


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра машиноведения

ГОРЕЛОВ С.Н.

«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»  
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЕ



Направления 151000.65 – «Конструкторско-технологическое обеспечение автоматизированных машиностроительных производств», 151900.62 – «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 15.04.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств

Аэрокосмический институт

Форма обучения: заочная

Оренбург 2014

## Общие указания

По курсу «Сопротивление материалов» студент должен выполнить курсовую работу, состоящую из 5 заданий:

- Задание № 1 «Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (сжатии)»;
- Задание № 2 «Расчеты на прочность и жесткость при кручении»;
- Задание № 3 «Расчеты на прочность и жесткость при изгибе»;
- Задание № 4 «Геометрические характеристики плоских сечений»;
- Задание № 5 «Теория напряженного состояния».

Каждый студент выполняет задания (см. Приложение) по своему варианту. Номер варианта определяется буквой, с которой начинается фамилия студента. Студенты, фамилия которых начинается с букв:

А, Б, В	выполняют	первый вариант;
Г, Д, Е	-	второй вариант;
Ж, З, И	-	третий вариант;
К, Л, М	-	четвертый вариант;
Н, О, П	-	пятый вариант;
Р, С, Т	-	шестой вариант;
У, Ф, Х	-	седьмой вариант;
Ц, Ч, Ш	-	восьмой вариант;
Щ, Э, Ю, Я	-	девятый вариант;

При выполнении курсовых работ необходимо соблюдать следующие требования:

1. Работы следует выполнить и представить в сроки, указанные в учебном графике.
2. Работы должны быть выполнены в строгом соответствии с требованиями методических указаний.
3. Задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они представлены в условии работы.
4. Для каждого задания приведите его условие, а затем решение. Решение задач должно сопровождаться краткими пояснениями.
5. Задания выполняются на отдельных листах формата А4 с записями на одной странице.
6. Чертежи выполняются в масштабе с указанием всех необходимых данных и размеров в численных величинах.
7. Курсовые работы другого варианта, не засчитываются.
8. Общие данные к каждой задаче берутся из условий этих задач и приложений.

При возникновении вопросов, связанных с выполнением курсовой работы, следует обратиться за консультацией на кафедру машиноведения.

Оценка знаний студентов производится по следующим критериям:

- оценка «*отлично*» выставляется студенту, если он выполнил 5 заданий без ошибок;

оценка «хорошо» и «удовлетворительно» выставляется студенту, если он выполнил 5 заданий и допустил различное количество несущественных ошибок;

оценка «не удовлетворительно» выставляется студенту, если он при выполнении заданий допустил значительное количество существенных ошибок.

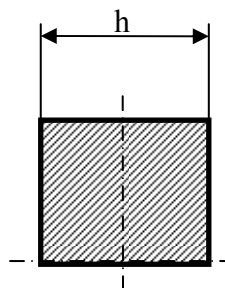
Не зачтенные курсовые работы должны быть доработаны и зачтены.  
Общий зачет проставляется, если зачтены **все пять заданий**.

## Пример выполнения курсовой работы.

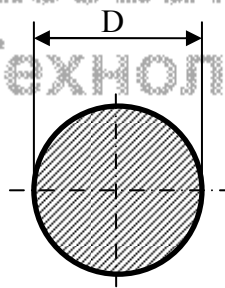
### Задача 1 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

#### Исходные данные:

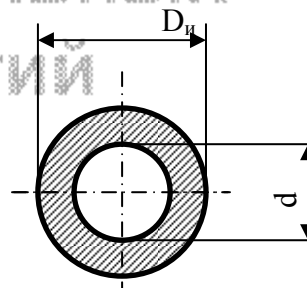
1. Определить реакцию опоры стержня.
2. Вычислить продольные силы  $N_z$  и построить их эпюру. Вычисление продольных сил рекомендуется выполнить по участкам, начиная от заделки (жестко заземленной опоры).
3. Определить опасное сечение на каждом участке.
4. Определить размеры поперечных сечений на каждом участке из условия прочности при  $\sigma_{adm} = 160$  МПа, на первом (считая от опоры) участке – размер  $h$  квадратного сечения, на втором – диаметр  $D$  круглого сечения, на третьем – наружный  $D_n$  и внутренний  $d$  диаметры кольцевого сечения (значение отношения  $d / D_n$  приведено в таблице исходных данных).
5. Вычислить удлинения на участках стержня и построить эпюру перемещений характерных сечений.



Сечение стержня на 1-ом участке



Сечение стержня на 2-ом участке



Сечение стержня на 3-ем участке

Данные:

$a=2,0$  м;  $b=2,5$  м;  $c=2,0$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=20$  кН;  $d/D_H=0,8$ .

**Решение:**

**1 Определяем реакцию в заделке**

$\Sigma F_z = R_z - F - q \cdot b + F = 0$ , тогда

$$R_z = q \cdot b = 50 \text{ кН}.$$

**2 Вычисляем продольные силы  $N_z$  на участках и строим их эпюру**

а) на 1-ом участке  $0 \leq Z_1 \leq a = 2,0$  м

$$N_z(Z_1) = -R_z = -50 \text{ кН};$$

б) на 2-ом участке  $0 \leq Z_2 \leq b = 2,5$  м

$$N_z(Z_2) = -R_z + q \cdot Z_2 + F$$

$$N_z(Z_2 = 0) = -R_z + F = -50 + 20 = -30 \text{ кН};$$

$$N_z(Z_2 = 2,5) = -R_z + q \cdot b + F = -50 + 20 \cdot 2,5 + 20 = 20 \text{ кН};$$

в) на 3-ем участке  $0 \leq Z_3 \leq c = 2,0$  м

$$N_z(Z_3) = -R_z + q \cdot b + F = -50 + 20 \cdot 2,5 + 20 = 20 \text{ кН}.$$

**3 По эпюре определяем опасные сечения и вычисляем их размеры на участках стержня**

3.1 Условие прочности при растяжении (сжатии):

$$\sigma = \frac{F}{A} < \sigma_{adm},$$

где  $F$  - максимальная продольная сила на участке, Н;

$A$  - площадь поперечного сечения на участке балки,  $\text{мм}^2$ ;

$\sigma_{adm} = 160$  МПа - допускаемое нормальное напряжение по условию задачи.

Тогда  $A \geq \frac{F}{\sigma_{adm}} \text{ мм}^2$ .

3.2 Определяем размеры поперечного сечения 1-го участка

$$A > \frac{F_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{50 \cdot 10^3}{160} = 312,5 \text{ мм}^2.$$

Сечение – квадрат с площадью:  $A = h^2$ . Отсюда:

$$h = \sqrt{A} = \sqrt{312,5} \approx 17,68 \text{ мм}.$$

Примем  $h = 18$  мм.

3.3 Определяем размеры поперечного сечения 2-го участка

$$A \geq \frac{F_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{30 \cdot 10^3}{160} = 187,5 \text{ мм}^2.$$

Сечение – круг с площадью  $A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$ . Отсюда:

$$D > \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 187,5}{3,14}} \approx 15,46 \text{ мм}.$$

Примем  $D = 16$  мм.

3.4 Определяем размеры поперечного сечения 3-го участка

$$A \geq \frac{F}{\sigma_{adm}} = \frac{20 \cdot 10^3}{160} = 125 \text{ мм}^2.$$

Сечение – кольцо с площадью  $A = \frac{\pi \cdot D_n^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ .

Принимая во внимание условие  $d/D_n = 0,8$  имеем  $d = 0,8 \cdot D_n$ .

Отсюда:

$$A = \frac{\pi \cdot D_n^2}{4} - \frac{\pi \cdot (0,8 \cdot D_n)^2}{4} = \frac{\pi \cdot D_n^2}{4} \cdot (1 - 0,8^2) \approx 0,283 \cdot D_n^2.$$

Тогда:

$$D_n = \sqrt{\frac{A}{0,283}} = \sqrt{\frac{125}{0,283}} = 21,1 \text{ мм};$$

$$d = 0,8 \cdot D_n = 0,8 \cdot 21,1 = 16,88 \text{ мм}.$$

Примем  $d = 17$  мм и  $D_n = 22$  мм.

**4 Вычисляем значения нормальных напряжений на каждом участке и строим их эпюру**

а) на 1-ом участке  $0 \leq Z_1 \leq a = 2,0$  м

$$\sigma(Z_1) = \frac{N_Z(Z_1)}{A} < \sigma_{adm},$$

сечение – квадрат с площадью:  $A = h^2 = 18^2 = 324 \text{ мм}^2$ , тогда:

$$\sigma(Z_1) = \frac{-50 \cdot 10^3}{324} = -154,32 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}; \text{ (по модулю).}$$

б) на 2-ом участке  $0 \leq Z_2 \leq b = 2,5$  м

$$\sigma(Z_2) = \frac{N_Z(Z_2)}{A} \leq \sigma_{adm},$$

сечение – круг с площадью:  $A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 200,96 \text{ мм}^2$ , тогда:

$$\sigma(Z_2 = 0) = \frac{-30 \cdot 10^3}{200,96} = -149,2 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma(Z_2 = 2,5) = \frac{20 \cdot 10^3}{200,96} = 99,5 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа};$$

в) на 3-ем участке  $0 \leq Z_3 \leq c = 2,0 \text{ м}$

$$\sigma(Z_3) = \frac{N_z(Z_3)}{A} \leq \sigma_{adm},$$

сечение – кольцо с площадью

$$A = \frac{\pi \cdot D_n^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 22^2}{4} - \frac{\pi \cdot 17^2}{4} = 153 \text{ мм}^2, \text{ тогда:}$$

$$\sigma(Z_3) = \frac{20 \cdot 10^3}{153} = 130,8 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа} .$$

Во всех случаях условия прочности выполнены.

## 5 Вычисляем удлинения на участках стержня и строим эпюру перемещений характерных сечений.

Удлинение (укорочение) стержня на первом участке составит:

$$\Delta l_1 = \frac{N_{z1} \cdot l_1}{E \cdot A_1} = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 324 \cdot 10^{-6}} = -1,54 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Укорочение второго участка составит:

$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= \frac{N_{z2} \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \int_0^{2,5} \frac{(-R_z + q \cdot Z_2 + F) \cdot dZ_2}{E \cdot A_2} = -\frac{30 \cdot Z_2^{2,5}}{E \cdot A_2} + \frac{20 \cdot Z_2^2}{2 \cdot E \cdot A_2} = \\ &= -\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 200,96 \cdot 10^{-6}} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 6,25}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 200,96 \cdot 10^{-6}} = \\ &= -1,87 \cdot 10^{-3} + 1,56 \cdot 10^{-3} = -0,31 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

На этом участке у эпюры перемещений будет экстремум в сечении, где  $N_{z2} = 0$ , т.е.

$$N_z(Z_2) = -R_z + q \cdot Z_2 + F = 0, \text{ откуда } Z_2 = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ м}.$$

При этом значении  $Z_2$

$$\Delta l_{2\max} = -\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 200,96 \cdot 10^{-6}} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2,25}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 200,96 \cdot 10^{-6}} = -1,12 \cdot 10^{-3} + 0,56 \cdot 10^{-3} = -0,56 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Удлинение третьего участка будет:

$$\Delta l_3 = \frac{N_{Z3} \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 153 \cdot 10^{-6}} = 1,31 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Полное удлинение стержня получим суммированием удлинений участков.

$$\Delta l = (-1,54 - 0,31 + 1,31) \cdot 10^{-3} = -0,54 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Для построения эпюры перемещений вычисляем их для характерных сечений (0,1,2,3,4):

$$w_0 = 0;$$

$$w_1 = \Delta l_1 = -1,54 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -1,54 \text{ мм};$$

$$w_2 = w_1 + \Delta l_{2\max} = -1,54 - 0,56 = -2,1 \text{ мм};$$

$$w_3 = w_1 + \Delta l_2 = -1,54 - 0,31 = -1,85 \text{ мм};$$

$$w_4 = w_3 + \Delta l_3 = -1,85 + 1,31 = -0,54 \text{ мм.}$$

Строим эпюру перемещений сечений по длине стержня.

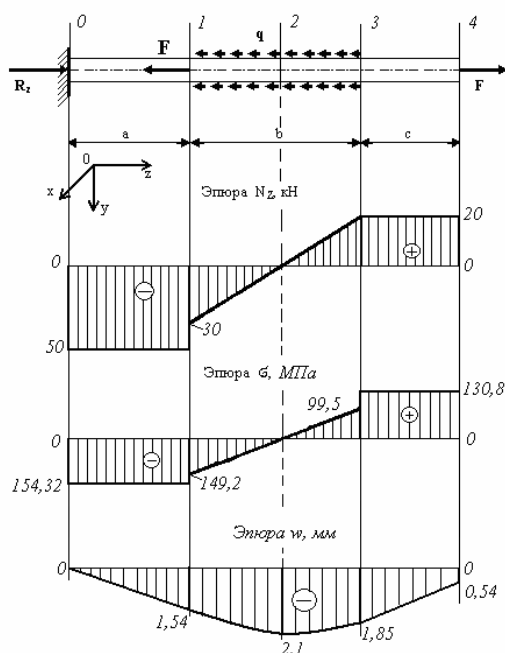
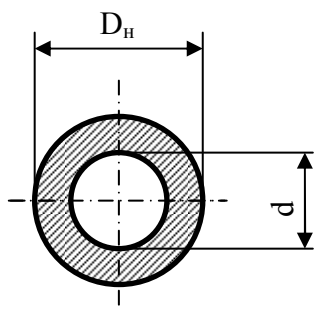


Рисунок 1 - Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений

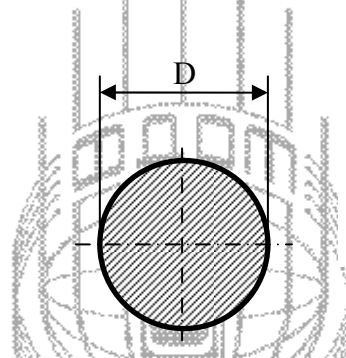
## Задача 2 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

### Исходные данные:

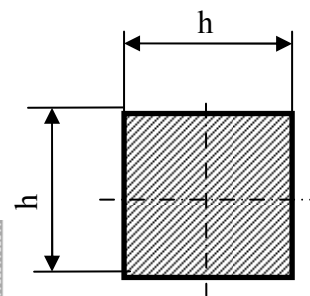
1. Определить реактивный крутящий момент вала.
2. Вычислить крутящие моменты  $M_Z$  и построить их эпюру.  
Вычисление крутящих моментов рекомендуется выполнять по участкам, начиная от заделки.
3. Определить размеры поперечных сечений на каждом участке из условия прочности при  $\tau_{adm} = 80$  МПа, на первом (считая от опоры) участке – диаметр кольцевого сечения (значение отношения  $d/D_n$  приведено в таблице исходных данных); на втором – диаметр  $D$  круглого сечения; на третьем – размер  $h$  квадратного сечения.
4. С учетом найденных размеров построить эпюру распределения действительных касательных напряжений по его длине.
5. Вычислить углы закручивания на участках стержня и построить их эпюру.



Сечение стержня на 1-ом участке



Сечение стержня на 2-ом участке



Сечение стержня на 3-ем участке

Исходные данные:

$$a=2 \text{ м}; b=2,5 \text{ м}; c=2 \text{ м}; q=20 \text{ кН/м}; F=20 \text{ кН}; d/D_n=0,8.$$

Решение:

### 1 Определяем реакцию в заделке

$$\Sigma M_Z = -M_R - M_1 + M_2 + 2M_3 = 0, \text{ тогда}$$

$$M_R = -M_1 + M_2 + 2M_3 = -30 + 45 + 70 = 85 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### 2 Строим эпюру крутящих моментов $M_Z$

а) на 1-ом участке  $0 \leq Z_1 \leq a = 2 \text{ м}$

$$M_Z(Z_1) = M_R = 85 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

б) на 2-ом участке  $0 \leq Z_2 \leq b = 2,5 \text{ м}$



$$M_Z(Z_2) = M_R + M_1 = 85 + 30 = 115 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

б) на 3-ем участке  $0 \leq Z_3 \leq c = 2,0 \text{ м}$

$$M_Z(Z_3) = M_R + M_1 - M_2 = 85 + 30 - 45 = 70 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### 3 По полученным данным определяем размеры поперечного сечения стержня

#### 3.1 Условие прочности при кручении

$$\tau = \frac{M_Z}{W_P} \leq \tau_{adm},$$

где  $M_Z$  - максимальный крутящий момент на участке, кН·м;

$W_P$  - момент сопротивления кручению в сечения на данном участке вала, мм<sup>3</sup>;

$\tau_{adm} = 80 \text{ МПа}$  - допускаемое касательное напряжение по условию задачи.

$$\text{Тогда } W_P \geq \frac{M_Z}{\tau_{adm}}, \text{ м}^3.$$

#### 3.2 Определяем размеры поперечного сечения 1-го участка

$$W_P > \frac{M_Z}{\tau_{adm}} = \frac{85 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 1,0625 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Сечение – кольцо с моментом сопротивления кручению:

$$W_P = \frac{\pi \cdot D_n^3}{16} \cdot (1 - (d/D_n)^4).$$

Принимая во внимание условие  $d/D_n = 0,8$  имеем:

$$W_P = \frac{3,14 \cdot D_n^3}{16} \cdot (1 - 0,8^4) \approx 0,116 \cdot D_n^3.$$

Тогда:

$$D_n > \sqrt[3]{\frac{W_P}{0,116}} = \sqrt[3]{\frac{1,0625 \cdot 10^{-3}}{0,116}} = 0,209 \text{ м}.$$

$$d = 0,8 \cdot D_n = 0,8 \cdot 209 = 167,2 \text{ мм}.$$

Принимаем  $d = 170 \text{ мм}$  и  $D_n = 210 \text{ мм}$ .

#### 3.3 Определяем размеры поперечного сечения 2-го участка

$$W_K \geq \frac{M_Z \cdot 10^3}{\tau_{adm}} = \frac{115 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 1,4375 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Сечение – круг с моментом сопротивления кручению:

$$W_P = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \approx 0,2 \cdot D^3.$$

Тогда:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{W_P}{0,2}} = \sqrt[3]{\frac{1,4375 \cdot 10^{-3}}{0,2}} = 0,193 \text{ м.}$$

Принимаем  $D=195$  мм.

### 3.4 Определяем размеры поперечного сечения 3-го участка

$$W_K \geq \frac{M_Z \cdot 10^6}{\tau_{adm}} = \frac{70 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 0,875 \cdot 10^3 \text{ м}^3.$$

Сечение – квадрат с моментом сопротивления кручению:

$$W_K = 0,208 \cdot h^3. \text{ Отсюда:}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{W_K}{0,208}} = \sqrt[3]{\frac{0,875 \cdot 10^3}{0,208}} \approx 0,162 \text{ м.}$$

Примем  $h=165$  мм.

## 4 Вычисляем касательные напряжения и строим их эпюру

а) на 1-ом участке  $0 \leq Z_1 \leq a = 2 \text{ м}$

$$\tau(Z_1) = \frac{M_Z(Z_1) \cdot 10^6}{W_P} \leq \tau_{adm},$$

сечение – кольцо с моментом сопротивления кручению:

$$W_P = \frac{\pi \cdot D_n^3}{16} \cdot (1 - (d/D_n)^4) = \frac{\pi \cdot 0,21^3}{16} \cdot (1 - (170/210)^4) = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3, \text{ тогда:}$$

$$\tau(Z_1) = \frac{85 \cdot 10^3}{1,04 \cdot 10^{-3}} = 82 \text{ МПа} > [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

$$\text{Перегрузка } \frac{82 - 80}{80} \cdot 100\% = 2,5\% \text{ допускается.}$$

б) на 2-ом участке  $0 \leq Z_2 \leq b = 2,5 \text{ м}$

$$\tau(Z_2) = \frac{M_Z(Z_2) \cdot 10^6}{W_P} \leq \tau_{adm},$$

сечение – круг с моментом сопротивления кручению:

$$W_P = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = \frac{\pi \cdot 0,195^3}{16} = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3, \text{ тогда:}$$

$$\tau(Z_2) = \frac{115 \cdot 10^3}{1,46 \cdot 10^{-3}} = 79 \text{ МПа} < \tau_{adm} = 80 \text{ МПа};$$

в) на 3-ем участке  $0 \leq Z_3 \leq c = 2,0$  м

$$\tau(Z_3) = \frac{M_Z(Z_3) \cdot 10^3}{W_K} \leq \tau_{adm},$$

сечение – квадрат с моментом сопротивления кручению

$$W_K = 0,208 \cdot h^3 = 0,208 \cdot 0,165^3 = 0,93 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3, \text{ тогда:}$$

$$\tau(Z_3) = \frac{70 \cdot 10^3}{0,93 \cdot 10^{-3}} = 75 \text{ МПа} < \tau_{adm} = 80 \text{ МПа}.$$

Во всех случаях условия прочности выполнены.

## 5 Вычисляем углы закручивания на участках стержня и строим их эпюру

Углы закручивания определяем по формуле:

$$\varphi = \frac{M_{Zi} \cdot l_i}{G \cdot I_{Pi}},$$

где  $M_{Zi}$  – крутящий момент на участке вала;

$l_i$  – длина соответствующего участка;

$G$  – модуль сдвига; для стали  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа;

$I_{Pi}$  – полярный момент инерции.

Предварительно вычислим требуемые параметры:

$$I_{P1} = \frac{\pi \cdot D_n^4}{32} \cdot [1 - (d/D_n)^4] = \frac{3,14 \cdot 0,21^4}{32} \cdot [1 - (170/210)^4] = 1,09 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

$$I_{P2} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,195^4}{32} = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

$$I_{K3} = \alpha h^4 = 0,14 \cdot 0,165^4 = 1,04 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

Вычисление углов закручивания выполняем по участкам, начиная от заделки.

$$\varphi_{1-0} = \frac{85 \cdot 10^3 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,09 \cdot 10^{-4}} = 0,0195 \text{ рад};$$

$$\varphi_{2-1} = \frac{115 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,42 \cdot 10^{-4}} = 0,0253 \text{ рад};$$

$$\varphi_{3-2} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,04 \cdot 10^{-4}} = 0,0168 \text{ рад}.$$

Суммированием определяем углы закручивания характерных сечений.

$$\varphi_{2-0} = 0,0195 + 0,0253 = 0,0448 \text{ рад}; \quad \varphi_{3-0} = 0,0448 + 0,0168 = 0,0616 \text{ рад}.$$

Строим эпюру углов закручивания.

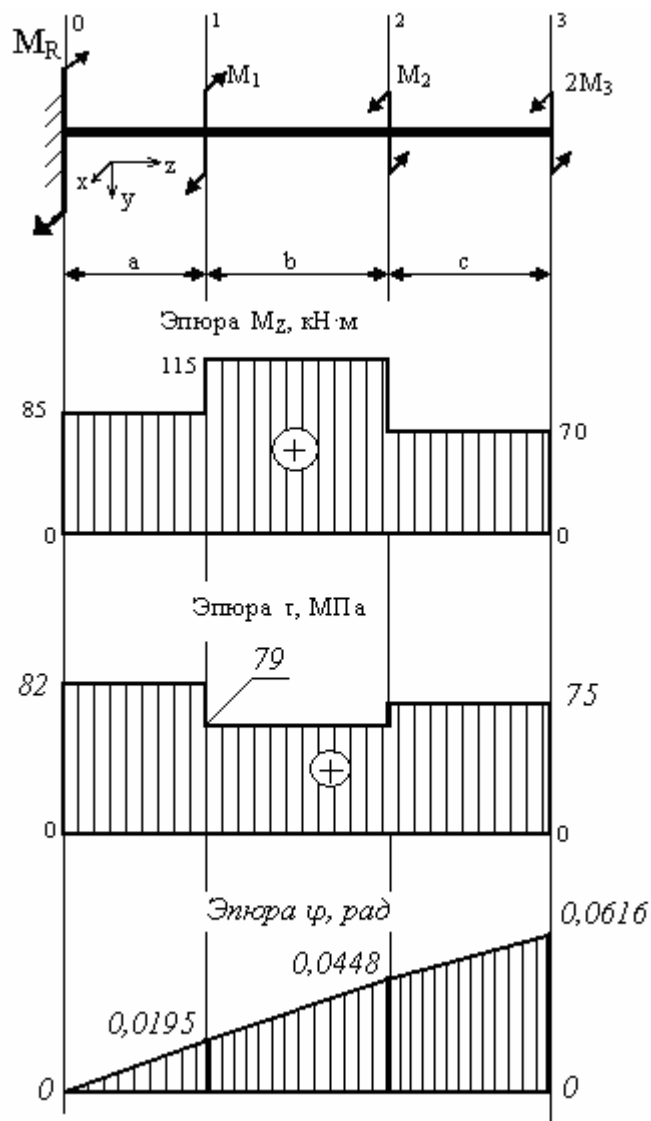


Рисунок 2 – Эпюры крутящих моментов, касательных напряжений и углов закручивания стержня

### Задача 3 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

#### Исходные данные:

1. Определить реакции опор балки.
  2. Вычислить внутренние силовые факторы и построить их эпюры.
  3. Определить опасное сечение балки.
  4. Из условий прочности, по нормальным напряжениям при  $\sigma_{adm} = 160$  МПа, определить осевой момент сопротивления в опасном сечении балки. По найденному значению момента сопротивления по сортаменту подобрать сечение указанного профиля.
  5. Вычислить нормальные и касательные напряжения в опасном сечении и построить их эпюры. Определить эквивалентное напряжение в опасной точке сечения по третьей теории прочности.
  6. Вычислить методом начальных параметров прогиб по середине пролета балки и изобразить упругую линию.
- Исходные данные:  $a=1,5$  м;  $b=3,0$  м;  $c=2,5$  м;  $q=15$  кН/м;  $F=10$  кН;  
 $M_1=65$  кН·м.

#### Решение:

##### 1 Определяем реакции опор балки

$$\sum M_A = -M_1 - F \cdot (a+b) - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + R_B \cdot (a+b+c) = 0, \text{ тогда}$$

$$R_B = \frac{F \cdot (a+b) + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M_1}{a+b+c} = \frac{10 \cdot 4,5 + 15 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 65}{7} = 18,1 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot (a+b+c) - M_1 + F \cdot c + q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + b + c\right) = 0, \text{ тогда}$$

$$R_A = \frac{-M_1 + F \cdot c + q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + b + c\right)}{a+b+c} = \frac{-65 + 10 \cdot 2,5 + 15 \cdot 1,5 \cdot 6,25}{7} = 14,4 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum F_y = -R_A + F + q \cdot a - R_B = -14,4 + 10 + 15 \cdot 1,5 - 18,1 = -32,5 + 32,5 = 0 -$$

реакции опор определены верно.

##### 2 Строим эпюры поперечных сил $Q_y$ и изгибающих моментов $M_x$

а) на 1-ом участке  $0 \leq Z_1 \leq a = 1,5$  м

$$Q_y(Z_1) = R_A - q \cdot Z_1 ;$$

$$Q_y(Z_1 = 0) = R_A = 14,4 \text{ кН} ;$$

$$Q_Y(Z_1 = 1,5\text{м}) = R_A - q \cdot 1,5 = 14,4 - 22,5 = -8,1\text{кН}.$$

$$M_X(Z_1) = R_A \cdot Z_1 - q \cdot Z_1 \cdot \frac{Z_1}{2},$$

$$M_X(Z_1=0) = 0;$$

$$M_X(Z_1=1,5\text{м}) = 14,4 \cdot 1,5 - 15 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 4,7 \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра  $M_X$  на данном участке представляет собой параболу, с целью определения максимального (минимального) значения функции  $M_X(Z_2)$  на рассматриваемом участке найдем ее первую производную:

$$\frac{dM_X(Z_1)}{dZ_1} = \left( R_A \cdot Z_1 - \frac{q \cdot Z_1^2}{2} \right)' = R_A - q \cdot Z_1.$$

Для определения значения  $Z_1$  при котором функция  $M_X(Z_1)$  принимает максимальное значение приравняем первую производную функции  $M_X(Z_1)$  к нулю:

$$R_A - q \cdot Z_1 = 0,$$

$$\text{отсюда } Z_1 = \frac{R_A}{q} = \frac{14,4}{15} = 0,96 \text{ м}.$$

При этом значении  $Z_1$  вычисляем максимальное значение функции на этом участке:

$$M_{X \max} = 14,4 \cdot 0,96 - \frac{15 \cdot 0,96^2}{2} = 6,9 \text{кН} \cdot \text{м}.$$

б) на 2-ом участке  $0 \leq Z_2 \leq b = 3,0 \text{ м}$

$$Q_Y(Z_2) = R_A - q \cdot a = 14,4 - 22,5 = -8,1\text{кН}.$$

$$M_X(Z_2) = M_1 + R_A \cdot (a + Z_2) - q \cdot a \cdot \left( \frac{a}{2} + Z_2 \right);$$

$$M_X(Z_2=0) = 65 + 14,4 \cdot 1,5 - 15 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 69,7 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_X(Z_2=3,0\text{м}) = 65 + 14,4 \cdot 4,5 - 15 \cdot 1,5 \cdot 3,75 = 45,4 \text{кН} \cdot \text{м}.$$

б) на 3-ем участке  $0 \leq Z_3 \leq c = 2,5 \text{ м}$

$$Q_Y(Z_3) = R_A - F - q \cdot a = 14,4 - 10 - 15 \cdot 1,5 = -18,1\text{кН}.$$

$$M_X(Z_3) =$$

$$M_1 + R_A \cdot (a + b + Z_3) - q \cdot a \cdot \left( \frac{a}{2} + b + Z_3 \right) - F \cdot Z_3;$$

$$M_X(Z_3=0) = 65 + 14,4 \cdot 4,5 - 15 \cdot 1,5 \cdot 3,75 = 45,4 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_X(Z_3=2,5\text{м}) = 0.$$

Строим эпюры вычисленных силовых факторов (рисунок 3).

### 3 Производим подбор сечения двутавра

Исходя из предыдущих расчетов, максимальное значение изгибающего момента на данной балке составляет  $M_{X_{\max}} = 69,7 \text{ кН}\cdot\text{м}$

Условие прочности при изгибе:

$$\sigma = \frac{M_{X_{\max}}}{W_X} \leq \sigma_{adm}.$$

Отсюда можно найти минимальный момент сопротивления изгибу  $W_X$  двутавровой балки:

$$W_X \geq \frac{M_{X_{\max}}}{\sigma_{adm}} = \frac{69,7 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,436 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 436 \text{ см}^3.$$

По таблице выбираем двутавр №27а, для которого  $W_X = 407 \text{ см}^3$ . При этом действующее напряжение будет  $\sigma = \frac{69,7 \cdot 10^3}{407 \cdot 10^{-6}} = 171 \text{ МПа}$  и перегрузка составит  $\frac{171 - 160}{160} \cdot 100\% = 6,9\% < 7\%$ .

Остальные размеры двутавра: высота  $h = 270 \text{ мм}$ ; ширина полки  $b = 135 \text{ мм}$ ; толщина стенки  $d = 6 \text{ мм}$ ; толщина полки  $t = 10,2 \text{ мм}$ , осевой момент инерции  $I_x = 5500 \text{ см}^4$ , статический момент полусечения  $S_x = 229 \text{ см}^3$ .

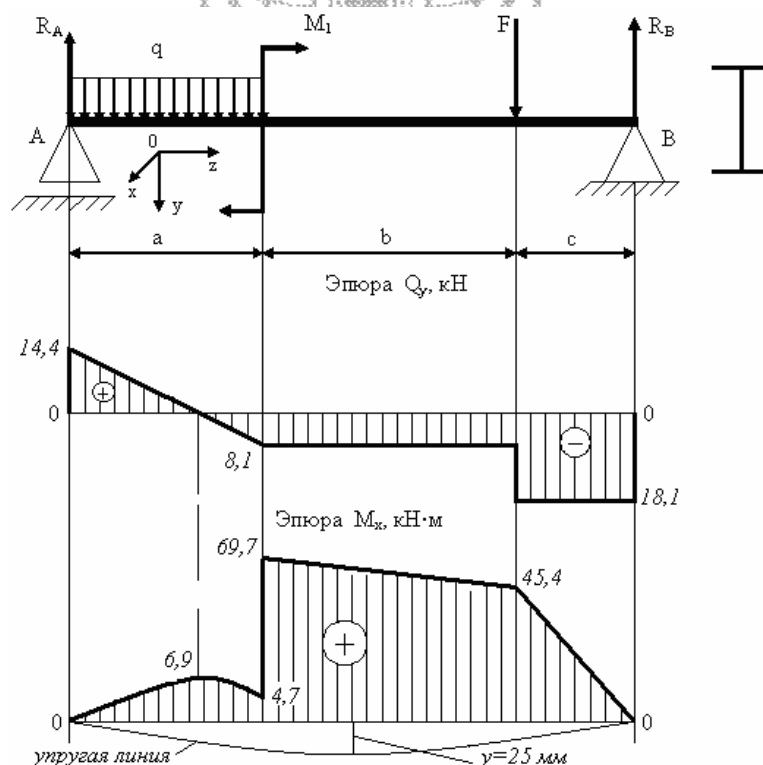


Рисунок 3 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

#### 4 Производим проверку прочности сечения.

Вычерчиваем в масштабе сечение и отмечаем характерные точки.

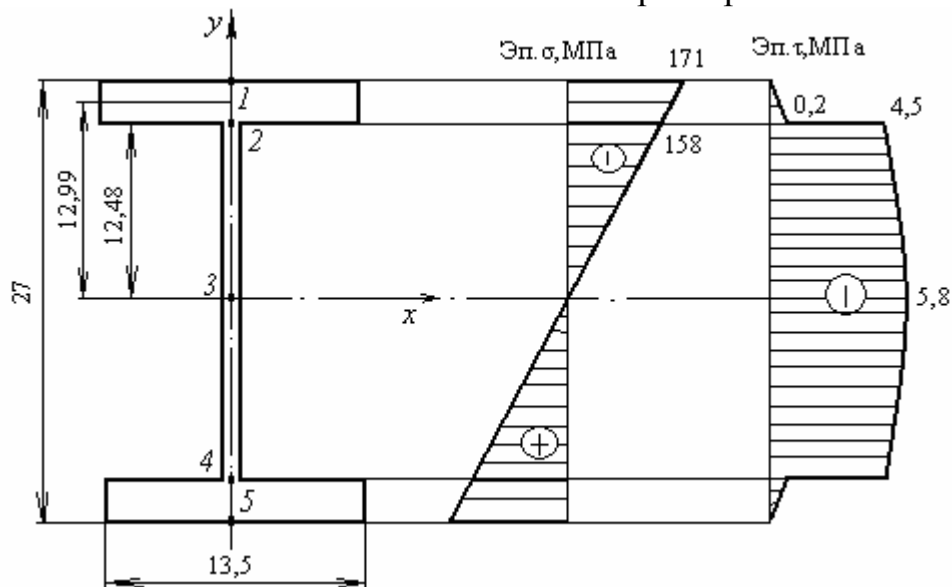


Рисунок 4 Напряжения в сечении

Определяем нормальные напряжения и строим их эпюру.

$$|\sigma_{T1}| = \sigma_{T5} = 171 \text{ МПа};$$

$$|\sigma_{T2}| = \sigma_{T4} = \frac{69,7 \cdot 10^3}{5500 \cdot 10^{-8}} \cdot 12,48 \cdot 10^{-2} = 158 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{T3} = 0.$$

Определяем касательные напряжения и строим их эпюру.

Напряжения вычисляем по формуле Журавского:  $\tau = \frac{Q_Y \cdot S_X^{omc.}}{I_X \cdot b}$ .

$$\tau_{T1} = \tau_{T5} = 0;$$

$$\tau_{T2}' = \tau_{T4}' = \frac{8,1 \cdot 10^3 \cdot 179 \cdot 10^{-6}}{5500 \cdot 10^{-8} \cdot 13,5 \cdot 10^{-2}} = 0,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{T2}'' = \tau_{T4}'' = \frac{8,1 \cdot 10^3 \cdot 179 \cdot 10^{-6}}{5500 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = 4,5 \text{ МПа};$$

$$\text{где } S_X^{omc.} = S_X^{полки} = 13,5 \cdot 1,02 \cdot 12,99 = 179 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{T3} = \tau_{\max} = \frac{8,1 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^{-6}}{5500 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = 5,8 \text{ МПа}.$$

Определяем эквивалентное напряжение в т.2 по третьей теории прочности:



$$\sigma_{экв.}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{158^2 + 4 \cdot 5,8^2} = 158,5 \text{ МПа.}$$

## 5 Составляем уравнения метода начальных параметров для прогибов и углов поворотов сечений

$$EI\theta(z) = EI\theta_0 + \frac{R_A \cdot z^2}{2} - \frac{q \cdot z^3}{6} + \frac{q \cdot (z-1,5)^3}{6} + \frac{M_1 \cdot (z-1,5)^1}{1} - \frac{F \cdot (z-4,5)^2}{2};$$

$$EIy(z) = EIy_0 + EI\theta_0 \cdot z + \frac{R_A \cdot z^3}{6} - \frac{q \cdot z^4}{24} + \frac{q \cdot (z-1,5)^4}{24} + \frac{M_1 \cdot (z-1,5)^2}{2} - \frac{F \cdot (z-4,5)^3}{6}.$$

Начальные параметры определяем из граничных условий (условий закрепления балки): при  $z = 0$   $y_A = 0 \Rightarrow y_0 = 0, EIy_0 = 0;$

при  $z = 7 \text{ м}$   $y_B = 0.$

Подставляем второе условие в уравнение прогибов и вычисляем  $EI\theta_0.$

$$0 = 0 + EI\theta_0 \cdot 7 + \frac{14,4 \cdot 7^3}{6} - \frac{15 \cdot 7^4}{24} + \frac{15 \cdot 5,5^4}{24} + \frac{65 \cdot 5,5^2}{2} - \frac{10 \cdot 2,5^3}{6};$$

$$7EI\theta_0 = -851,6; \quad EI\theta_0 = -121,7.$$

Подставляем  $EI\theta_0$  в уравнение прогибов и вычисляем прогиб по середине пролета, т.е. при  $z = 3,5 \text{ м}.$

$$EIy(z = 3,5) = 0 - 121,7 \cdot 3,5 + \frac{14,4 \cdot 3,5^3}{6} - \frac{15 \cdot 3,5^4}{24} + \frac{15 \cdot 2^4}{24} + \frac{65 \cdot 2^2}{2} =$$

$$= -426 + 102,9 - 93,8 + 10 + 130 = -276,9;$$

$$y = \frac{-276,9 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = -0,025 \text{ м.}$$

## Задача 4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

### Исходные данные:

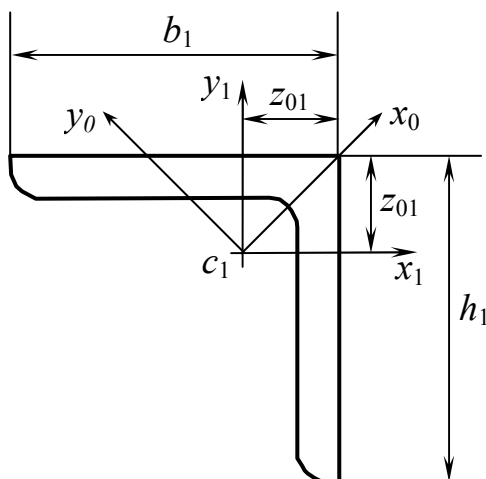
Для составного сечения, состоящего из швеллера и уголка (рис.1) требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти величины осевых и центробежных моментов инерции относительно центральных осей;
- 3) определить направления главных центральных осей;
- 4) найти величины моментов инерции относительно главных центральных осей;
- 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

## Решение:

По таблице сортамента выбираем исходные данные для фигур, входящих в составное сечение.

Уголок равнобокий 140x140x10:



Толщина стенки уголка – 10 мм.

$$h_1 = b_1 = 14 \text{ см}, A_1 = 27,3 \text{ см}^2,$$

$$Z_{01} = 3,82 \text{ см},$$

$$J_{x_1} = J_{y_1} = 512 \text{ см}^4$$

$$J_{x_0} = 814 \text{ см}^4, \quad J_{y_0} = 211 \text{ см}^4$$

Если в таблице сортамента отсутствует значение центробежного момента, то его можно вычислить при известных величинах главных моментов инерции сечения:

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{814 - 211}{2} \cdot (-1) = -301,5 \text{ см}^4$$

где угол  $\alpha$  взят отрицательным, так как ось  $x_0$  для совпадения с осью  $x_1$  поворачивается по часовой стрелке,  $\sin 2\alpha = -1$ .

Иначе центробежный момент инерции можно вычислить, используя следующую формулу:

$$J_{x_1 y_1} = \sqrt{(J_{x_1} - J_{\min}) \cdot (J_{y_1} - J_{\min})} = \sqrt{(512 - 211)(512 - 211)} = 301 \text{ см}^4.$$

Этот момент следует взять с отрицательным знаком, так как большая часть площади сечения уголка располагается в квадрантах, имеющих разные по знаку значения координат осей  $x$  и  $y$ .

Швеллер №20

$$h_2 = 20 \text{ см}, \quad b_2 = 7,6 \text{ см},$$

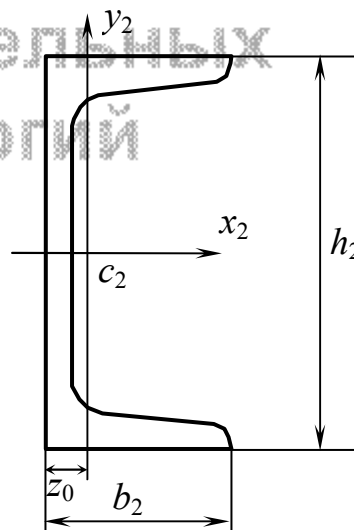
$$Z_0 = 2,07 \text{ см},$$

$$A_2 = 23,4 \text{ см}^2,$$

$$J_{x_2} = 1520 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_2} = 87,8 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_2 y_2} = 0 \quad (\text{сечение швеллера имеет ось симметрии}).$$



Вычерчиваем в масштабе заданное составное сечение.

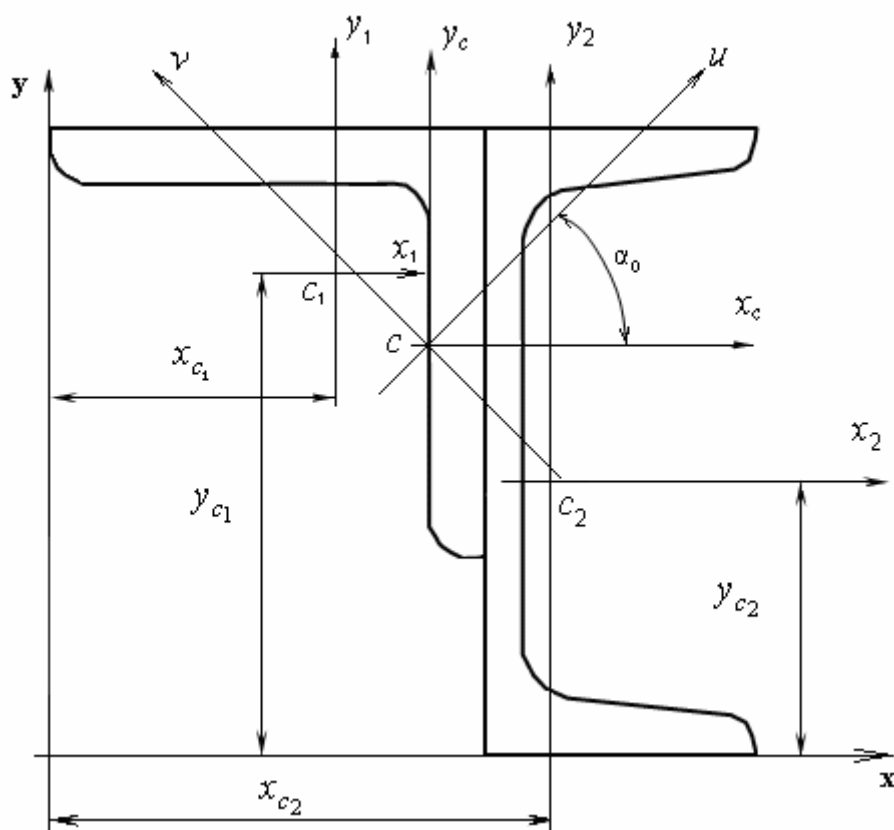


Рисунок 5

### 1 Определим положение центра тяжести составного сечения.

Выберем вспомогательную систему координат  $x$ - $y$  так, чтобы составной профиль оказался в первой четверти.

Координаты центра тяжести определим из выражений

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A}.$$

где  $S_x, S_y$  - статические моменты составного сечения относительно осей  $x$  и  $y$ .

$$S_x = A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}; \quad S_y = A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2}.$$

$$x_{c1} = b_1 - z_{01} = 14 - 3,82 = 10,18 \text{ см}$$

$$x_{c2} = b_1 + z_{02} = 14 + 2,07 = 16,07 \text{ см}$$

$$y_{c1} = h_2 - z_{01} = 20 - 3,82 = 16,18 \text{ см}$$

$$y_{c2} = \frac{h_2}{2} = 20 :: 2 = 10 \text{ см}$$

$$S_x = 27,3 \cdot 16,18 + 23,4 \cdot 10 = 675,7 \text{ см}^3$$

$$S_y = 27,3 \cdot 10,18 + 23,4 \cdot 16,07 = 654 \quad \text{см}^3$$

$$A = A_1 + A_2 = 27,3 + 23,4 = 50,7 \text{ см}^2.$$

$$x_c = \frac{654}{50,7} = 12,9 \text{ см}, \quad y_c = \frac{675,7}{50,7} = 13,3 \text{ см}.$$

По координатам  $x_c$  и  $y_c$  найдем положение центра тяжести сечения. Через т.С проведем оси  $x_c$ - $y_c$  - центральные оси.

**2 Вычислим величины осевых и центробежных моментов сечения относительно центральных осей  $x_c$  - $y_c$ :**

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{x_2} + a_2 \cdot A_2;$$

$$J_{y_c} = J_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2;$$

$$J_{x_c y_c} = J_{x_1 y_1} + a_1 d_1 A_1 + J_{x_2 y_2} + a_2 d_2 A_2;$$

где

$$a_1 = y_{c1} - y_c = 16,18 - 13,3 = 2,88 \text{ см},$$

$$a_2 = y_{c2} - y_c = 10 - 13,3 = -3,3 \text{ см},$$

$$d_1 = x_{c1} - x_c = 10,18 - 12,9 = -2,72 \text{ см},$$

$$d_2 = x_{c2} - x_c = 16,07 - 12,9 = 3,17 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 512 + 2,88^2 \cdot 27,3 + 1520 + 3,3^2 \cdot 23,4 = 2513,2 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 512 + 2,72^2 \cdot 27,3 + 87,8 + 3,17^2 \cdot 23,4 = 1036,9 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c y_c} = -301,5 - 2,88 \cdot 2,72 \cdot 27,3 - 3,3 \cdot 3,17 \cdot 23,4 = -760,2 \text{ см}^4.$$

**3 Определим направление главных центральных осей.**

Главные оси  $u$  -  $v$  проходят через центр тяжести т.С и повернуты относительно центральных осей на угол  $\alpha_0$ , определяемый из формулы

$$\text{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}}, \quad 2\alpha_0 = 45^\circ 50', \quad \alpha_0 = 22^\circ 55'.$$

Т.к.  $\alpha_0 > 0$ , то оси  $u$  -  $v$  получаются поворотом от осей  $x_c$  -  $y_c$  против часовой стрелки.

**4 Определяем величины моментов инерции относительно главных центральных осей:**



$$J_{u,v} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} = \frac{2513,2 + 1036,9}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(2513,2 - 1036,9)^2 + 4 \cdot (-760,2)^2} = 1775 \pm 1059,6 \text{ см}^4$$

$$J_u = J_{\max} = 1775 + 1059,6 = 2834,6 \text{ см}^4,$$

$$J_v = J_{\min} = 1775 - 1059,6 = 715,4 \text{ см}^4$$

При правильно выполненных вычислениях должно выполняться равенство

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_u + J_v$$

$$2513,2 + 1036,9 = 2834,6 + 715,4$$

$$3550 = 3550$$

### 5 Вычисляем величины радиусов эллипса инерции:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}} = \sqrt{\frac{2834,6}{50,7}} = 7,5 \text{ см}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}} = \sqrt{\frac{715,4}{50,7}} = 3,8 \text{ см}.$$

Строим эллипс инерции, откладывая радиус  $i_u$  вдоль оси  $v$ , а радиус  $i_v$  - вдоль оси  $u$ .

## Задача 5 ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

### Исходные данные:

Стальной кубик (рис.6) находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю). Требуется найти:

- 1) главные напряжения и направление главных площадок;
- 2) максимальные касательные напряжения;
- 3) главные деформации  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ;

4) эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}}$  по четвертой (энергетической) теории прочности;

5) относительное изменение объема;

6) удельную потенциальную энергию деформации.

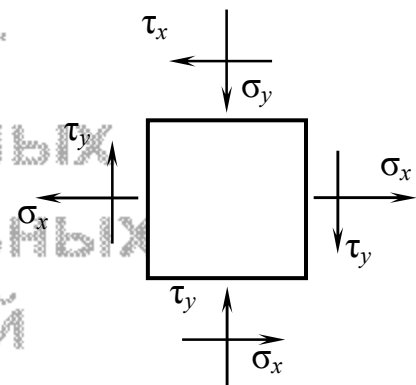


Рисунок 6

Исходные данные:  $\sigma_x = 90$  МПа,  $\sigma_y = 80$  МПа,  $\tau_x = 50$  МПа.

При выполнении этой задачи необходимо руководствоваться следующим правилом знаков для нормальных и касательных напряжений: растягивающее нормальное напряжение положительно, а сжимающее - отрицательно. Касательное напряжение по боковой грани призмы положительно, если

изображающий его вектор стремится вращать призму по часовой стрелке относительно любой точки, лежащей на внутренней нормали этой грани.

**Решение:**

Расставим знаки в исходных данных в соответствии с направлением напряжений на рис.6. Получим:

$$\sigma_x = 90 \text{ МПа}, \sigma_y = -80 \text{ МПа}, \tau_x = -50 \text{ МПа}, \tau_y = 50 \text{ МПа}.$$

**1. Найдем главные напряжения:**

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \frac{90 + (-80)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{90 - (-80)}{2}\right)^2 + (-50)^2} = 5 \pm 98,6 \text{ МПа} \quad (5.1)$$

Главные напряжения обозначают  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$ ; при этом индексы расставляют так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (5.2)$$

В задаче рассматривается плоское напряженное состояние, т.е. одно из трех главных напряжений равно нулю, поэтому из формулы (5.1) и правила (5.2) следует:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 5 + 98,6 = 103,6 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \sigma_{\min} = 5 - 98,6 = -93,6 \text{ МПа}.$$

Направление главных площадок относительно площадок, показанных на рисунке 6, определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{-2\tau_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot 50}{90 - (-80)} = -\frac{100}{170} = -0,588; \\ 2\alpha_0 &= -30^{\circ}30'; \quad \alpha_0 = -15^{\circ}15'. \end{aligned}$$

Отрицательный угол  $\alpha_0$  откладывается по часовой стрелке от площадки с большим нормальным напряжением (в данном случае  $\sigma_x$ ). Можно также пользоваться правилом: для определения положения главной площадки с напряжением  $\sigma_{\max}$  необходимо площадку с большим (в алгебраическом смысле) нормальным напряжением повернуть на угол  $\alpha_0$  в направлении, в котором вектор касательного напряжения, действующего по этой же площадке, стремится вращать элементарный параллелепипед относительно его центра.

**2. Найдем максимальные касательные напряжения:**

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{103,6 - (-93,6)}{2} = 98,6 \text{ МПа}.$$

**3. Найдем главные деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  из обобщенного закона Гука:**

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [103,6 - 0,3 \cdot (-93,6)] = 65,8 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-0,3 \cdot (-93,6 + 103,6)] = -1,5 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (-93,6 - 0,3 \cdot 103,6) = -62,3 \cdot 10^{-5}.$$

**4. Найдем эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв.}}^{IV}$ .**

$$\sigma_{\text{экв.}}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{103,6^2 + 93,6^2 + 197,2^2}{2}} = 171 \text{ МПа}.$$

**5. Найдем относительное изменение объема:**

$$\vartheta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (65,8 - 1,5 - 62,3) \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^{-5}.$$

**6. Найдем удельную потенциальную энергию деформации:**

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)].$$

В данной задаче  $\sigma_2 = 0$  и тогда:

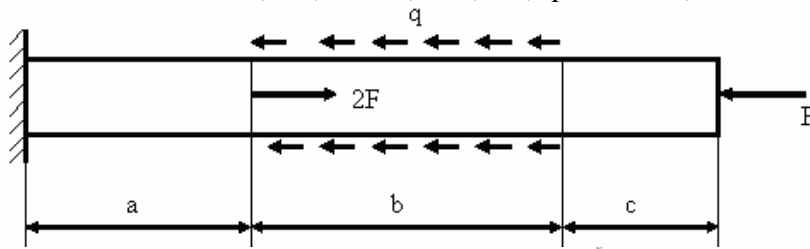
$$u = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_3}{2E} = \frac{103,6^2 + 93,6^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot 103,6 \cdot (-93,6)}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} =$$
$$= 6328 \cdot 10^{-5} \text{ Н / мм}^2 = 0,06328 \text{ МДж / м}^3.$$



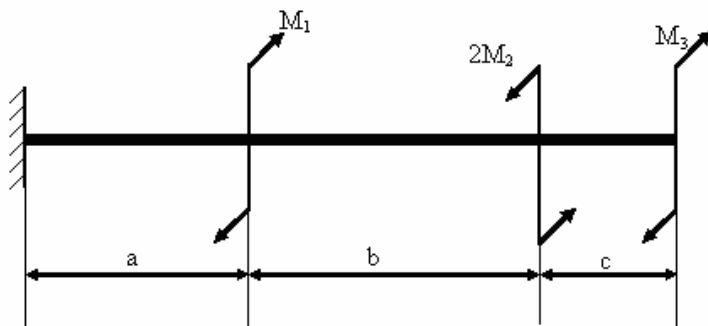
# Приложение

## Вариант №1

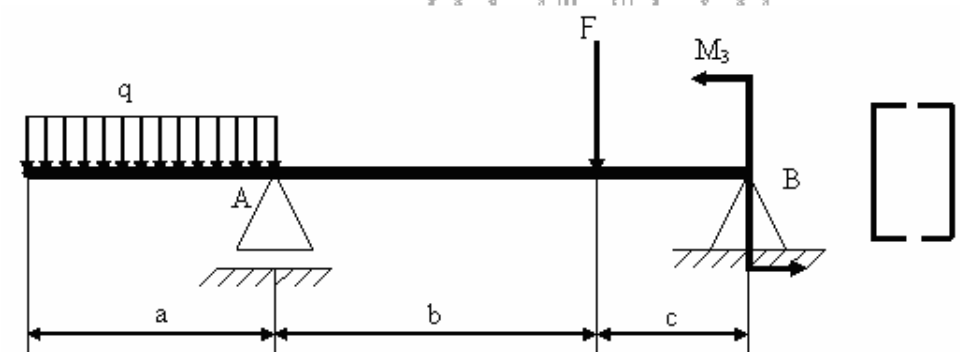
Задача 1  $a=1,5$  м;  $b=3$  м;  $c=2,5$  м;  $q=15$  кН/м;  $F=10$  кН;  $d/D_H=0,8$ .



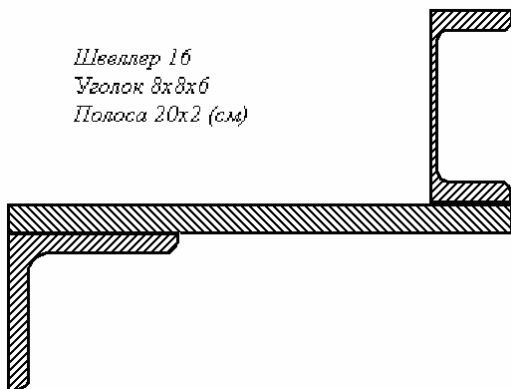
Задача 2  $a=3$  м;  $b=2,5$  м;  $c=1$  м;  $M_1=65$  кН·м;  $M_2=45$  кН·м;  $M_3=30$  кН·м;  $d/D_H=0,5$ .



Задача 3  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=30$  кН;  $M_2=30$  кН·м.

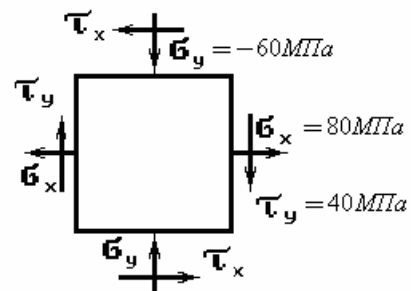


Задача 4



Швеллер 16  
Уголок 8x8x6  
Полоса 20x2 (см)

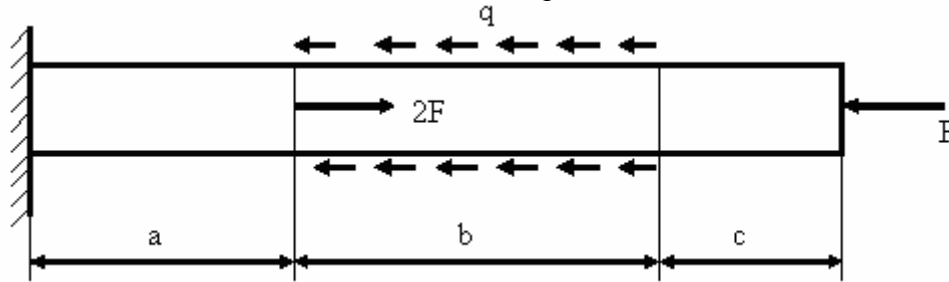
Задача 5



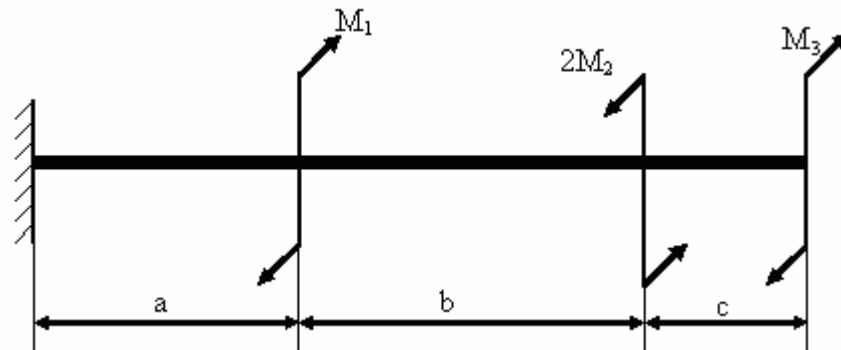


## Вариант №2

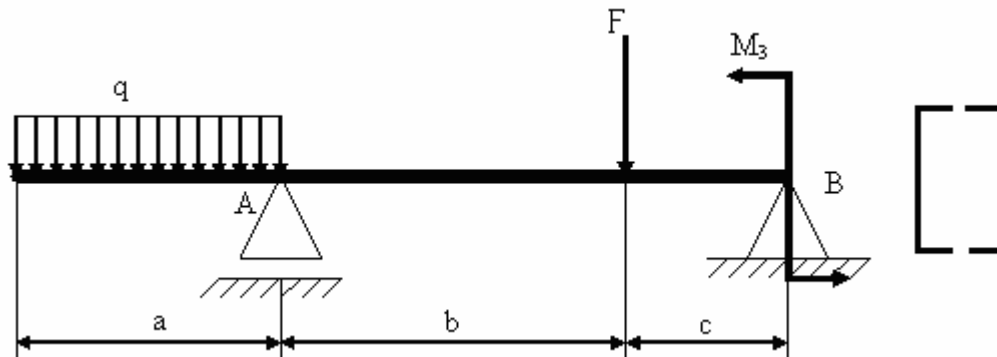
Задача 1  $a=2,5$  м;  $b=1,5$  м;  $c=2,0$  м;  $q=15$  кН/м;  $F=20$  кН;  $d/D_H=0,4$ .



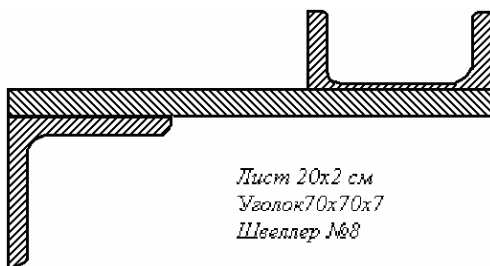
Задача 2  $a=2,5$  м;  $b=1,5$  м;  $c=2$  м;  $M_1=30$  кН·м;  $M_2=45$  кН·м;  $M_3=65$  кН·м;  $d/D_H=0,4$ .



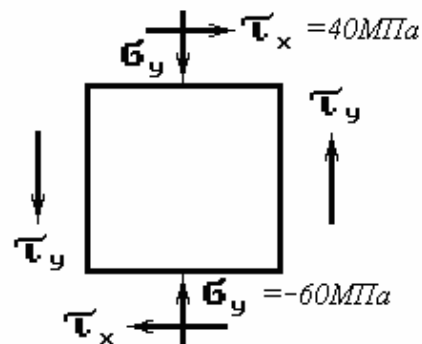
Задача 3  $a=2,5$  м;  $b=1,5$  м;  $c=2$  м;  $q=15$  кН/м;  $F=20$  кН;  $M_3=45$  кН·м.

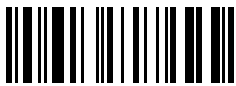


Задача 4



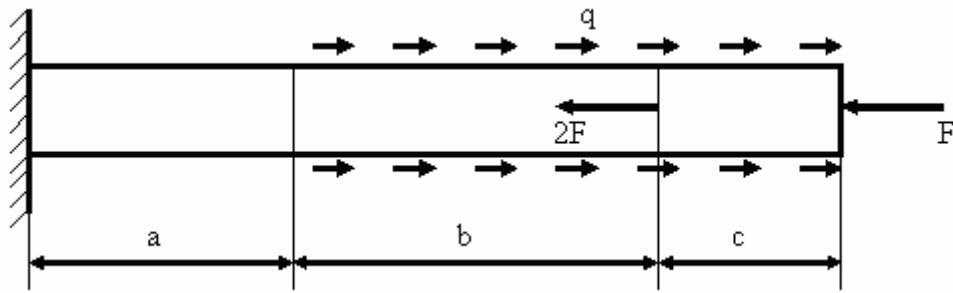
Задача 5



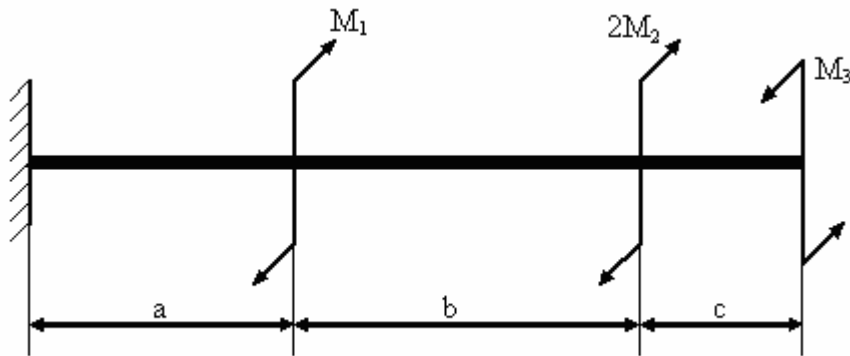


### Вариант № 3

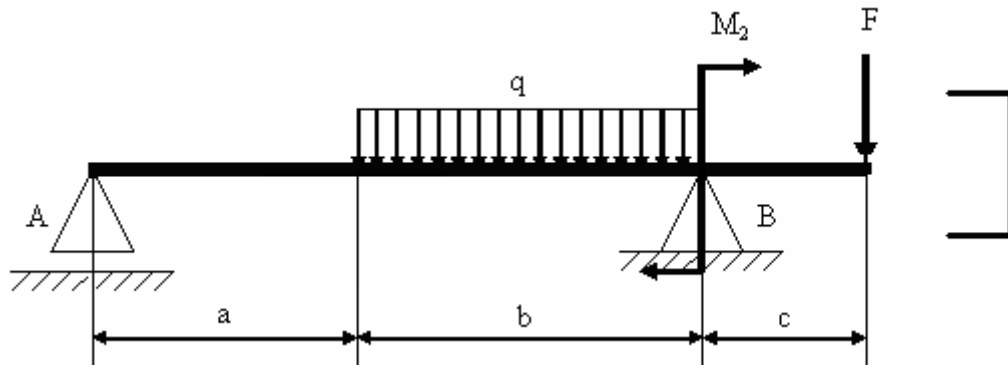
Задача 1  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=30$  кН;  $d/D_H=0,5$ .



Задача 2  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $M_1=20$  кН·м;  $M_2=30$  кН·м;  $M_3=45$  кН·м;  $d/D_H=0,5$ .



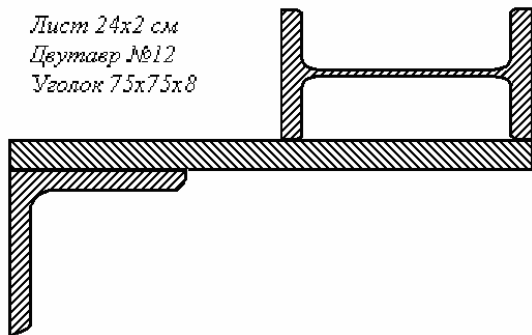
Задача 3  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=30$  кН;  $M_2=20$  кН·м.



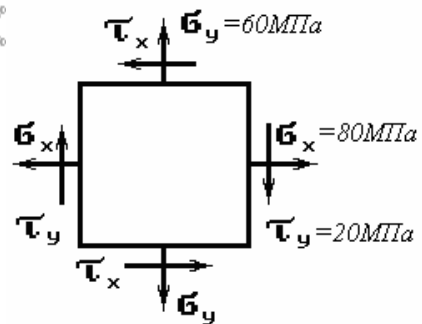
## Образовательных

Задача 4

Лист 24x2 см  
Цултавр 1812  
Уголок 75x75x8

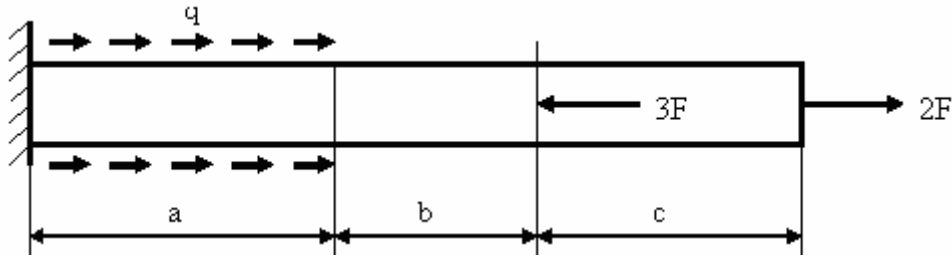


Задача 5

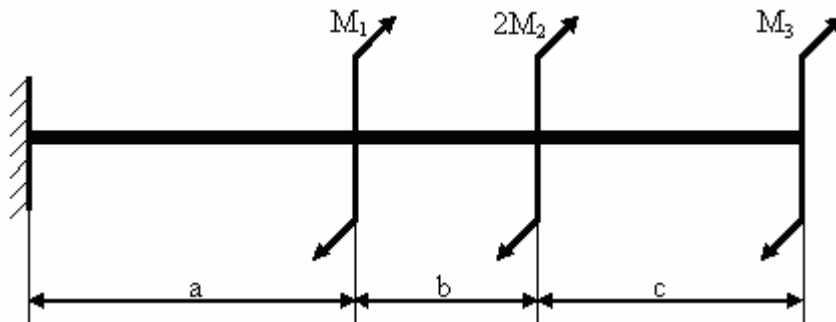


## Вариант № 4

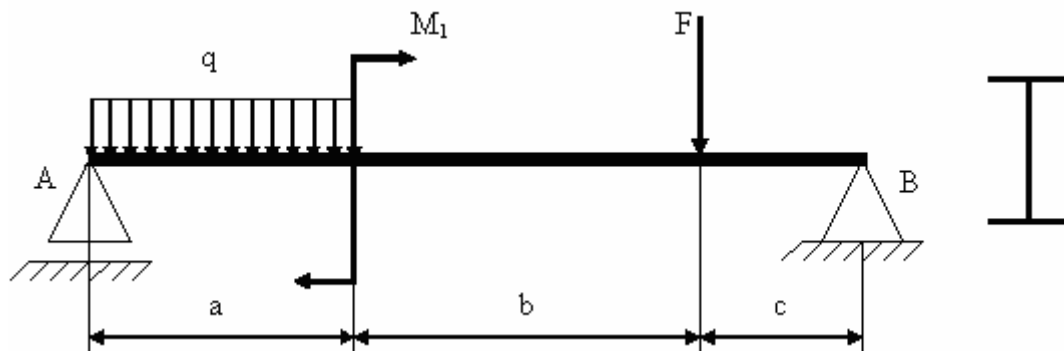
Задача 1  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=30$  кН ;  $d/D_H=0,5$ .



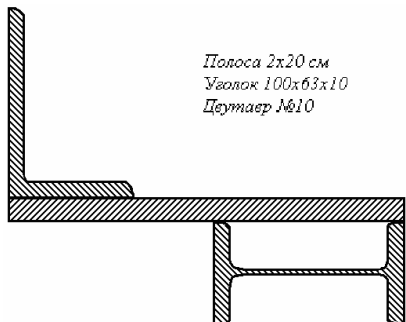
Задача 2  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м ;  $M_1=20$  кН·м;  $M_2=30$  кН·м;  $M_3=45$  кН·м;  $d/D_H=0,5$



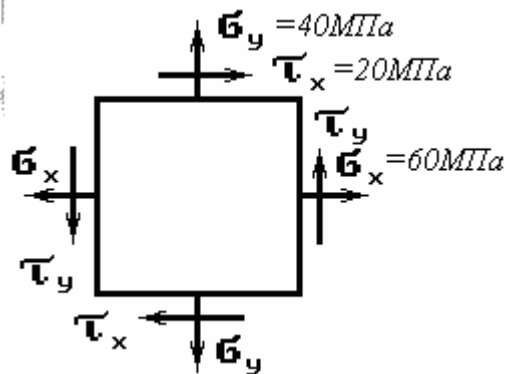
Задача 3  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=30$  кН;  $M_1=20$  кН·м

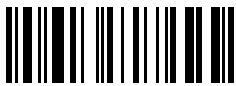


Задача 4



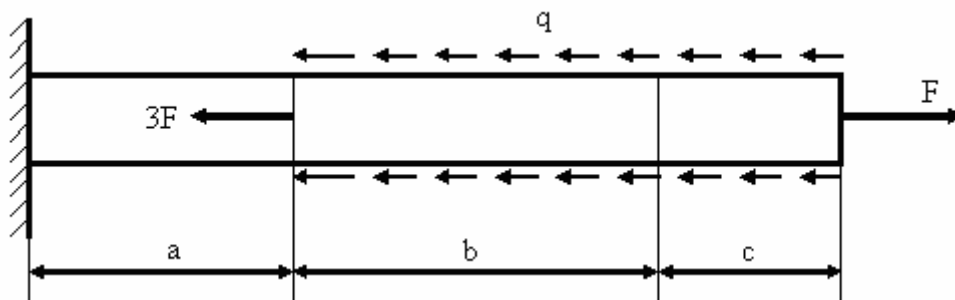
Задача 5



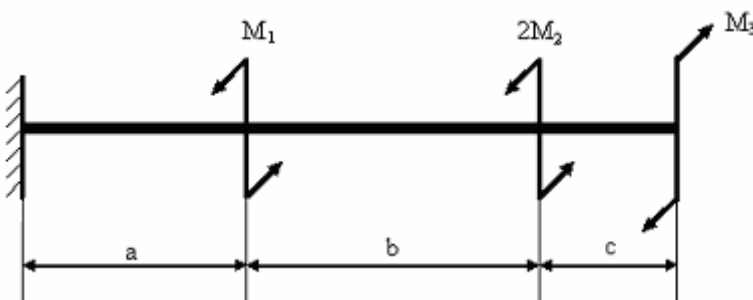


## Вариант № 5

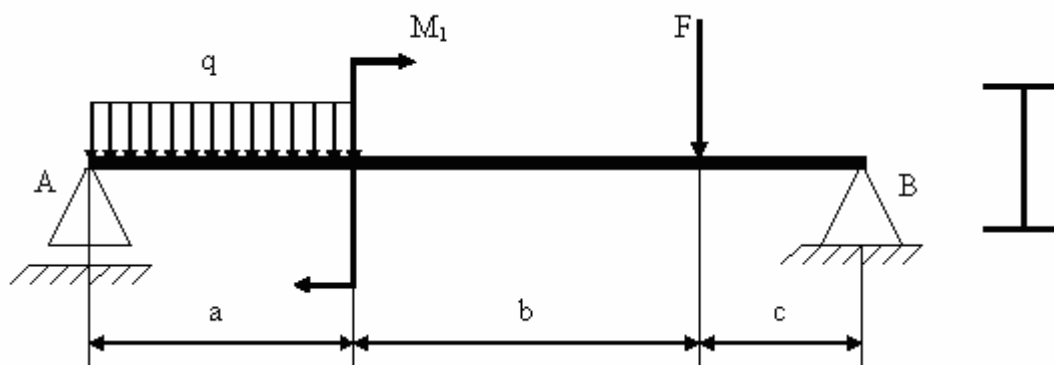
Задача 1



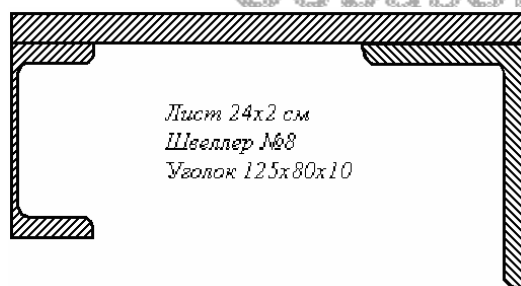
Задача 2



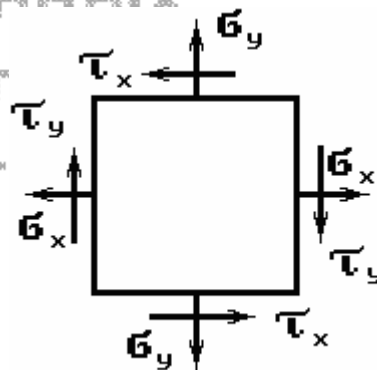
Задача 3

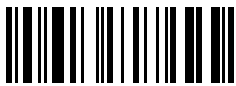


Задача 4



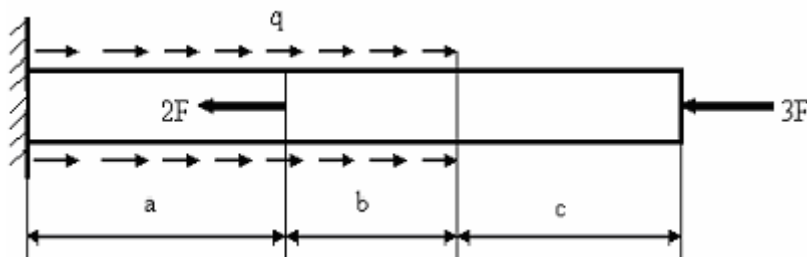
Задача 5



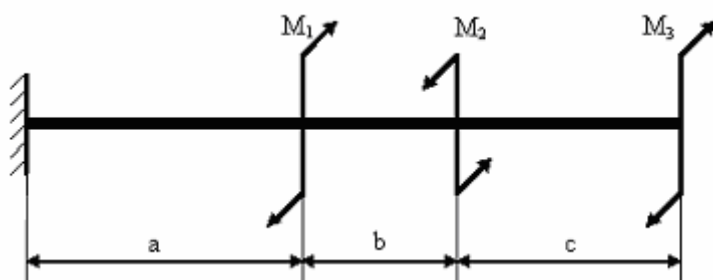


### Вариант № 6

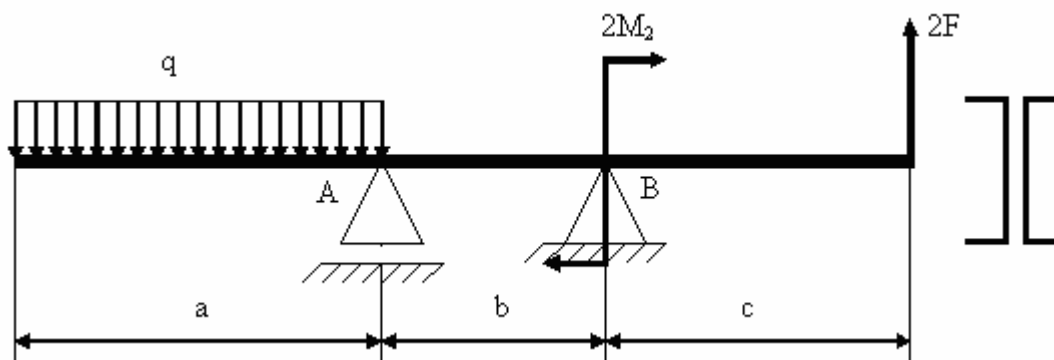
Задача 1  $a=3$  м;  $b=2$  м;  $c=3$  м;  $q=10$  кН/м;  $F=25$  кН;  $d/D_H=0,6$ .



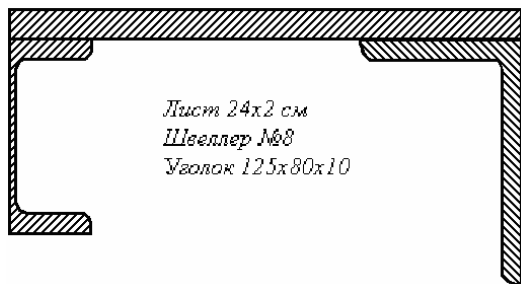
Задача 2  $a=3$  м;  $b=2,5$  м;  $c=1$  м;  $M_1=65$  кН·м;  $M_2=45$  кН·м;  $M_3=30$  кН·м;  $d/D_H=0,5$ .



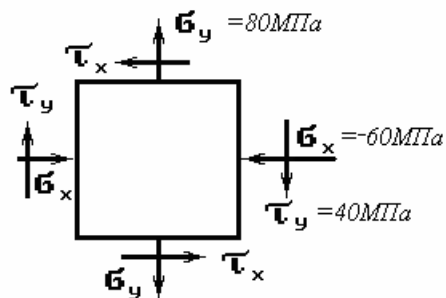
Задача 3  $a=3$  м;  $b=2,5$  м;  $c=1$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=20$  кН;  $M_2=65$  кН·м.



Задача 4

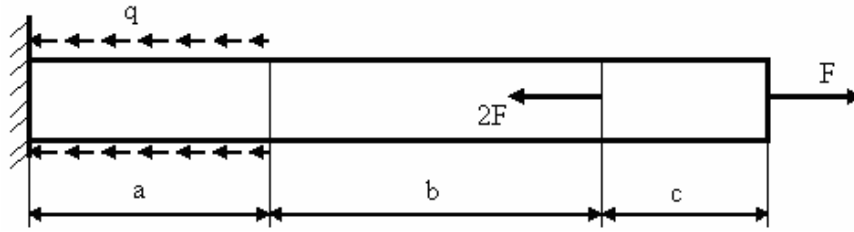


Задача 5

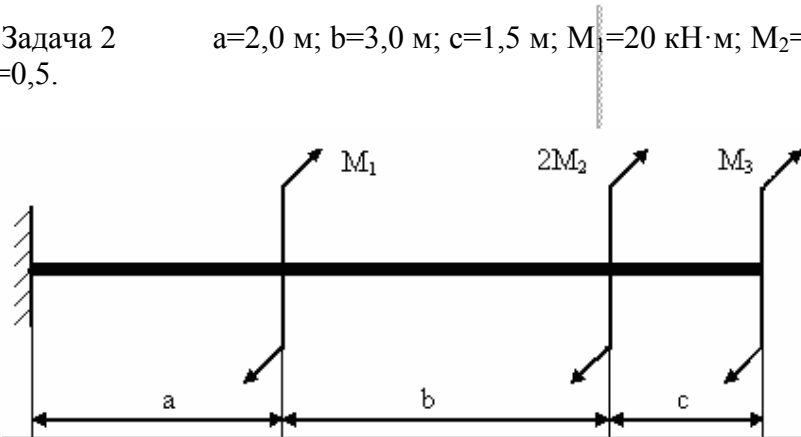


## Вариант № 7

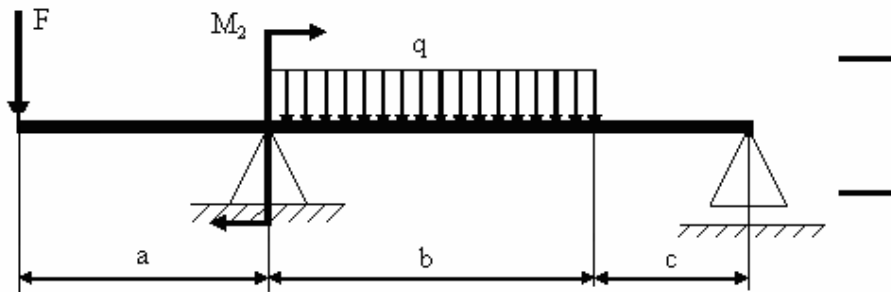
Задача 1  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=30$  кН;  $d/D_H=0,5$



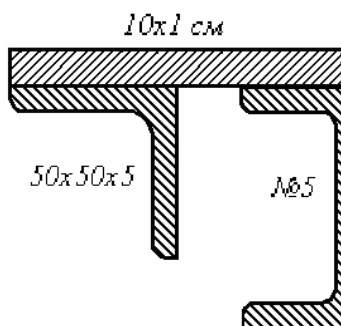
Задача 2  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $M_1=20$  кН·м;  $M_2=30$  кН·м;  $M_3=45$  кН·м;  $d/D_H=0,5$ .



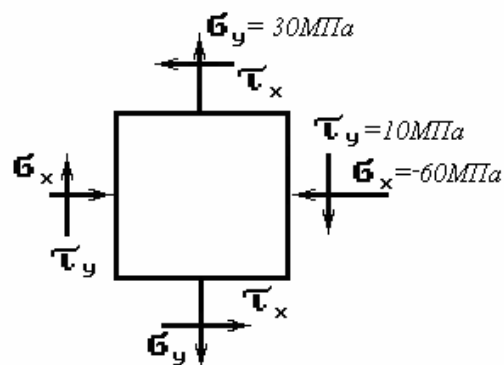
Задача 3  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=30$  кН;  $M_2=30$  кН·м.

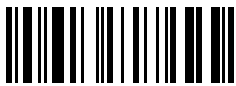


Задача 4



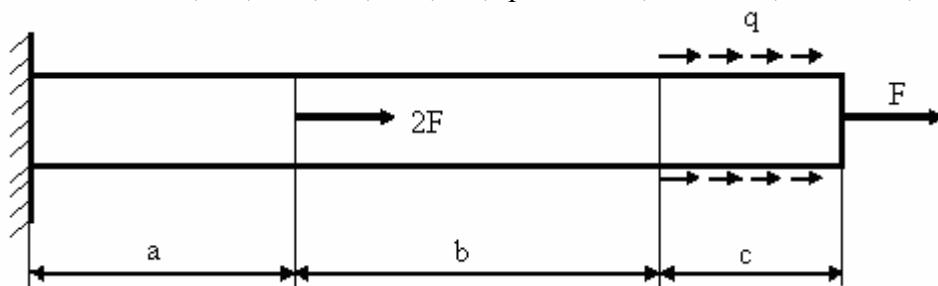
Задача 5



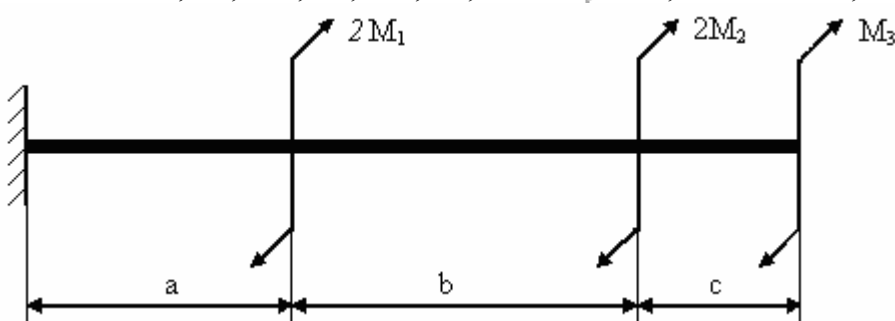


### Вариант № 8

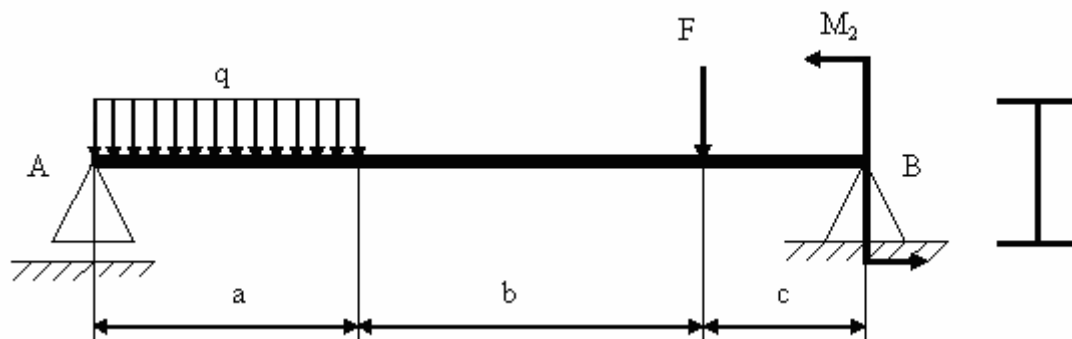
Задача 1  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=30$  кН;  $d/D_H=0,5$ .



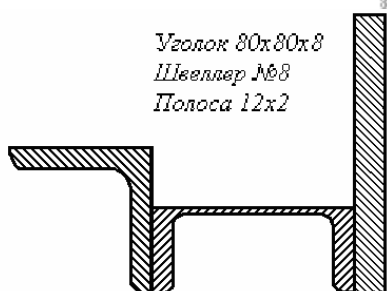
Задача 2  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $M_1=20$  кН·м;  $M_2=30$  кН·м;  $M_3=45$  кН·м;  $d/D_H=0,5$ .



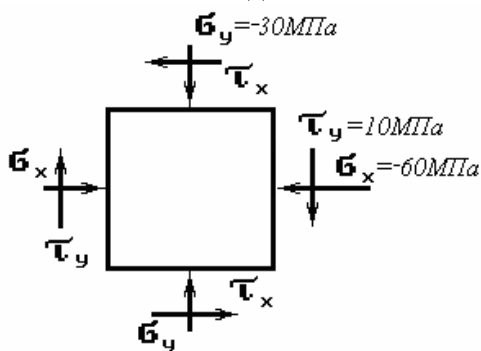
Задача 3  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=30$  кН;  $M_2=30$  кН·м.

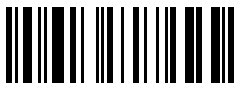


Задача 4



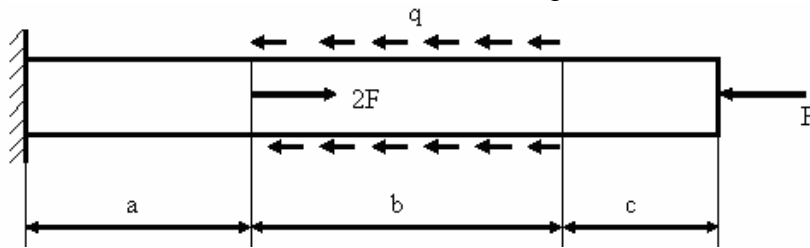
Задача 5



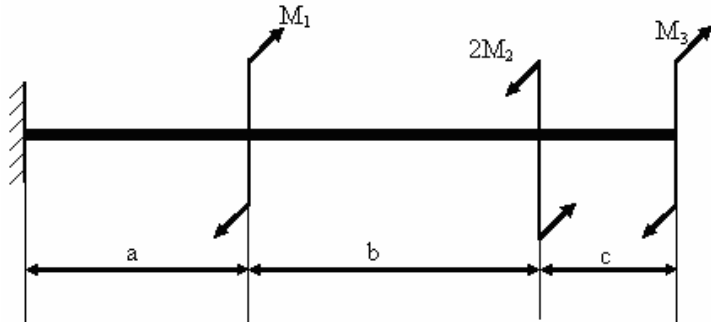


### Вариант № 9

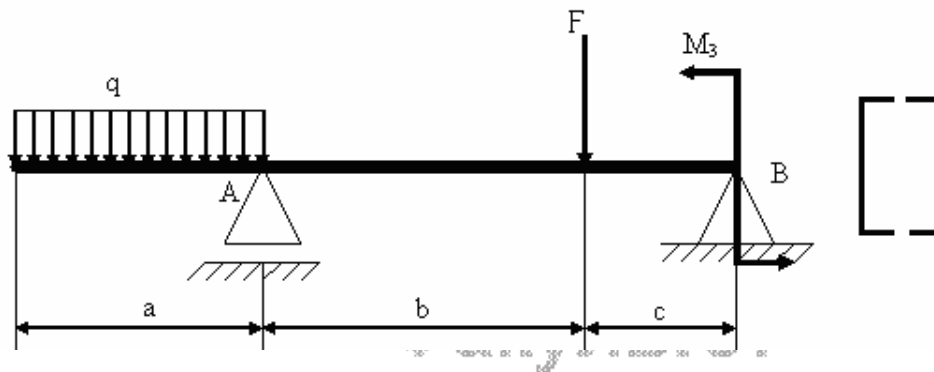
Задача 1  $a=1,5$  м;  $b=3$  м;  $c=2,5$  м;  $q=15$  кН/м;  $F=10$  кН;  $d/D_H=0,8$ .



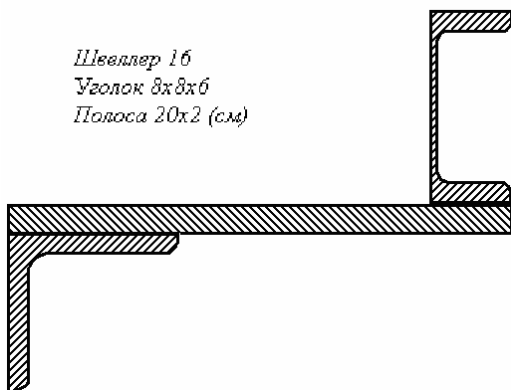
Задача 2  $a=3$  м;  $b=2,5$  м;  $c=1$  м;  $M_1=65$  кН·м;  $M_2=45$  кН·м;  $M_3=30$  кН·м;  $d/D_H=0,5$ .



Задача 3  $a=2,0$  м;  $b=3,0$  м;  $c=1,5$  м;  $q=20$  кН/м;  $F=30$  кН;  $M_2=30$  кН·м.



Задача 4



Швеллер 16  
Уголок 8х8х6  
Полоса 20х2 (см)

Дистанционных

вательных  
чолог

Задача 5

