Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Камчатский государственный технический университет»

Кафедра «Высшая математика»

Э.Н. Батуев

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Программа курса и методические указания
к изучению дисциплины для курсантов и студентов
технических специальностей и направлений подготовки
очной и заочной форм обучения*

Петропавловск-Камчатский
2013

УДК 53 (076)
ББК 22.311
Б28

Рецензент

С.Г. Бильчинская,
кандидат физико-математических наук, доцент

Батуев Эрдэмто Николаевич

Б28 Уравнения математической физики : программа курса и методические указания к изучению дисциплины для курсантов и студентов технических специальностей и направлений подготовки очной и заочной форм обучения / Э.Н. Батуев. – Петропавловск-Камчатский : КамчатГТУ, 2013. – 51 с.

Программа курса и методические указания составлены в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания основных образовательных программ подготовки специалистов по техническим специальностям государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования и требованиями к освоению основных образовательных программ подготовки специалистов и бакалавров по техническим специальностям и направлениям подготовки федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования.

Рекомендованы к изданию учебно-методическим советом ФГБОУ ВПО «КамчатГТУ» (протокол № 3 от 23 ноября 2012 г.).

УДК 53 (076)
ББК 22.311

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Краткая характеристика дисциплины

В современной науке и технике математические методы исследования, проектирования и моделирования играют все большую роль. Это обусловлено, прежде всего, быстрым развитием информационных технологий и вычислительной техники, благодаря которым все время существенно расширяются возможности успешного применения математики при решении конкретных задач. Математика является базовой дисциплиной при подготовке инженерных кадров. Ее преподавание предусматривает развитие логического и аналитического мышления, овладение основными методами исследования и решения математических задач, выработку умения самостоятельно расширять математические знания.

Уравнения математической физики имеют важное значение для успешного изучения многих специальных дисциплин, предусмотренных учебными планами, и представляют собой один из важнейших примеров математических моделей микроуровня при анализе физических явлений и процессов в сплошной среде.

2. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Целью дисциплины «Уравнения математической физики» является изучение основных разделов курса теории дифференциальных уравнений в частных производных, в узком смысле - линейных уравнений второго порядка, описывающих состояние точек сплошной среды в первом и наиболее важном приближении.

Основная задача курса «Уравнения математической физики» заключается в развитии у студентов современных форм математического мышления и обучении студентов методам построения анализа математических моделей физических явлений и процессов.

В результате освоения теоретического материала, выполнения практических работ и закрепления навыков студенты должны:

знать: основные определения, свойства, формулы и теоремы читаемых разделов уравнений математической физики;

понимать: основные понятия, определения, теоремы и алгоритмы решения типовых задач;

уметь: применять теоретические знания для решения практических задач.

При изучении дисциплины должны быть сформированы следующие компетенции: применение физико-математического, аппарата, теоретических, расчетных и экспериментальных методов исследований, методов математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности (ПК-2).

3. Содержание дисциплины

3.1. Содержание лекционных занятий

1. Задачи математической физики.
2. Вывод уравнения колебаний струны. Вывод уравнения теплопроводности.
3. Уравнение Лапласа. Классификация уравнений математической физики.
4. Постановка краевых задач для уравнений эллиптического типа. Принцип максимума следствия из него.
5. Решение задач Дирихле для круга методом Фурье. Интеграл Пуассона.
6. Решение задачи Дирихле для прямоугольника. Понятие о численных методах, метод конечных разностей.
7. Постановка краевых задач для уравнений гиперболического типа. Задача Коши для уравнения колебания струны.
8. Метод Даламбера решение задачи Коши. Использование формулы Даламбера для решения смешанной краевой задачи.
9. Схема решения смешанной краевой задачи для уравнения колебаний струны в случае неоднородного уравнения и неоднородных начальных и граничных условий. Типы граничных условий.

10. Решение смешанной кривой задачи для уравнения колебаний струны с неоднородными начальными и однородными граничными условиями методом Фурье. Задача Штурма - Лиувилля.

11. Случай неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями. Метод Фурье.

12. Постановка задач для уравнений параболического типа. Первая краевая задача. Схема решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

13. Схема решения смешанной краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными и граничными условиями. Типы граничных условий.

14. Решение смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности с неоднородными начальными и однородными граничными условиями методом Фурье.

15. Случай неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями. Метод Фурье. Метод конечных разностей.

3.2. Содержание практических занятий

1.Задачи математической физики. [4] стр. 260, № 976, стр. 262, № 982, стр. 265, № 988.

2.Задачи математической физики. Приведение к каноническому виду. [1] стр. 56, № 3, стр. 57 № 7. [5] стр. 396, № 1. стр. 393, № .3

3.Вывод уравнения колебаний струны. Вывод уравнения теплопроводности. [4] стр. 267, № 994, стр. 282, № 1000, стр. 276, №1006.

4.Метод Деламбера. Метод Фурье. [5] стр. 396, № 2, стр. 397, № 4, стр. 398, № 8, № 10, [1] стр. 175, №1, № 2, стр.170, № 5.

5.Решение задач Дирихле для круга методом Фурье. [4] стр. 280, № 1010.

6. Интеграл Пуассона. [1] стр. 91, № 2, [5] стр. 399, № 12, № 13.

7. Метод конечных разностей. [5] стр. 399, № 14, № 16.

3.3 Организация самостоятельной работы студента

1. Задачи математической физики. Классификация уравнений. [4] стр. 260, № 977, стр. 262, № 983, стр. 265, № 989.
2. Задачи математической физики. Приведение к каноническому виду. [1] стр. 56, № 4, стр. 57, № 6. [5] стр. 396, № 2, стр. 393, № 5.
3. Вывод уравнения колебаний струны. Вывод уравнения теплопроводности. [4] стр. 267, № 995, стр. 282, № 1001, стр. 276, № 1005.
4. Метод Деламбера. Метод Фурье для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний струны. [5] стр. 396, № 3, стр. 397, № 5, стр. 398, № 9, № 11, [1] стр. 175, № 3, № 4, стр. 170, № 6.
5. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. [4] стр. 280, № 1011, № 1012.
6. Интеграл Пуассона. [1] стр. 91 № 3, [5] стр. 399, № 14, № 15.

4. Вопросы промежуточной аттестации

1. Понятия о задачах математической физики.
2. Вывод уравнения колебаний струны. Вывод уравнения теплопроводности. Постановки краевых задач.
3. Уравнение Лапласа. Задача Дирихле. Задача Неймана Классификация уравнений математической физики.
4. Постановка краевых задач для уравнений эллиптического типа. Принцип максимума и следствия из него.
5. Решение задач Дирихле для круга методом Фурье. Интеграл Пуассона.
6. Решение задачи Дирихле для прямоугольника. Понятие о численных методах, метод конечных разностей.
7. Постановка краевых задач для уравнений гиперболического типа. Задача Коши для уравнения колебания струны.
8. Метод Даламбера решение задачи Коши. Использование формулы Даламбера для решения смешанной краевой задачи.
9. Схема решения смешанной краевой задачи для уравнения колебаний струны в случае неоднородного уравнения

и неоднородных начальных и граничных условий. Типы граничных условий.

10. Решение смешанной кривой задачи для уравнения колебаний струны с неоднородными начальными и однородными граничными условиями методом Фурье. Задача Штурма - Лиувилля.

11. Случай неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями. Метод Фурье.

12. Постановка задач для уравнений параболического типа. Первая краевая задача. Схема решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

13. Схема решения смешанной краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными и граничными условиями. Типы граничных условий.

14. Решение смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности с неоднородными начальными и однородными граничными условиями методом Фурье.

15. Случай неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями. Метод Фурье. Метод конечных разностей.

5. Общие методические указания по изучению дисциплины для студентов заочной формы обучения

Основной формой обучения студентов-заочников является самостоятельная работа над учебным материалом, включающая в себя изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка и выполнение контрольных работ. В помощь студентам университет организует чтение лекций и проведение практических занятий.

Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения консультации. Лекции и практические занятия носят преимущественно обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретиского материала. На этих занятиях более подробно рассматриваются отдельные вопросы программы.

В процессе изучения курса уравнений математической физики студент должен выполнить контрольную работу, которая позволяет судить о степени усвоения студентом соответствующего материала. Приступать к выполнению контрольной работы следует только после изучения теоретического материала и решения достаточного количества практических задач по данному разделу курса (лекций, практические занятия, чтение учебников, указанных в списке литературы).

Методическое пособие содержит рекомендации и указания к выполнению отдельных заданий, а также образцы выполнения заданий. Завершающим этапом изучения курса «Уравнения математической физики» является сдача зачета в соответствии с учебным планом. При подготовке к зачету рекомендуется ориентироваться на контрольные вопросы для самопроверки и подготовке к зачету.

6. Правила оформления контрольных работ

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил:

1. Каждая контрольная должна быть выполнена *в отдельной тетради* в клетку. Необходимо оставлять поля для замечаний преподавателя.
2. Номер варианта определяется последней цифрой шифра в зачетной книжке.
3. Контрольные работы, содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются.
4. Решения задач можно располагать в любом порядке, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи надо *полностью* выписать ее условие.
6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно. При необходимости следует делать соответствующие ссылки с указанием формул, теорем, которые используются

при решении данной задачи. Все вычисления (в том числе и вспомогательные) необходимо делать полностью.

7. Контрольные работы должны быть выполнять самостоятельно.

8. Преподаватель определяет из полного списка задач, те задачи, которые включаются в контрольную работу.

7. Пример выполнения контрольной работы

Задача № 1. Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t = 7u_{xx} \\ u(x,0) = 6\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x \\ u(o,t) = u(3;t) = 0 \end{cases}$$

Имеется уравнение теплопроводности с однородными граничными и неоднородными начальными условиями.

Решаем методом Фурье.

Имеем $a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7}$

$l = 3, u(x) = 6\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-(\frac{n\pi x}{l})^2 t} \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x \quad ,$$

где $a_n = \frac{2}{l}\int_0^3 (u(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}xdx$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (6\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x)\sin\frac{n\pi}{3}xdx =$$

$$= \frac{2}{3}(\int_0^3 6\sin 2\pi x\sin\frac{n\pi}{3}xdx + \int_0^3 7\sin 3\pi x\sin\frac{n\pi}{3}xdx) = 0\ ,$$

если

$$2\pi x \neq \frac{n\pi}{3}x \Rightarrow 2 \neq \frac{n}{3} \Rightarrow n \neq 6$$

$$3\pi x \neq \frac{n\pi}{3}x \Rightarrow 3 \neq \frac{n}{3} \Rightarrow n \neq 9$$

$$a_6=\frac{2}{3}\int_0^3 (6\sin 2\pi x+7\sin 3\pi x)\cdot\sin\frac{n\pi}{3}xdx=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 6\cdot\int_0^3 \sin 2\pi x\sin\frac{n\pi}{3}xdx+\frac{2}{3}\cdot 7\cdot\int_0^3 7\sin 3\pi x\sin\frac{n\pi}{3}xdx=$$

Используем формулы:

$$\left|\begin{array}{l}\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\end{array}\right|$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^3[1-\cos 4\pi xdx]+\frac{2}{3}\cdot 7\cdot\frac{1}{2}\int_0^3\cos\pi xdx-\frac{2}{3}\cdot 7\cdot\frac{1}{2}\int_0^3\cos 5\pi xdx=$$

$$=2\cdot(x-\frac{1}{4\pi}\sin 4\pi x)\Big|_0^3+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{\pi}\underbrace{\sin\pi x}_{=0}\Big|_0^3-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{5\pi}\underbrace{\sin 5\pi x}_{=0}\Big|_0^3=6$$

$$a_9=\frac{2}{3}\int_0^3 (6\sin 2\pi x+7\sin 3\pi x)\cdot\sin\frac{n\pi}{3}xdx=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^3\cos\pi xdx-\frac{2}{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^3\cos 5\pi xdx+\frac{2}{3}\cdot 7\cdot\frac{1}{2}\int_0^3(1-\cos 6\pi x)dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\sin(\pi x)\Big|_0^3-2\cdot\frac{1}{5\pi}\sin 5\pi x\Big|_0^3+\frac{7}{3}(x-\frac{1}{6\pi}\sin 6\pi x)\Big|_0^3=7$$

$$\text{Ответ}: u(x,t)=6\cdot e^{-28\pi^2 t}\cdot\sin 2\pi x+7\cdot e^{-63\pi^2 t}\cdot\sin 3\pi x$$

Проверка:

$$u(x,t)=6\cdot\sin 2\pi x+7\cdot\sin 3\pi x$$

$$u(0,t)=0=u(3,t)$$

$$u_t=6\cdot(-28\pi^2)\cdot e^{-28\pi^2 t}\cdot\sin 2\pi x+7\cdot(-63\pi^2)\cdot e^{-63\pi^2 t}\sin 3\pi x$$

$$u_x=6\cdot e^{-28\pi^2 t}\cdot 2\pi\cos 2\pi x+7\cdot e^{-63\pi^2 t}\cdot 3\pi\cos 3\pi x$$

$$u_{xx}=-6\cdot e^{-28\pi^2 t}\cdot 28\pi^2\sin 2\pi x-7\cdot e^{-63\pi^2 t}\cdot 63\pi^2\sin 3\pi x$$

$$u_t=7u_{xx}$$

Задача № 2. Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(x,0) = 6\cos 2\pi x \\ u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0 \end{cases}$$

Имеется уравнение теплопроводности, однородное, с однородными граничными и неоднородными начальными условиями.

Решаем методом Фурье.

Имеем:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2,\ \ l = 4$$

$$u(x) = 6\cos 2\pi x$$

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-\frac{(n\pi a)^2}{l}t} \cdot \cos\frac{n\pi}{l} x dx$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{l} x dx$$

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^4 6\cdot\cos 2\pi x dx = 3\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\Big|_0^4 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 6\cdot\cos 2\pi x\cdot\cos\frac{n\pi}{4} x dx = 3\int_0^4 \cos 2\pi x\cdot\cos\frac{n\pi}{4} x dx = 0,\ \ \textit{если}$$

$$2\pi x \neq \frac{n\pi}{4} x \Rightarrow 2 \neq \frac{n}{4} \Rightarrow n \neq 8$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 6\cdot\cos 2\pi x\cdot\cos 2\pi x dx =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}\int_0^4 (1+\cos 4\pi x)dx = \frac{3}{2}\cdot\left(x + \frac{1}{4\pi}\sin 4\pi x\right)\Big|_0^4 = 6$$

Ответ: $u(x,t) = 6\cdot\cos 2\pi x dx\cdot e^{-16\pi^2 t}$

Проверка:

$$u_e = 6 \cdot \cos 2\pi x dx \cdot (-16\pi^2) \cdot e^{-16\pi^2 t}$$

$$u_ч = -6 \cdot 2\pi \sin 2\pi x dx \cdot e^{-16\pi^2 t}$$

$$u_ч = -6 \cdot (2\pi)^2 \cos 2\pi x dx \cdot e^{-16\pi^2 t}$$

$$u_ч = -16\pi^2 \cdot 6 \cdot \cos 2\pi x dx \cdot e^{-16\pi^2 t}$$

$$u_t = 4u_{xx}$$

$$u(x,0) = 6\cos 2\pi x$$

$$u_x(0,t) = 0$$

$$u_x(4,t) = 0$$

Задача № 3. Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_e = 2u_{xx} \\ u(x,0) = 4\cos 5\pi x \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(3{,}5;t) = 0 \end{cases}$$

Имеется уравнение теплопроводности, однородное, с однородными граничными и неоднородными начальными условиями.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{((\frac{\pi}{2}+\pi n)\frac{a}{l})^2 t} \cdot c(\frac{\pi}{2}+\pi n)\frac{1}{l}x$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}+\pi n)\frac{1}{l}xdx$$

$$a_n = \frac{4}{7}\int_0^{\frac{7}{2}} 4\cos 5\pi x \cdot \cos(\frac{\pi}{2}+\pi n)\frac{2}{7}xdx = \frac{4\cdot 4}{7}\int_0^{\frac{7}{2}} \cos 5\pi x \cdot \cos\frac{\pi + 2\pi n}{7}xdx =$$

$$= \frac{16}{7}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{7}{2}} (\cos(5\pi x + \frac{\pi+2\pi n}{7})x + \cos(5\pi x + \frac{\pi + 2\pi n}{7})x)dx = 0, \textit{если} \;\; n \neq 17$$

$$a_{17} = \frac{4}{7}\int_0^{\frac{7}{2}} 4\cos 5\pi x \cdot \cos(\frac{\pi}{2}+17\pi)\frac{2}{7}xdx = \frac{16}{7}\int_0^{\frac{7}{2}} \cos^2 5\pi x dx =$$

$$=\frac{8}{7}\int_0^{\frac{7}{2}}(1+\cos 10\pi x)dx=\frac{8}{7}(x+\frac{1}{10\pi}\sin 10\pi x)\Big|_0^{\frac{7}{2}}=\frac{8}{7}\cdot\frac{7}{2}=4$$

Ответ: $u(x,t)=4\cdot e^{-50\pi^2 t}\cdot\cos 5\pi x$

Проверка:

$$u(x,0)=4\cos 5\pi x$$

$$u_t=-4\cdot 50\pi^{2\cdot}e^{-50\pi^2 t}\cdot\cos 5\pi x$$

$$u_x=-4\cdot e^{-50\pi^2 t}\cdot 5\pi\sin 5\pi x$$

$$u_{xx}=-4\cdot e^{-50\pi^2 t}\cdot 25\pi^2\cos 5\pi x$$

$$u_t-2u_{xx}=-4\cdot 50\pi^2 e^{-50\pi^2 t}\cos 5\pi x+4\cdot 50\pi^2 e^{-50\pi^2 t}\cos 5\pi x=0$$

$$u_x(0,t)=0$$

$$u(\frac{7}{2},t)=0$$

Задача № 4. Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t=9u_{xx} \\ u(x,0)=8\sin 3\pi x+6-2x \\ u_x(0,t)=6 \\ u(4,t)=-2 \end{cases}$$

Имеется уравнение теплопроводности, однородное, с неоднородными граничными и начальными условиями.

Имеем

$$a^2=9\Rightarrow a=3, l=4$$

$$\varphi(x)=8\sin 3\pi x+6-2x$$

Делаем замену:

$$v(x,t)=u(x,t)-\mu_1(t)+\left[\mu_1(t)-\mu_2(t)\right]\frac{x}{l}$$

$$v(x,t)-u(x,t)-6+2x$$

Получаем:

$$\begin{cases} v_t = 9v_{xx} \\ v(0,t) = 0 \\ v(4,t) = 0 \\ v(x,0) = 8\sin 3\pi x \end{cases}$$

$$\varphi(x) = 8\sin 3\pi x$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \cdot \sin\frac{\pi n}{l} x, \ \ \text{где}:$$

$$a_n \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l} x dx$$

$$a_n \frac{2}{4}\int_0^l 8\sin 3\pi x\cdot\sin\frac{n\pi}{4} x dx = 0, \ \ \text{если}:$$

$$3\pi ч \neq \frac{n\pi}{4}, \ \ n \neq 12$$

$$a_{12} = \frac{2}{4}\int_0^4 8\sin 3\pi x\cdot\sin 3\pi x dx =$$

$$4\cdot\frac{1}{2}\int_0^4 (1-\cos 6x)dx = 2\cdot(x - \frac{1}{6\pi}\sin 6\pi x)\Big|_0^4 = 2\cdot 4 = 8$$

$$v(x,t) = 8\cdot e^{-81\pi^2 t}\sin 3\pi x$$

$$u(x,t) = 8\cdot e^{-81\pi^2 t}\sin 3\pi x + 6 - 2x$$

Проверка:

$$u(x,0) = 8\sin 3\pi x + 6 - 2x$$

$$u(0,t) = 6$$

$$u(4,t) = -2$$

$$u_t = 8\cdot(-81\pi^2)\cdot e^{-81\pi^2 t}\sin 3\pi x$$

$$u_{xx} = -8\cdot e^{-81\pi^2 t}\cdot 9\pi^2\sin 3\pi x$$

$$9u_{xx} = -8\cdot e^{-81\pi^2 t}\cdot 81\pi^2\sin 3\pi x$$

$$u_t - 9u_{xx} = 8\cdot(-81\pi^2)\cdot e^{-81\pi^2 t}\sin 3\pi x +$$

$$+ 8\cdot e^{-81\pi^2 t}\cdot 81\pi^2\sin 3\pi x = 0$$

Задача № 5. Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями $u(x,0)=0; u(0,t)=0, u(\pi,t)=0$.

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 2\cdot e^{-3t}\sin 2x$$

$$u(x,0)=0$$

$$u(0,t)=0$$

$$u(\pi,t)=0$$

Имеется уравнение теплопроводности, неоднородное, с однородными граничными и начальными условиями.

Имеем:

$$a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$f(x,s) = -4e^{-3t}\sin 2x$$

$$\tilde{f}_n(s) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,s)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}xdx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\cdot e^{-3t}\sin 2x\cdot\sin nxdx = 0,\ \textit{если}$$

$$2x \neq nx \Rightarrow n \neq 2$$

$$\tilde{f}_2(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\cdot e^{-3t}\cdot\sin 2x\cdot\sin 2xdx = \frac{2\cdot e^{-3t}}{\pi}\int_0^\pi (1-\cos 4x)dx =$$

$$= \frac{2\cdot e^{-3t}}{\pi}\cdot\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_0^\pi = 2\cdot e^{-3t}$$

$$u(x,t) = \int_0^t 2\cdot e^{-3s}\cdot e^{-(t-s)}ds\cdot\sin 2x = 2\int_0^t e^{-2s-t}ds\cdot\sin 2x =$$

$$= 2e^{-2s-t}\Big|_0^t\cdot\sin 2x = 2\cdot e^{-3t}\sin 2x - 2e^{t}\sin 2x$$

$$u(x,t) = 2\sin 2x(e^{-3t} - e^{-t})$$

$$u_t = -2\sin 2x(3e^{-3t} - e^{-t})$$

$$a^2u_{xx} + 2e^{-3t}\sin 2x = -\frac{1}{4}\cdot 4\cdot 2\sin 2x\cdot(e^{-3t} - e^{-t}) + 2e^{-3t}\cdot\sin 2x$$

$$u_t = a^2u_{xx}$$

Задача № 6. Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{4}u_{xx} + 17\sin 4t \cdot \sin 2x \\ u(x,0) = 6\sin 8x \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Имеется уравнение теплопроводности, неоднородное, с однородными граничными и неоднородными начальными условиями.

Решаем однородное уравнение теплопроводности, с однородными граничными и неоднородными начальными условиями:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{\pi} \varphi \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 6\sin 8x \cdot \sin nx dx = 0, \ \textit{если} \ n \neq 8$$

$$a_8 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 6 \cdot \sin 8x \cdot \sin 8x dx = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 16x) dx = 6$$

$$u_1(x,t) = 6 \cdot e^{-16t} \cdot \sin 8x$$

Решаем неоднородное уравнение теплопроводности, с однородными граничными и начальными условиями:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \tilde{f}_n(s) \cdot e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 (t-s)} ds \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\tilde{f}_n(s) = \frac{2}{l}\int f(x,s) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 17\sin 4s \cdot \sin 2x \cdot \sin nx dx = 0, \ \textit{если} \ 2x \neq nx \Rightarrow n \neq 2$$

$$\tilde{f}_2(s)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}17\sin 4s\cdot\sin 2x\cdot\sin 2x dx=$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot 17\sin 4s\cdot\frac{1}{2}\Big|_0^{\pi}(1-\cos 4x)dx=17\sin 4s;$$

$$u_2(x,t)=\int_0^t 17\sin 4s\cdot e^{-(t-s)}ds\cdot\sin 2x=17\int_0^t\sin 4s\cdot e^{-(t-s)}ds=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\sin 4s \\ du=4\cos 4s ds \\ dv=e^{-(t-s)}ds \\ v=e^{-(t-s)} \end{array}\right|=17\cdot e^{-(t-s)}\sin 4s\Big|_0^t-17\cdot 4\int_0^t\cos 4s\cdot e^{-(t-s)}ds=$$

$$=17\sin 4t-17\cdot 4\int_0^t e^{-(t-s)}\cdot\cos 4s ds=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\cos 4s \\ du=-4\sin 4s ds \\ dv=e^{-(t-s)}ds \\ v=e^{-(t-s)} \end{array}\right|=$$

$$=17\sin 4t-17\cdot 16\cdot e^{-(t-s)}\cos 4s\Big|_0^t-17\cdot 4\cdot 4\int_0^t e^{-(t-s)}\sin 4s ds=$$

$$=17\sin 4t-17\cdot 16\cdot\cos 4t+17\cdot 16\cdot e^{-t}-17\cdot 16\int_0^t e^{-(t-s)}\sin 4s ds$$

$$17\int_0^t\sin 4s\cdot e^{-(t-s)}ds+17\cdot 16\int_0^t\sin 4s\cdot e^{-(t-s)}ds=17\sin 4t-$$

$$-17\cdot 16\cdot\cos 4t+17\cdot 16 e^{-t}$$

$$17\int_0^t\sin 4s\cdot e^{-(t-s)}ds=(17\sin 4t-17\cdot 16\cos 4t+17\cdot 16\cdot e^{-t})\cdot\frac{1}{17}=$$

$$=\sin 4t-16\cos 4t+16\cdot e^{-t}$$

$$u_2(x,t) = (\sin 4t - 16\cos 4t + 16 \cdot e^{-16t}) \cdot \sin 2x$$

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) \Rightarrow u(x,t) =$$

$$= 6 \cdot e^{-16t} \sin 8x + (\sin 4t - 16\cos 4t + 16 \cdot e^{-t}) \sin 2x$$

Проверка:

$$u(x,0) = 6\sin 8x$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(\pi,t) = 0$$

$$u_t = 6 \cdot (-16) \cdot e^{-16t} \sin 8x + 4\cos 4t \sin 2x + 16 \cdot 4\sin 4t \sin 2x +$$

$$+ (-16) \cdot e^{-t} \sin 2x$$

$$u_{xx} = -6 \cdot e^{-16t} \cdot 64\sin 8x + \sin 4t \cdot (-4\sin 2x) + 16\cos 4t \cdot 4\sin 2x -$$

$$-16 \cdot 4 \cdot e^{-t} \sin 2x$$

$$\frac{1}{4} u_{xx} = 6 \cdot e^{-16t} \cdot (-16)\sin 8x - \sin 4t \cdot \sin 2x + 16\cos 4t \cdot \sin 2x -$$

$$-16 \cdot e^{-t} \sin 2x$$

Задача № 7. Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{36} u_{xx} + 17\cos 4t \cdot \sin 6x \\ u(x,0) = 6\sin 24x - 4\pi + 2x \\ u(0,t) = -4\pi \\ u(\pi,t) = -2\pi \end{cases}$$

$$v(x,t) = u(x,t) - \mu_1 + [\mu_1 - \mu_2]\frac{x}{l} = u(x,t) + 4\pi + [-4\pi + 2\pi]\frac{x}{\pi} =$$

$$= u(x,t) + 4\pi - 2x$$

$$v_t = u_t$$

$$v_{xx} = u_{xx}$$

$$v(x,o) = u(x,0) + 4\pi - 2x = 6\sin 24x = \tilde{\varphi}(x)$$

$$v(0,t) = u(0,t) + 4\pi - 2 \cdot 0 = 0$$

$$v(\pi,t) = u(\pi,t) + 4\pi - 2\pi = 0$$

Получаем задачу:

$$\begin{cases} v_t = \dfrac{1}{36} v_{xx} + 17\cos 4t \cdot \sin 6x \\ v(x,0) = 6\sin 24x \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

1. Решаем однородное уравнение с однородными граничными и неоднородными начальными условиями:

$$v_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin\frac{n\pi}{l} x$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^1 \tilde{\varphi}(x)\cdot \sin\frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 6\sin 24x \sin nx dx = 0,$$

если $24x \neq nx \Rightarrow n \neq 2$

$$a_{24} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 6\sin 24x \sin 24x dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 48x)dx = 6$$

$$v(x,t) = 6\cdot e^{-16t} \sin 24x$$

2. Решаем неоднородное уравнение с однородными граничными и начальными условиями:

$$v_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \tilde{f}_n(s)\cdot e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 (t-s)} ds \cdot \sin\frac{n\pi}{l} x$$

$$\tilde{f}_n(s) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,s)\sin\frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 17\cos 4s\cdot \sin 6x \sin nx dx = 0,$$

если $6x \neq nx \Rightarrow n \neq 6$

$$\tilde{f}_6(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 17\cos 4s \cdot \sin 6x \sin 6x dx = \frac{17\cos 4s}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 12x)dx = 17\cos 4s$$

$$\int_0^t 17\cos 4s\cdot e^{-(t-s)} ds = 17\int_0^t \cos 4s\cdot e^{-(t-s)} ds =$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\cos 4s \\ du=-4\sin 4s ds \\ dv=e^{s-t}ds \\ v=e^{s-t} \end{array}\right| = 17\cdot\cos 4s\cdot e^{s-t}\Big|_0^t + 17\cdot 4\int_0^t \sin 4s\cdot e^{s-t}ds =$$

$$=17\cos 4t - 17e^{-t} + 17\cdot 4\int_0^t \sin 4s\cdot e^{s-t}ds =$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\sin 4s \\ du=4\cos 4s ds \\ dv=e^{s-t}ds \\ v=e^{s-t} \end{array}\right| = 17\cos 4t - 17e^{-t} + 17\cdot 4\sin 4s\cdot e^{s-t}\Big|_0^t -$$

$$-17\cdot 4\cdot 4\int_0^t \cos 4s\cdot e^{s-t}ds = 17\cos 4t - 17e^{-t} +$$

$$+68\sin 4s\cdot e^{s-t}\Big|_0^t - 272\int_0^t \cos 4s\cdot e^{s-t}ds$$

$$17\int_0^t \cos 4s\cdot e^{s-t}ds = \frac{17\cos 4t - 17e^{-t} + 68\sin 4t}{17}$$

$$17\int_0^t \cos 4s\cdot e^{s-t}ds = \cos 4t - e^{-t} + 4\sin 4t$$

$$v_2(x,t) = (\cos 4t - e^{-t} + 4\sin 4t)\sin 6x$$

$$u(x,t) = 6\cdot e^{-16t}\sin 24x + (\cos 4t - e^{-t} + 4\sin 4t)\cdot\sin 6x - 4\pi + 2x$$

Проверка:

$$u(x,0) = 6\sin 24x - 4\pi + 2x$$

$$u(0,t) = -4\pi$$

$$u(\pi,t) = -2\pi$$

$$u_t = 6\cdot(-16)\cdot e^{-16t}\sin 24x + (-\sin 4t + e^{-t} + 16\cos 4t)\cdot\sin 6x$$

$$a^2u_{xx} + 17\cos 4t\sin 6x = -\frac{1}{36}\cdot 24^2\cdot 6\cdot e^{-16t}\sin 24x -$$

$$-\frac{1}{36}\cdot 36\cdot(\cos 4t - e^{-t} + 4\sin 4t)\cdot\sin 6x + 17\cos 4t\cdot\sin 6x$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + 17\cos 4t\cdot\sin 6x$$

Задача № 8. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1,\ \ 0 < \varphi < \alpha$ $(r,\ \varphi$ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi),$ на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} = 0 \\ u(1,\varphi) = 6\cos 6\varphi \\ u_{\varphi} = u_{\varphi}(\rho, \frac{7\pi}{6}) = 0 \end{cases}$$

$$u(\rho,\varphi) = \Phi(\varphi)\cdot R(\rho)$$

$$\lambda > 0$$

$$\Phi(\varphi) = C_1\cos\sqrt{\lambda}\cdot\varphi + C_2\sin\sqrt{\lambda}\cdot\varphi$$

$$\Phi'(\varphi) = -C_1\sin\sqrt{\lambda}\cdot\varphi\cdot\sqrt{\lambda} + C_2\cos\sqrt{\lambda}\cdot\varphi\cdot\sqrt{\lambda}$$

$$\Phi'(0) = C_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Phi'(\alpha) = -C_1\sin\sqrt{\lambda}\cdot\alpha\cdot\sqrt{\lambda} = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\cdot\alpha = \pi n$$

$$\lambda = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2$$

$$\Phi(\varphi) = a_n\cos\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)\cdot\varphi$$

$$R(\rho) = \rho^{\sqrt{\lambda}} = \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}}$$

$$u(\rho,\varphi) = \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}}\cdot a_n\cos\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)\cdot\varphi$$

$$a_n = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\cos\frac{\pi n}{\alpha}\varphi d\varphi$$

$$f(\varphi) = 6\cos 6\varphi$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{6}$$

$$a_n = \frac{12}{7\alpha}\int_0^{\frac{7\pi}{6}} 6\cos 6\varphi \cdot \cos\frac{6}{7}n\varphi d\varphi = 6\cdot\frac{12}{7\alpha}\int_0^{\frac{7\pi}{6}} \cos 6\varphi \cdot \cos\frac{6}{7}n\varphi d\varphi = 0,$$

если $6\varphi \neq \frac{6}{7}n\varphi$

$$a_7 = 6\cdot\frac{12}{7\alpha}\int_0^{\frac{7\pi}{6}} \cos 6\varphi \cdot \cos 6\varphi d\varphi = \frac{6\cdot 12}{7\alpha\cdot 2}\int_0^{\frac{7\pi}{6}} (1+\cos 12\varphi)d\varphi = 6$$

$$u(\rho,\varphi) = \rho^6 \cdot 6\cos 6\varphi$$

Проверка:

$$u(1,\varphi) = 6\cos 6\varphi$$

$$u_\varphi = -\rho^6 \sin 6\varphi \cdot 36$$

$$u_\varphi(\rho,0) = 0$$

$$u_\varphi(\rho,\frac{7\pi}{6}) = 0$$

$$u_\rho = 36\rho^5 \cos 6\varphi$$

$$u_{\rho\rho} = 36\cdot 5\rho^4 \cos 6\varphi$$

$$u_{\varphi\varphi} = -36\rho^5 \cdot 6\cdot\cos 6\varphi$$

$$36\cdot 5\rho^4\cos 6\varphi + 36\cdot\rho^4\cos 6\varphi - 36\cdot 6\rho^4\cos 6\varphi =$$

$$= 36\cdot\rho^4\cos 6\varphi\cdot(5+1-6) = 0$$

Задача № 9. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения.

Дано:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0 \\ u(1, \varphi) = 6 \sin 4\varphi \end{cases}$$

$$0 \le \rho \le 1$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

Решаем методом Фурье.

Имеем формулу:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \; d\varphi = \frac{6}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin 4\varphi \cdot \cos n\varphi d\varphi = 0, \quad \forall n.$$

$$b_n = \frac{6}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin 4\varphi \cdot \sin n\varphi \; d\varphi = 0, \textit{если} \;\; 4\varphi \ne n\varphi, \quad n \ne 4.$$

Зная следующее, имеем:

$$b_4 = \frac{6}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin 4\varphi \cdot \sin 4\varphi \; d\varphi =$$

$$= \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 8\varphi) \; d\varphi = \frac{3}{\pi} (\varphi - \frac{1}{8} \sin 8\varphi) \Big|_0^{2\pi} = 6.$$

Ответ: $u(\rho, \varphi) = 6 \cdot \rho^4 \cdot \sin 4\varphi.$

Проверка:

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} =$$

$$= 6(4 \cdot 3 \cdot \rho^2 \cdot \sin 4\varphi + 4 \cdot \rho^2 \cdot \sin 4\varphi - 16 \cdot \rho^2 \cdot \sin 4\varphi) = 0$$

$$u(1, \varphi) = 6 \cdot \sin 4\varphi.$$

Задача № 10. Решить смешанную задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 12\pi\sin 3\pi x \\ u(0,t) = u(4,t) = 0 \end{cases}$$

Уравнение колебаний струны однородное с однородными граничными и неоднородными начальными условиями.

Решаем методом Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi a}{l}\cdot t + b_n \sin\frac{n\pi a}{l}\cdot t)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}\cdot x;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}\cdot x\ dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}\cdot x\ dx$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4,\ \ l = 4.$$

$$\varphi(x) = 0;$$

$$\psi(x) = 12\pi\sin 3\pi x;$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 0\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\cdot x\ dx = 0,\ \ \forall n$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi 4}\int_0^4 12\pi\sin 3\pi x\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\cdot x\ dx = 0,\ \ \textit{если}\ \ 3\pi x \neq \frac{n\pi}{4}\cdot x,\ \ n \neq 12$$

$$b_{12} = \frac{2}{12\pi 4}\cdot 12\pi\int_0^4 \sin 3\pi x\cdot\sin 3\pi\cdot x\ dx = \frac{1}{4}\int_0^4 (1-\cos 6\pi\cdot x)dx = 1$$

Ответ: $u(x,t) = \sin 12\pi t\cdot\sin 3\pi x.$

Проверка:

$$u_t = 12\pi\cos 12\pi t \cdot \sin 3\pi x;$$

$$u_{tt} = -(12\pi)^2 \sin 12\pi t \cdot \sin 3\pi x;$$

$$u_{xx} = -16 \cdot (3\pi)^2 \sin 12\pi t \cdot \sin 3\pi x;$$

$$u(0,t) = 0;$$

$$u(4,t) = 0;$$

$$u(x,0) = 0;$$

$$u_t(x,0) = 12\pi\sin 3\pi x;$$

Задача № 11. Решить смешанную задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx} \\ u(0,t) = u(4,t) = 0 \\ u(x,0) = 6\sin 3\pi x \\ u_t(x,0) = 12\pi\sin 3\pi x \end{cases}$$

Уравнение колебаний струны однородное, с однородными граничными и неоднородными начальными условиями.

Решаем методом Фурье.

Имеем следующее:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}\cdot t + b_n\sin\frac{n\pi a}{l}\cdot t\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}\cdot x$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}\cdot x\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}\cdot x\,dx$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4$$

$$l = 4$$

$$\varphi(x) = 6\sin 3\pi x$$

$$\psi(x) = 12\pi\sin 3\pi x$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi 4}\int_0^4 12\pi \sin 3\pi x \sin\frac{n\pi}{4}\cdot x\ dx = 0,\ \ \textit{если}\ \ 3\pi x \neq \frac{n\pi}{4}x\ \ n \neq 12$$

$$b_{12} = \frac{2}{12\pi 4}\cdot 12\pi\int_0^4 \sin 3\pi x\cdot \sin 3\pi x\ dx = \frac{1}{4}\int_0^4 (1-\cos 6\pi x)dx = 1$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 6\sin 3\pi x \sin\frac{n\pi}{4}\cdot x\ dx = 0\ \ \textit{если}\ \ 3\pi x \neq \frac{n\pi}{4}x\ \ n \neq 12$$

$$a_{12} = \frac{2}{4}\int_0^4 6\sin 3\pi x\cdot \sin 3\pi x\ dx = \frac{3}{2}\int_0^4 (1-\cos 6\pi x)dx = 6$$

Ответ:

$$u(x,t) = 6\cos 12\pi + \sin 3\pi x + \sin 12\pi t\cdot \sin 3\pi x.$$

Проверка:

$$u(x,0) = 6\sin 3\pi x$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u(4,t) = 0$$
$$u_t = -6\cdot 12\pi \sin 12\pi t\cdot \sin 3\pi x + 12\pi\cos 12\pi\cdot \sin 3\pi x$$
$$u_t(x,0) = 12\pi \sin 3\pi x$$
$$u_{tt} = -6\cdot(12\pi)^2\cdot \cos 12\pi t\cdot \sin 3\pi x - (12\pi)^2\cdot \sin 12\pi t\cdot \sin 3\pi x$$
$$u_x = 6\cos 12\pi t\cdot 3\pi\cos 3\pi x + \sin 12\pi t\cdot 3\pi \cos 3\pi x$$
$$u_{xx} = -6\cos 12\pi t\cdot(3\pi)^2 \sin 3\pi x - \sin 12\pi t\cdot (3\pi)^2 \sin 3\pi x$$
$$16u_{xx} = 16\cdot(-6)\cos 12\pi t\cdot(3\pi)^2 \sin 3\pi x - 16\cdot(3\pi)^2 \sin 12\pi t\cdot \sin 3\pi x$$
$$u_{tt} = 16u_{xx}$$

Задача № 12. Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_{tt} = 25u_{xx} \\ u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0 \\ u(x,0) = 6\cos 3\pi x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Уравнение колебания струны однородное, с однородными граничными и неоднородными начальными условиями.

Решаем методом Фурье.

Найдем λ:

1) $\lambda < 0, \ \lambda \neq 0$

2) $\lambda = 0, \ k^2 \neq 0$

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

$$X^{'}(x) = C_1 = 0$$

$$\textit{При} \ X^{'}(0) \ \lambda \neq 0$$

3) $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} \cdot x + C_2 \sin\sqrt{\lambda} \cdot x$$

$$X^{'}(x) = -C_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \sin\sqrt{\lambda} \cdot x + C_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} \cdot x$$

$$X^{'}(x) = C_2 = 0$$

$$X^{'}(l) = -C_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \sin\sqrt{\lambda} \cdot l = 0$$

$$\sin\sqrt{\lambda} \cdot l = 0$$

$$\sqrt{\lambda} \cdot l = \pi n$$

$$\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$X(x) = a_n \cos\frac{\pi n}{l} x$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin\frac{n\pi a}{l} t) \cdot \cos\frac{n\pi}{l} x$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi}{l} \cdot x \ dx = \frac{2}{3}\int_0^3 6\cos 3\pi x \cdot \cos\frac{n\pi a}{3} x \ dx = 0, \ \textit{если} \ n \neq 9$$

$$a_9 = \frac{2}{3} \cdot 6\int_0^3 \cos 3\pi x \cdot \cos 3\pi x \ dx = \frac{4}{2}\int_0^3 (1 + \cos 6\pi x) dx = 6$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi 6}\int_0^3 0 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} \cdot x \ dx = 0, \ \forall n \ \textit{т.е.} \ b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$$

Ответ:

$$u(x,t) = 6\cos 15\pi t \cdot \cos 3\pi x$$

Проверка:

$$u(x,0) = 6\cos 3\pi x$$

$$u_t = -6 \cdot 15\pi \sin 15\pi t \cdot \cos 3\pi x$$

$$u_{tt} = -6 \cdot (15\pi)^2 \cos 15\pi t \cdot \cos 3\pi x$$

$$u_x = -6 \cdot \cos 15\pi t \cdot 3\pi \sin 3\pi x$$

$$u_{xx} = -6 \cdot \left(3\pi\right)^2 \cos 15\pi t \cdot \cos 3\pi x$$

$$u_x(0,t) = 0$$

$$u_x(3,t) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0$$

$$25u_{xx} = -6 \cdot 25 \cdot \left(3\pi\right)^2 \cos 15\pi t \cdot \cos 3\pi x$$

$$u_{tt} = 25u_{xx}$$

Задача № 13. Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} \\ u(x,0) = 6\cos 3\pi x \\ u_t(x,0) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(2{,}5;t) = 0 \end{cases}$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3,\ \ l = \frac{5}{2}$$

$$\varphi(x) = 6\cos 3\pi x$$

$$\phi(x) = 0$$

$$\lambda > 0$$

$$k^2 + \lambda = 0$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i$$

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

$$X'(0) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\cdot 0 + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\cdot 0 = C_2 = 0$$

$$X(l) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\cdot l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\cdot l = C_1\cos\sqrt{\lambda}\cdot l = 0,\ \ C_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda > 0$$

$$\cos\sqrt{\lambda}\cdot l = 0$$

$$\lambda = ((\frac{\pi}{2} + \pi n)\frac{1}{l})^2$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(\frac{\pi}{2} + \pi n)\frac{a}{l}t + b_n \sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)\frac{a}{l}t \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \pi n)\frac{1}{l}x$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos(\frac{\pi}{2} + \pi n)\frac{x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \phi(x)\cos(\frac{\pi}{2} + \pi n)\frac{x}{l}dx =$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi 3}\int_0^{\frac{5}{2}} 0\cdot\cos(\frac{\pi}{2} + \pi n)\frac{2x}{5}dx = 0,\ \ \forall n$$

$$a_n = \frac{4}{5}\int_0^{\frac{5}{2}} 6\cdot\cos 3\pi x\cdot\cos(\frac{\pi}{2} + \pi n)\frac{2x}{5}dx = \frac{4}{5}\cdot 6\int_0^{\frac{5}{2}}\cos 3\pi x\cdot\cos(\frac{1+2n}{5})\pi x dx = 0,$$

если:

$$\left.\begin{array}{l} 3\pi x \neq \frac{(1+2n)\pi x}{5} \\ 1+2n \neq 15 \\ 2n \neq 14 \end{array}\right\} \Rightarrow n \neq 7$$

$$a_7 = \frac{4}{5}\cdot 6\int_0^{\frac{5}{2}}\cos 3\pi x\cdot\cos 3\pi x dx = \frac{4}{5}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{5}{2}}(1 + \cos 6\pi x)dx = \frac{12}{5}\cdot\frac{5}{2} = 6$$

Проверка:

$$u(x,0)=6\cdot\cos 3\pi x$$

$$u_t=-6\sin 9\pi t\cdot 9\pi\cdot\cos 3\pi x$$

$$u_t(x,0)=0$$

$$u_x=-6\cos 9\pi t\cdot 3\pi\cdot\sin 3\pi x$$

$$u_{xx}=-6\cdot 9\pi^2\cdot\cos 9\pi t\cdot\cos 3\pi x$$

$$u_{tt}=-6\cdot 81\pi^2\cdot\cos 9\pi t\cdot\cos 3\pi x$$

$$u_{tt}=9u_{xx}$$

$$u_x(0,t)=0$$

$$u(2{,}5;t)=0$$

Задача № 14. Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} u_t=16u_{xx} \\ u(x,0)=3+2x \\ u_t(x,0)=12\pi\sin 3\pi x \\ u(0,t)=3 \\ u(2,t)=7 \end{cases}$$

$$a^2=16\Rightarrow a=4,\ \ l=2$$

$$\varphi(x)=3+2x$$

$$\phi(x)=12\pi\sin 3\pi x$$

$$\nu(x,t)=u(x,t)-\mu_1(t)+[\mu_1(t)-\mu_2(t)]\frac{x}{l}$$

$$\nu(x,t)=u(x,t)-3-2x$$

$$\begin{cases} \nu_t=16u_{xx} \\ \nu(x,0)=0 \\ \nu_t(x,0)=12\pi\sin 3\pi x \\ \nu(0,t)=0 \\ \nu(2,t)=0 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx = {}_n\frac{2}{2}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi n}{2}xdx = 0,\ \ \forall n$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^2 \phi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx = \frac{2}{n\pi\cdot 4}\int_0^2 12\pi\sin 3\pi x\cdot\sin\frac{\pi n}{2}xdx$$

$$= \frac{12\pi}{2n\pi}\int_0^2 \sin 3\pi x\cdot\sin\frac{\pi n}{2}xdx = 0,\ \ \textit{если}\ \ 3\pi x \neq \frac{n\pi}{2}x \Rightarrow n\neq 6$$

$$\frac{2}{6\cdot 4\pi}\cdot 12\pi\int_0^2 \sin 3\pi x\cdot\sin 3\pi xdx = \frac{1}{2}\int_0^2 (1-\cos 6\pi x)dx = 1$$

$$\nu(x,t) = \sin 12\pi t\cdot\sin 3\pi x$$

$$u(x,t) = \sin 12\pi t\cdot\sin 3\pi x + 3 + 2x$$

Проверка:

$$u(0,t) = 3$$

$$u(2,t) = 7$$

$$u_t = \cos 12\pi\cdot 12\pi\cdot\sin 3\pi x$$

$$u_{tt} = -(12\pi)^2\sin 12\pi t\cdot\sin 3\pi x$$

$$u_x = 3\pi\cos 3\pi x\cdot\sin 12\pi t + 2$$

$$u_{xx} = -9\pi^2\sin 3\pi x\cdot\sin 12\pi t$$

$$u_{tt} = 16u_{xx}$$

$$u(x,0) = 3 + 2x$$

$$u_t(x,0) = 12\pi\sin 3\pi x$$

Задача № 15. Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями $u(x,0) = u_t(x,0) = 0; u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

$$\begin{cases} u_{tt} = \dfrac{1}{25}u_{xx} + 16\cos 2t\cdot\sin 5x \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Уравнение колебаний струны неоднородное, с однородными граничными и начальными условиями.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\int_0^t \tilde{f}_n(s)\cdot\sin\frac{n\pi a}{l}(t-s)ds\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$\tilde{f}_n(s)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,s)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}3\cos 2s\cdot\sin 5x\cdot\sin\frac{\pi n}{\pi}xdx=$$

$$=\frac{6\cos 2s}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 5x\cdot\sin nxdx=0,\ \ \textit{если}\ \ 5x\neq nx\Rightarrow n\neq 5$$

$$\tilde{f}_n(s)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}3\cos 2s\cdot\sin 5x\cdot\sin 5xdx=\frac{6\cos 2s}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 10x)dx=$$

$$=\frac{6\cos 2s\cdot\pi}{\pi\cdot 2}=3\cos 2s$$

$$\int_0^t 3\cos 2s\cdot\sin(t-s)ds=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}(\sin(2s-t+s)+\sin(2s+t-s))ds=$$

$$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos(3s-t)-\cos(s+t)\right]\Bigg|_0^t=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cos 2t+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cos t-\frac{3}{2}\cos 2t+\frac{3}{2}\cos t=$$

$$=-\frac{4}{2}\cos 2t+\frac{4}{2}\cos t=-\cos 2t+\cos t$$

$$u(x,t)=(-\cos 2t+\cos t)\cdot\sin 5x$$

Проверка:

$$u_t=4\sin 2t+\sin 5x-2\sin t\cdot\sin 5x$$

$$u_{tt}=8\cos 2t\sin 5x-2\cos t\sin 5x$$

$$u_x=-10\cos 2t\cdot\cos 5x+10\cos t\cos 5x$$

$$u_{xx}=50\cos 2t\sin 5x-50\cos t\sin 5x$$

$$u_{tt}=\frac{1}{25}u_{xx}+6\cos 2t\sin 5x$$

8. Варианты для выполнения контрольной работы

Задача № 1. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = 2u_{xx}; u(x,0) = \sin 3\pi x; u(0,t) = u(8,t) = 0.$
2. $u_t = 9u_{xx}; u(x,0) = 2\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x; u(0,t) = u(1,t) = 0.$
3. $u_t = 3u_{xx}; u(x,0) = 3\sin 2\pi x; u(0,t) = u(7,t) = 0.$
4. $u_t = 2u_{xx}; u(x,0) = 4\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x; u(0,t) = u(2,t) = 0.$
5. $u_t = 4u_{xx}; u(x,0) = 5\sin 3\pi x; u(0,t) = u(6,t) = 0.$
6. $u_t = 5u_{xx}; u(x,0) = 7\sin 2\pi x; u(0,t) = u(5,t) = 0.$
7. $u_t = 6u_{xx}; u(x,0) = 8\sin 3\pi x + 9\sin 4\pi x; u(0,t) = u(4,t) = 0.$
8. $u_t = 6u_{xx}; u(x,0) = 9\sin 3\pi x; u(0,t) = u(4,t) = 0.$
9. $u_t = 5u_{xx}; u(x,0) = 10\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x; u(0,t) = u(5,t) = 0.$
10. $u_t = 7u_{xx}; u(x,0) = 11\sin 2\pi x; u(0,t) = u(3,t) = 0.$

Задача № 2. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = 2u_{xx}; u(x,0) = \cos 3\pi x + 2\cos 4\pi x; u_x(0,t) = u_x(8,t) = 0.$
2. $u_t = 2u_{xx}; u(x,0) = 2\cos 2\pi x; u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0.$
3. $u_t = 3u_{xx}; u(x,0) = 3\cos 3\pi x + 4\cos 4\pi x; u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0.$
4. $u_t = 3u_{xx}; u(x,0) = 4\cos 3\pi x; u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0.$
5. $u_t = 8u_{xx}; u(x,0) = 5\cos 2\pi x + 6\cos 3\pi x; u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0.$
6. $u_t = 4u_{xx}; u(x,0) = 7\cos 3\pi x + 8\cos 4\pi x; u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0.$
7. $u_t = 5u_{xx}; u(x,0) = 8\cos 3\pi x; u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0.$
8. $u_t = 6u_{xx}; u(x,0) = 9\cos 2\pi x + 10\cos 3\pi x; u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0.$
9. $u_t = 6u_{xx}; u(x,0) = 10\cos 2\pi x; u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0.$
10. $u_t = 5u_{xx}; u(x,0) = 11\cos 3\pi x + 12\cos 4\pi x; u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0.$

Задача № 3. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = 2u_{xx}; u(x,0) = 19\sin 5\pi x; u(0,t) = 0, u_x(0{,}5;t) = 0.$
2. $u_t = 5u_{xx}; u(x,0) = 8\cos \pi x; u_x(0,t) = 0, u_x(1{,}5;t) = 0.$
3. $u_t = 8u_{xx}; u(x,0) = 17\sin 3\pi x; u(0,t) = 0, u_x(2{,}5;t) = 0.$
4. $u_t = u_{xx}; u(x,0) = 6\cos 9\pi x; u_x(0,t) = 0, u_x(3{,}5;t) = 0.$
5. $u_t = 4u_{xx}; u(x,0) = 15\sin 3\pi x; u(0,t) = 0, u_x(4{,}5;t) = 0.$
6. $u_t = 3u_{xx}; u(x,0) = 13\sin 5\pi x; u(0,t) = 0, u_x(2{,}5;t) = 0.$
7. $u_t = u_{xx}; u(x,0) = 2\cos 7\pi x; u_x(0,t) = 0, u_x(1{,}5;t) = 0.$
8. $u_t = 5u_{xx}; u(x,0) = 19\sin 3\pi x; u(0,t) = 0, u_x(0{,}5;t) = 0.$
9. $u_t = u_{xx}; u(x,0) = 8\cos 5\pi x; u_x(0,t) = 0, u\ (1{,}5;t) = 0.$
10. $u_t = 6u_{xx}; u(x,0) = 17\sin 3\pi x; u(0,t) = 0, u_x(2{,}5;t) = 0.$

Задача № 4. Решить смешанную задачу.

1. $$u_t = 9u_{xx};\quad u(x,0) = 5\sin 2\pi x - 1 + 3x;\quad u(0,t) = -1, u(2,t) = 5.$$

2. $$u_t = 8u_{xx};\quad u(x,0) = 6\sin 3\pi x + 2 - 3x;\quad u(0,t) = 2, u(3,t) = -7.$$

3. $$u_t = 7u_{xx};\quad u(x,0) = 7\sin 2\pi x - 3 + 4x;\quad u(0,t) = -3, u(1,t) = 1.$$

4. $$u_t = 6u_{xx};\quad u(x,0) = 8\sin 4\pi x + 4 - 5x;\quad u(0,t) = 4, u(2,t) = -6.$$

5. $$u_t = 5u_{xx};\quad u(x,0) = 9\sin 3\pi x - 5 + 2x;\quad u(0,t) = -5, u(3,t) = 1.$$

6. $u_t = 8u_{xx};$
$u(x,0) = 7\sin 2\pi x - 7 + 3x;$
$u(0,t) = -7, u(3,t) = 2.$

7. $u_t = 7u_{xx};$
$u(x,0) = 6\sin 3\pi x + 8 - 3x;$
$u(0,t) = 8, u(4,t) = -4.$

8. $u_t = 4u_{xx};$
$u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 9 + 5x;$
$u(0,t) = -9, u(2,t) = 1.$

9. $u_t = 3u_{xx};$
$u(x,0) = 4\sin 5\pi x + 9 - 4x;$
$u(0,t) = 9, u(3,t) = -3.$

10. $u_t = 2u_{xx};$
$u(x,0) = 3\sin 6\pi x - 8 + 5x;$
$u(0,t) = -8, u(2,t) = 2.$

Задача № 5. Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями $u(x,0) = 0; u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0.$

1. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 3x.$
2. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + e^{-2t}\sin 4x.$
3. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 2x.$
4. $u_t = 2u_{xx} + 7e^{-18t}\sin 3x.$
5. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 4x.$
6. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 2\cos t \sin 3x.$

7. $u_t = 3u_{xx} + 8e^{-48t}\sin 4x.$

8. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 2x.$

9. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 3e^{-4t}\sin 3x.$

10. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 4x.$

Задача № 6. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 2x; u(x,0) = \sin 4x; u(0,t) = u(\pi;t) = 0.$
2. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 3x; u(x,0) = 2\sin 9x; u(0,t) = u(\pi;t) = 0.$
3. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 4x; u(x,0) = 3\sin 16x; u(0,t) = u(\pi;t) = 0.$
4. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 5x; u(x,0) = 4\sin 16x; u(0,t) = u(\pi;t) = 0.$
5. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 17\cos 4t \sin 6x; u(x,0) = 5\sin 18x; u(0,t) = u(\pi;t) = 0.$
6. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 3x; u(x,0) = 7\sin 6x; u(0,t) = u(\pi;t) = 0.$
7. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 26\sin 5t \sin 4x; u(x,0) = 8\sin 12x; u(0,t) = u(\pi;t) = 0.$
8. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 37\cos 6t \sin 5x; u(x,0) = 9\sin 20x; u(0,t) = u(\pi;t) = 0.$
9. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 37\sin 6t \sin 6x; u(x,0) = 10\sin 20x; u(0,t) = u(\pi;t) = 0.$
10. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 2x; u(x,0) = 11\sin 6x; u(0,t) = u(\pi;t) = 0.$

Задача № 7. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 6x; u(x,0) = \sin 12x + \pi + 3x;$
   $u(0,t) = \pi, u(\pi;t) = 4\pi.$

2. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 5\cos 2t \sin 2x; u(x,0) = 2\sin 6x - \pi + 2x;$

$u(0,t) = -\pi, u(\pi;t) = \pi.$

3. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 10\sin 3t \sin 3x; u(x,0) = 3\sin 12x + 2\pi - x;$

$u(0,t) = 2\pi, u(\pi;t) = \pi.$

4. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 10\cos 3t \sin 4x; u(x,0) = 4\sin 8x - 2\pi + x;$

$u(0,t) = -2\pi, u(\pi;t) = -\pi.$

5. $u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 17\sin 4t \sin 5x; u(x,0) = 5\sin 15x + 3\pi - 2x;$

$u(0,t) = 3\pi, u(\pi;t) = \pi.$

6. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 26\sin 5t \sin 2x; u(x,0) = 7\sin 8x + 4\pi - 3x;$

$u(0,t) = 4\pi, u(\pi;t) = \pi.$

7. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 26\cos 5t \sin 3x; u(x,0) = 8\sin 9x - 3\pi + 3x;$

$u(0,t) = -3\pi, u(\pi;t) = 0.$

8. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 37\sin 6t \sin 4x; u(x,0) = 9\sin 8x + 5\pi - 4x;$

$u(0,t) = 5\pi, u(\pi;t) = \pi.$

9. $u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 37\cos 6t \sin 5x; u(x,0) = 10\sin 10x - 5\pi + 4x;$

$u(0,t) = -5\pi, u(\pi;t) = -\pi.$

10. $u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 26\sin 5t \sin 6x; u(x,0) = 11\sin 18x + \pi - 2x;$

$u(0,t) = \pi, u(\pi;t) = -\pi.$

Задача № 8. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $u(1,\varphi)=\sin 6\varphi; u(r,0)=u(r,\frac{\pi}{3})=0.$

2. $u(1,\varphi)=2\cos 2\varphi; u_{\varphi}(r,0)=u_{\varphi}(r,\pi)=0.$

3. $u(1,\varphi)=3\cos 15\varphi; u_{\varphi}(r,0)=0, u(r,\frac{\pi}{6})=0.$

4. $u(1,\varphi)=4\sin 14\varphi; u(r,0)=0, u_{\varphi}(r,\frac{\pi}{4})=0.$

5. $u(1,\varphi)=5\sin 3\varphi; u(r,0)=u(r,\frac{2\pi}{3})=0.$

6. $u(1,\varphi)=7\cos 10\varphi; u_{\varphi}(r,0)=0, u\ \ (r,\frac{\pi}{4})=0.$

7. $u(1,\varphi)=8\sin 7\varphi; u(r,0)=0, u_{\varphi}(r,\frac{\pi}{2})=0.$

8. $u(1,\varphi)=9\sin 4\varphi; u(r,0)=u(r,\frac{3\pi}{4})=0.$

9. $u(1,\varphi)=10\cos 4\varphi; u_{\varphi}(r,0)=u_{\varphi}(r,\frac{5\pi}{4})=0.$

10. $u(1,\varphi)=11\cos 5\varphi; u_{\varphi}(r,0)=0, u\ \ (r,\frac{\pi}{2})=0.$

Задача № 9. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круге $0\le r<1$, $0\le\varphi<2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

1. $u(1,\varphi)=\cos 9\varphi.$
2. $u(1,\varphi)=2\sin 8\varphi.$
3. $u(1,\varphi)=3\cos 7\varphi.$
4. $u(1,\varphi)=4\sin 6\varphi.$
5. $u(1,\varphi)=5\cos 5\varphi.$
6. $u(1,\varphi)=7\cos 3\varphi.$
7. $u(1,\varphi)=8\sin 2\varphi.$
8. $u(1,\varphi)=9\cos 2\varphi.$

9. $u(1,\varphi)=10\sin 3\varphi.$

10. $u(1,\varphi)=11\cos 4\varphi.$

Задача № 10. Решить смешанную задачу:

1. $$\begin{aligned}&u_{tt}=81u_{xx};\\&u(x,0)=\sin\pi x;\\&u_t(x,0)=0;\\&u(0,t)=u(5,t)=0.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}&u_{tt}=64u_{xx};\\&u(x,0)=0;\\&u_t(x,0)=8\pi\sin\pi x;\\&u(0,t)=u(6,t)=0.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}&u_{tt}=49u_{xx};\\&u(x,0)=3\sin 2\pi x;\\&u_t(x,0)=0;\\&u(0,t)=u(4,t)=0.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}&u_{tt}=36u_{xx};\\&u(x,0)=0;\\&u_t(x,0)=12\pi\sin 2\pi x;\\&u(0,t)=u(5,t)=0.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}&u_{tt}=25u_{xx};\\&u(x,0)=5\sin 3\pi x;\\&u_t(x,0)=0;\\&u(0,t)=u(3,t)=0.\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}&u_{tt}=9u_{xx};\\&u(x,0)=7\sin 4\pi x;\\&u_t(x,0)=0;\\&u(0,t)=u(2,t)=0.\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx};\\ &u(x,0) = 0;\\ &u_t(x,0) = 8\pi \sin 4\pi x;\\ &u(0,t) = u(3,t) = 0. \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx};\\ &u(x,0) = 9\sin 5\pi x;\\ &u_t(x,0) = 0;\\ &u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx};\\ &u(x,0) = 0;\\ &u_t(x,0) = 5\sin 5\pi x;\\ &u(0,t) = u(3,t) = 0. \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx};\\ &u(x,0) = 11\sin 6\pi x;\\ &u_t(x,0) = 0;\\ &u(0,t) = u(2,t) = 0. \end{aligned}$$

Задача № 11. Решить смешанную задачу:

1. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 81u_{xx};\\ &u(0,t) = u(5,t) = 0;\\ &u(x,0) = \sin \pi x;\\ &u_t(x,0) = 18\pi \sin 2\pi x. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 64u_{xx};\\ &u(0,t) = u(6,t) = 0;\\ &u(x,0) = 2\sin \pi x;\\ &u_t(x,0) = 8\pi \sin \pi x. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 49u_{xx};\\ &u(0,t) = u(4,t) = 0;\\ &u(x,0) = 3\sin 2\pi x;\\ &u_t(x,0) = 21\pi \sin 3\pi x. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 36u_{xx}; \\ &u(0,t) = u(5,t) = 0; \\ &u(x,0) = 4\sin 2\pi x; \\ &u_t(x,0) = 12\pi \sin 2\pi x. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx}; \\ &u(0,t) = u(3,t) = 0; \\ &u(x,0) = 5\sin 3\pi x; \\ &u_t(x,0) = 20\pi \sin 4\pi x. \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}; \\ &u(0,t) = u(2,t) = 0; \\ &u(x,0) = 7\sin 4\pi x; \\ &u_t(x,0) = 15\pi \sin 5\pi x. \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}; \\ &u(0,t) = u(3,t) = 0; \\ &u(x,0) = 8\sin 4\pi x; \\ &u_t(x,0) = 8\pi \sin 4\pi x. \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}; \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0; \\ &u(x,0) = 9\sin 5\pi x; \\ &u_t(x,0) = 6\pi \sin 6\pi x. \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}; \\ &u(0,t) = u(3,t) = 0; \\ &u(x,0) = 10\sin 5\pi x; \\ &u_t(x,0) = 5\pi \sin 5\pi x. \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}; \\ &u(0,t) = u(2,t) = 0; \\ &u(x,0) = 11\sin 6\pi x; \\ &u_t(x,0) = 12\pi \sin 6\pi x. \end{aligned}$$

Задача № 12. Решить смешанную задачу.

1. $u_{tt} = 64u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 8\pi\cos\pi x.$
2. $u_{tt} = 81u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0; u(x,0) = 2\cos\pi x, u_t(x,0) = 0.$
3. $u_{tt} = 36u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 12\pi\cos 2\pi x.$
4. $u_{tt} = 49u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0; u(x,0) = 4\cos 2\pi x, u_t(x,0) = 0.$
5. $u_{tt} = 16u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 12\pi\cos 3\pi x.$
6. $u_{tt} = 4u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 8\pi\cos 4\pi x.$
7. $u_{tt} = 9u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0; u(x,0) = 8\cos 4\pi x, u_t(x,0) = 0.$
8. $u_{tt} = u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 5\pi\cos 5\pi x.$
9. $u_{tt} = u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0; u(x,0) = 10\cos 5\pi x, u_t(x,0) = 0.$
10. $u_{tt} = 9u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 18\pi\cos 6\pi x.$

Задача № 13. Решить смешанную задачу:

1. $u_{tt} = 4u_{xx}; u(x,0) = \sin 9\pi x, u_t(x,0) = 0; u(0,t) = 0, u_x(0{,}5;t) = 0.$
2. $u_{tt} = 4u_{xx}; u(x,0) = 2\cos 7\pi x, u_t(x,0) = 0; u(0,t) = 0, u_x(0{,}5;t) = 0.$
3. $u_{tt} = 4u_{xx}; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 18\pi\sin 9\pi x; u(0,t) = 0, u_x(1{,}5;t) = 0.$
4. $u_{tt} = 4u_{xx}; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 14\pi\cos 7\pi x; u_x(0,t) = 0, u\ (1{,}5;t) = 0.$
5. $u_{tt} = 9u_{xx}; u(x,0) = 5\sin 5\pi x, u_t(x,0) = 0; u(0,t) = 0, u_x(2{,}5;t) = 0.$
6. $u_{tt} = 9u_{xx}; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 15\pi\sin 5\pi x; u(0,t) = 0, u_x(3{,}5;t) = 0.$
7. $u_{tt} = 9u_{xx}; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 9\pi\cos 3\pi x; u_x(0,t) = 0, u(3{,}5;t) = 0.$
8. $u_{tt} = 16u_{xx}; u(x,0) = 9\sin 9\pi x, u_t(x,0) = 0; u(0,t) = 0, u_x(4{,}5;t) = 0.$
9. $u_{tt} = 16u_{xx}; u(x,0) = 10\cos 7\pi x, u_t(x,0) = 0; u(0,t) = 0, u_x(4{,}5;t) = 0.$
10. $u_{tt} = 16u_{xx}; u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 36\pi\sin 9\pi x; u(0,t) = 0, u(0{,}5;t) = 0.$

Задача № 14. Решить смешанную задачу:

1. $u_{tt} = 9u_{xx}; u(0,t) = -8, u\ (2,t) = 2; u(x,0) = \sin 6\pi x - 8 + 5x,$
$u_t(x,0) = 0.$

2. $u_{tt} = 9u_{xx}; u(0,t) = 7, u\ (1,t) = 2; u(x,0) = 7 - 5x,$
$u_t(x,0) = 12\pi \sin 4\pi x.$

3. $u_{tt} = 9u_{xx}; u(0,t) = -6, u\ (3,t) = 6; u(x,0) = 3\sin 3\pi x - 6 + 4x,$
$u_t(x,0) = 0.$

4. $u_{tt} = 9u_{xx}; u(0,t) = 5t, u\ (2,t) = -3t; u(x,0) = 0,$
$u_t(x,0) = 12\pi \sin 4\pi x + 5 - 4x.$

5. $u_{tt} = 16u_{xx}; u(0,t) = -4, u\ (1,t) = -1; u(x,0) = 5\sin 2\pi x - 4 + 3x,$
$u_t(x,0) = 0.$

6. $u_{tt} = 16u_{xx}; u(0,t) = -2, u\ (3,t) = 1; u(x,0) = 7\sin 4\pi x - 2 + x,$
$u_t(x,0) = 0.$

7. $u_{tt} = 9u_{xx}; u(0,t) = t, u\ (2,t) = -t; u(x,0) = 0,$
$u_t(x,0) = 28\pi \sin 7\pi x + 1 - x.$

8. $u_{tt} = 25u_{xx}; u(0,t) = -1, u\ (1,t) = -3; u(x,0) = 9\sin 3\pi x - 1 - 2x,$
$u_t(x,0) = 0.$

9. $u_{tt} = 25u_{xx}; u(0,t) = 3, u\ (2,t) = -5; u(x,0) = 3 - 4x,$
$u_t(x,0) = 20\pi \sin 4\pi x.$

10. $u_{tt} = 25u_{xx}; u(0,t) = -5, u\ (1,t) = 1; u(x,0) = 11\sin 3\pi x - 5 + 6x,$
$u_t(x,0) = 0.$

Задача № 15. Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями $u(x,0)=u_t(x,0)=0; u(0,t)=u(\pi,t)=0.$

1. $u_{tt}=u_{xx}+65e^{-8t}\sin x.$

2. $u_{tt}=\dfrac{1}{4}u_{xx}+3\sin 2t\sin 2x.$

3. $u_{tt}=u_{xx}+16\cos 8t\sin 8x.$

4. $u_{tt}=\dfrac{1}{9}u_{xx}+8\sin 3t\sin 3x.$

5. $u_{tt}=\dfrac{1}{16}u_{xx}+50e^{-7t}\sin 4x.$

6. $u_{tt}=4u_{xx}+28\cos 14t\sin 7x.$

7. $u_{tt}=\dfrac{1}{36}u_{xx}+8\cos 3t\sin 6x.$

8. $u_{tt}=\dfrac{1}{49}u_{xx}+37e^{-6t}\sin 7x.$

9. $u_{tt}=\dfrac{1}{64}u_{xx}+15\sin 4t\sin 8x.$

10. $u_{tt}=9u_{xx}+36\cos 18t\sin 6x.$

9. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Алиев Р.Г. Уравнение в частных производных: учебник - М.: Экзамен, 2005. – 318 с.

2. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения: учебник/ А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников – М.: Экзамен, 2005. – 420 с.

3. Власова Е.А. Приближенные методы математической физики: Учебник/ Е.А.Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. Под ред. В.С. Зарубина. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 600 с.

4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. / П.Е. Данко [и др.]. Ч.1. - М.: Оникс: Мир и образование, 2008. – 415 с.

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебник: в 2 т. - М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 432 с.

Дополнительная литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608с.

2. Соболь Б.В. Практикум по высшей математике./ Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. – Ростов н/Д: изд-во «Феникс», 2004. – 640 с.

3. Шипачев В.С. Высшая математика. Учеб. для вузов/ В.С. Шипачев. – 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.

Батуев Эрдэмто Николаевич

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Программа курса и методические указания
к изучению дисциплины для курсантов и студентов
технических специальностей и направлений подготовки
очной и заочной форм обучения

В авторской редакции
Набор текста Э.Н. Батуев
Верстка, оригинал-макет О.А. Лыгина

Гарнитура Times New Roman
Авт. л. 3,12. Уч.-изд. л. 3,33. Усл. печ. л. 2,8
Заказ № 180

Издательство
Камчатского государственного технического университета
683003, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Ключевская, 35