвующими в решении задачи сформированными ранее матрицами, а справа — над вычисленными значениями свободных членов КСУ.

Часть вычислений, которые необходимо проделать при подсчете левой части, уже выполнена при проведении проверки коэффициентов при неизвестных (в частности, подсчитана матрица (C)):

$$\{\bar{M}_\Sigma\}^T [B] \{M_p\} = (C) \{M_p\}.$$

Таким образом, мы имеем следующий результат проверки:

$$\{M_\Sigma\}^T [B] \{M_p\} = (C) \begin{Bmatrix} -1,0 \\ 0,5 \\ 0,125 \\ 0,0 \\ 0,125 \\ 0,5 \\ -1,0 \\ 0,0 \\ -1,0 \\ 0,5 \\ 2,0 \end{Bmatrix} \left\{ qa^2 = \frac{qa^3}{72EJ} \begin{bmatrix} -96 - 14 - 2 - \\ -0 - 2 - 14 - \\ -6 + 0 - 15 - \\ -36 - 120 \end{bmatrix} = \frac{qa^3}{72EJ} [-305]; \right. \quad (8.20)$$

$$\sum_{i=1}^{(-W)} \Delta_i = \sum_{i=1}^2 \Delta_i = \frac{qa^2}{72EJ} [-273 - 32] = \frac{qa^2}{72EJ} [-305].$$

Нетрудно убедиться, что контроль показал правильность вычислений по принятым к расчету матрицам.

**Обратите внимание!** Указанные проверки можно выполнять и для решения КСУ метода сил. Возможно, это сэкономит объем вычислений, если исполнитель склонен к ошибкам при проведении численных расчетов. Еще одно замечание относится к сложению элементов направляющей матрицы с разной размерностью: вычисления проводятся только с числовыми коэффициентами элементов матриц, что не отражается на достоверности проверок.

## 8.5.7 МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЭПЮРЫ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ В ЗАДАННОЙ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ

Построение эпюры изгибающих моментов в ЗРС и ее проверка (деформационная) производится по формулам:

$$\{M_{ок}\} = \{M_p\} + (\bar{M}_\Sigma) \{X\}; \quad \{\bar{M}_\Sigma\}^T [B] \{M_{ок}\} = 0. \quad (8.21)$$

При проведении проверки левая часть вычисляется, а правая часть равна нулю, поскольку является суммой перемещений по направлениям отброшенных связей (суммарная эпюра является эквивалентом направляющей эпюры от единичных сил, действующих по направлениям отброшенных связей, вдоль которых в ЗРС перемещения отсутствуют!).

**Сравните** также структуру второй формулы (8.21) со структурой формул для вычисления коэффициентов и свободных членов КСУ метода сил (8.11), которые являются матричными аналогами формулы Мора



для вычисления перемещений точки оси плоской расчетной схемы и действия статической нагрузки.

Проведем вычисления по формулам (8.21):

$$\{M_{ок}\} = \begin{bmatrix} 2 & -1,0 \\ 4 & 0,5 \\ 6 & 0,125 \\ 7 & 0,0 \\ 9 & 0,125 \\ 10 & 0,5 \\ 14 & -1,0 \\ 15 & 0,0 \\ 16 & -1,0 \\ 18 & 0,5 \\ 20 & 2,0 \end{bmatrix} \cdot qa^2 + \begin{bmatrix} 2 & 2,0a & 0,0 \\ 4 & 0,0a & -1,0 \\ 6 & 0,0a & -1,0 \\ 7 & 0,0a & -1,0 \\ 9 & 0,0a & -1,0 \\ 10 & 0,0a & -1,0 \\ 14 & 1,0a & 0,0 \\ 15 & 1,0a & 0,0 \\ 16 & 2,0a & 0,0 \\ 18 & -1,0a & 0,0 \\ 20 & -2,0a & 0,0 \end{bmatrix} \cdot \frac{qa^2}{144} \begin{Bmatrix} 91/a \\ 48 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{qa^2}{144} \begin{bmatrix} 2 & -144 \\ 4 & 72 \\ 6 & 18 \\ 7 & 0 \\ 9 & 18 \\ 10 & 72 \\ 14 & -144 \\ 15 & 0 \\ 16 & -144 \\ 18 & 72 \\ 20 & 288 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2a & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & -1 \\ 10 & 0 & -1 \\ 14 & a & 0 \\ 15 & a & 0 \\ 16 & 2a & 0 \\ 18 & -1a & 0 \\ 20 & -2a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 91/a \\ 48 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{144} \begin{bmatrix} 2 & -144 + 182 + 0 \\ 4 & 72 + 0 - 48 \\ 6 & 18 + 0 - 48 \\ 7 & 0 + 0 - 48 \\ 9 & 18 + 0 - 48 \\ 10 & 72 + 0 - 48 \\ 14 & -144 + 91 + 0 \\ 15 & 0 + 91 + 0 \\ 16 & -144 + 182 + 0 \\ 18 & 72 - 91 + 0 \\ 20 & 288 - 182 + 0 \end{bmatrix} = \frac{qa^2}{144} \begin{bmatrix} 38 \\ 24 \\ -30 \\ -48 \\ -30 \\ 24 \\ -53 \\ 91 \\ 38 \\ -19 \\ 106 \end{bmatrix}$$

$$(C)\{M_{ок}\} = \frac{a}{72EJ} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 10 & 14 & 15 & 16 & 18 & 20 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \frac{qa^2}{144} \begin{bmatrix} 38 \\ 24 \\ -30 \\ -48 \\ -30 \\ 24 \\ -53 \\ 91 \\ 38 \\ -19 \\ 106 \end{bmatrix} = \frac{qa^3}{72 \cdot 144EJ} \begin{bmatrix} 96 \cdot 38 + 16 \cdot 30 + \\ + 8 \cdot 48 + 16 \cdot 30 + \\ + 12 \cdot 91 + 15 \cdot 38 + \\ + 72 \cdot 19 \\ 28 \cdot 24 + 28 \cdot 24 + \\ + 6 \cdot 53 + 60 \cdot 106 \end{bmatrix} = \frac{qa^3}{72 \cdot 144EJ} [+8022 - 8022] = 0$$

Погрешность построения окончательной эпюры проверки оценивается по формуле:

$$\{\bar{M}_z\}^T [B] \{M_{ок}\} = (C) \{M_{ок}\} = \frac{\left| \sum_k (\alpha_k > 0) + \sum_s (\beta_s < 0) \right|}{\min \left( \left| \sum_k \alpha_k \right|, \left| \sum_s \beta_s \right| \right)} \cdot 100\%, \quad (8.23)$$

где  $\alpha_k$  и  $\beta_s$  — соответственно положительные и отрицательные слагаемые в формуле для левой части.

Вычисления по формуле (8.23), как это следует из выкладок в последней строке формулы (8.22), дают нулевую погрешность. Отсутствие погрешности при проведении проверки объясняется тем, что вычисления в примере проводились в целых дробях.

Итак, мы получили решение задачи об определении распределения изгибающих моментов в заданной статически неопределимой расчетной схеме рамы методом сил в матричной форме. Т.е. эпюра изгибающих моментов в ЗРС, которая называется также «окончательной» эпюрой изгибающего момента, представлена матрицей  $\{M_{ок}\}$ .

Восстановление эпюры изгибающих моментов в ЗРС по полученной матрице значений проводится с учетом следующих факторов:

- правила знаков, введенного схемой дискретизации;
- нулевых значений момента в сечениях 1, 3, 12, 13 и 17;
- равенства значений момента в сечениях 4-5, 7-8, 10-11, 18-19.

На рис. 8.14 показан результат восстановления по матрице  $\{M_{ок}\}$  эпюры изгибающих моментов в ЗРС с учетом сформулированных выше правил. Ординаты на эпюре вычислены с тремя значащими цифрами.

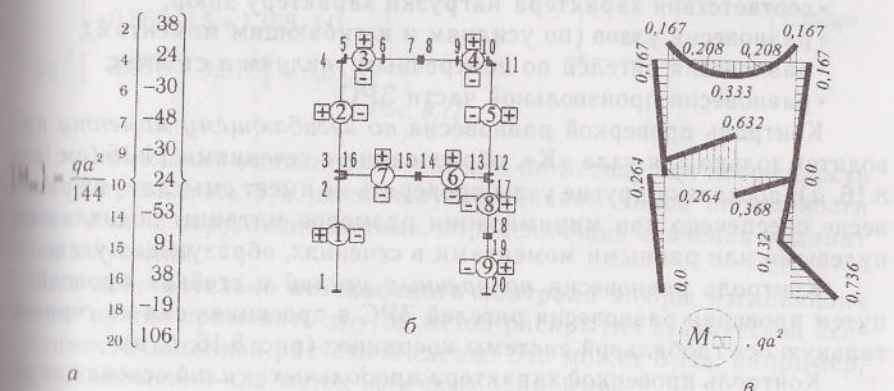


Рис. 8.14



## 8.6. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИЙ В ЗАДАННОЙ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ

Приемы построения этих эпюр те же, что и в статически определимых рамах. Соответствующие результаты, полученные по данным рис. 8.14, приведены на рис. 8.15.

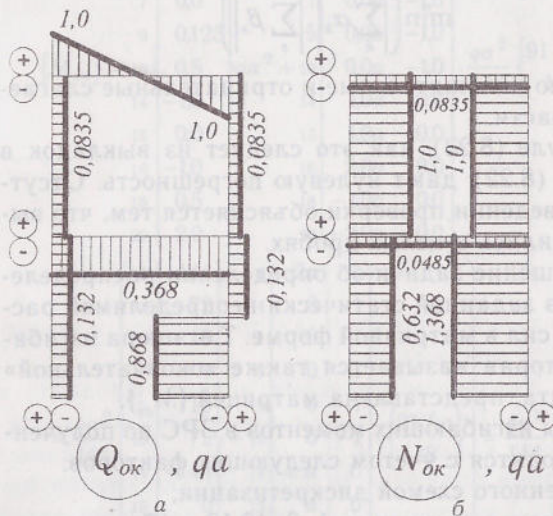


Рис. 8.15

## 8.7. КОНТРОЛЬ ПРАВИЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

После построения эпюр всех усилий проводятся проверки:

- соответствия характера нагрузки характеру эпюр;
- равновесия узлов (по усилиям и изгибающим моментам);
- равновесия ригелей по поперечным усилиям в стойках;
- равновесия произвольной части ЗРС.

Контроль проверкой равновесия по изгибающему моменту проводится только для узла «К», образованного сечениями 14-15 (см. рис. 8.16, а), поскольку другие узлы проверять не имеет смысла — их равновесие обеспечено при минимизации размеров матрицы податливости нулевыми или равными моментами в сечениях, образующих узлы.

Контроль равновесия поперечных усилий в стойках проводится путем проверки равновесия ригелей ЗРС в проекциях сил на горизонтальную ось глобальной системы координат (рис. 8.16, б, в).

Контроль проверкой характера продольных усилий основан на изменении ординат  $N_{ок}$  вдоль осей участков, которые не имеют нули

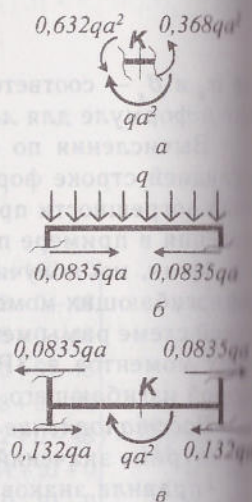


Рис. 8.16

на пролета участка внешних сил, с главным вектором, параллельным рассматриваемому участку.

Контроль равновесия произвольной части ЗРС нужно организовать на базе таких сечений, которые выделяли бы часть заданной расчетной схемы, удовлетворяющую следующим условиям:

- сечения не должны совпадать с контролируемыми сечениями на этапе дискретизации;
- сечения не должны проходить через узлы с дефектами;
- на отрезанной части должны присутствовать заданные нагрузки в максимально возможном количестве;
- усилия в сечениях должны назначаться по данным с построенных эпюр.

На рис. 8.17 приведена часть ЗРС, выделенная сечениями для проверки равновесия по всему спектру усилий.

$$X = qa(0,132 - 0,0835 + 0,0835 - 1,0 + 0,868) \approx 0;$$

$$Y = qa(0,632 - 1,0 + 0,5 - 1,0 \cdot 1,5 + 1,368) \approx 0;$$

$$\text{тот } K =$$

$$= qa^2 \left[ \begin{aligned} &(-1,0 + 0,132 + 0,132 \cdot 1,0 - \\ &-0,632 \cdot 1,0 - 0,0418 + \\ &+0,0835 \cdot 0,5 + 1,0 \cdot 1,0 - \\ &-0,208 - 0,0835 \cdot 2,0 - \\ &-0,5 \cdot 0,5 - 1,0 \cdot 1,5 \cdot 0,25 - \\ &-1,0 \cdot 1,0 - 0,302 + \\ &+0,868 \cdot 1,5 + 1,368 \cdot 1,0 \end{aligned} \right] =$$

$$= qa^2 [3,976 - 3,976] \approx 0,0.$$

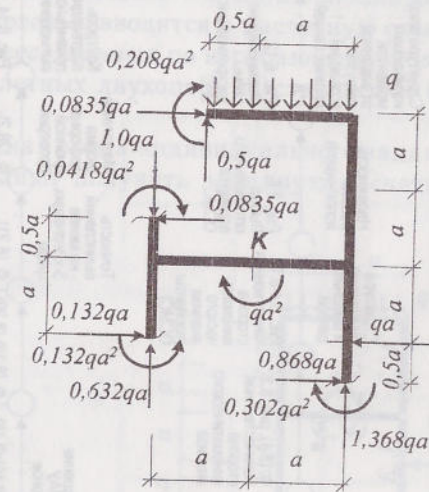


Рис. 8.17

При правильно выполненном расчете по методу сил погрешность может превышать 5%, поскольку источником такой погрешности является только округление данных, определяющих значения ординат эпюр усилий.

Для действительно независимого контроля эпюры изгибающих моментов нужно применить другой метод раскрытия статической неопределимости заданной расчетной схемы. Это может быть, например, метод перемещений или метод конечных элементов.