Московский финансово-промышленный университет «Синергия»

Кафедра Высшей математики и естественнонаучных дисциплин

Смирнова С.М.

Учебные материалы по дисциплине «Теория игр»

Москва
2014

Содержание

Тема 1. Матричные игры

Цели и задачи изучения темы:

- ознакомление с элементами теории игр;
- дать представление о нижней и верхней цене игры, смешанной стратегии игрока;
- познакомить с основными методами решения матричных игр.

Успешно изучив тему, Вы:

Будете знать:

- алгоритм определения нижней и верхней цены игры;
- условия применения смешанных стратегий;
- методы решения матричных игр.

Будете уметь:

- использовать элементы теории игр для моделирования процесса игры и получать возможные результаты игры до ее фактического начала;
- применять методы решения матричных игр при принятии решений о целесообразности участия и оптимальном поведении в реальном конфликте.

Вопросы темы:

1. Основные понятия. Элементы теории игр. Классификация игр.
2. Матричные, конечные, антагонистические игры.
3. Нижняя и верхняя цена игры. Принципы максимина и минимакса.
4. Оптимальные смешанные стратегии и их свойства.
5. Методы решения матричных игр. Представление матричной игры как задачи ЛП.
6. Итерационный метод Брауна.
7. Графоаналитический метод решения матричных игр размерами $2\times 2,\ 2\times n,\ m\times 2$.

Вопрос 1. Основные понятия. Элементы теории игр.

Классификация игр.

В обыденном смысле под словом конфликт понимают противостояние нескольких сторон или их коалиций, причем каждый участник старается нанести наибольший урон сторонам, не входящим в коалицию с ним. Примером такого взаимодействия является любая азартная игра, в которой выигрыш одного участника является проигрышем другого. Именно азартные игры явились первым предметом исследований теории игр, чему она и обязана своим названием. Однако с течением времени выяснилось, что аналогичные методы могут применяться при анализе более широкого класса процессов.

В современной теории игр понятие конфликта рассматривается в более общем смысле – как ситуация взаимодействия двух и более сторон с несовпадающими интересами. Конфликты в таком понимании сопровождают практически любую деятельность человека.

Более того, во многих общественных дисциплинах – юридических, экономических, политических, конфликт является основным предметом изучения.

Основными ограничениями теории игр являются предположение о полной («идеальной») разумности противника и принятие при разрешении конфликта наиболее осторожного «перестраховочного» решения.

Теория игр занимается принятием решений в условиях конфликтных ситуаций двумя и более разумными противниками, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счет других.

Игра — упрощенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации, в которой выработаны определенные правила действия сторон в процессе игры.

Совокупность правил, описывающих сущность конфликтной ситуации, устанавливают:

- выбор образа действия игроков на каждом этапе игры;
- информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении таких выборов;
- плату для каждого игрока после завершения любого этапа игры.

Будем считать состояние конкуренции как некоторую конфликтную ситуацию (КС) между двумя сторонами A и B, которые преследуют противоположные цели.

Математическую модель КС называют игрой, конфликтующие стороны называются игроками, одна реализация игры — партией, исход игры — выигрышем или проигрышем. Необходимость в решении подобного рода задач потребовало создания специального математического аппарата − теории игр. Теория игр − это математическая теория конфликтных ситуаций.

Развитие игры во времени происходит последовательно, по этапам или ходам. Ходом в теории игр называют выбор одного из предусмотренных правилами игры действия и его реализацию. Ходы бывают личные и случайные. Личным ходом называют сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действия и его осуществление (шахматы, шашки). Случайным ходом называют выбор, осуществляемый не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора, например бросанием монеты.

Выбор личного хода определяется стратегией игрока. Начиная игру, каждый игрок должен определить свою стратегию, которая может обеспечить максимальный выигрыш. Стратегия игрока − это набор правил, однозначно определяющих последовательность действий, играя в КС. Оптимальной стратегией игрока называется такая его стратегия, которая при многократном воспроизведении игры, обеспечивает ему максимальный средний выигрыш (минимальный средний проигрыш).

Стратегии могут быть чистыми и смешанными. Элементами смешанной стратегии являются чистые стратегии, которые варьируются с определенной вероятностью.

Игра называется *конечной*, если у каждого игрока имеется конечное число стратегий, и *бесконечной* – в противном случае.

Одну играющую сторону может представлять один игрок или группа участников игры (игровое лицо), имеющих общие интересы или некоторую общую цель, не совпадающую с интересами (целями) других групп. Разные члены участников игры могут быть по-разному информированы об обстановке проведения игры.

В большинстве конфликтных ситуаций при выборе разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько показателей. Причем стратегия, оптимальная по одному показателю, необязательно будет оптимальной по другим.

В зависимости от причин, вызывающих неопределенность исходов, игры можно разделить на следующие основные группы:

- комбинаторные игры, в которых правила дают в принципе возможность каждому игроку проанализировать все разнообразные варианты своего поведения и, сравнив эти варианты, избрать тот из них, который ведет к наилучшему для этого игрока исходу. Неопределенность исхода связана обычно с тем, что количество возможных вариантов поведения (ходов) слишком велико и практически игрок не в состоянии их все перебрать и проанализировать;
- азартные игры, в которых исход оказывается неопределенным в силу влияния различных случайных факторов. Азартные игры состоят только из случайных ходов, при анализе которых применяется теория вероятностей. Теория игр не занимается азартными играми;
- стратегические игры, в которых неопределенность исхода вызвана тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры, причем незнание игрока о поведении и намерениях партнеров носит принципиальный характер, так как отсутствует информация о последующих действиях противника (партнера). Существуют также игры, сочетающие в себе комбинаторику и свойства азартных игр, стратегичность может сочетаться с комбинаторикой и т. д.

По характеру взаимоотношений игры делятся на: бескоалиционные, кооперативные и коалиционные. Бескоалиционные игры – это игры, в которых игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции. Коалиционные игры − игры, в которых игроки могут вступать в коалиции. В кооперативных играх коалиции заранее определены.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более игровых лиц (сторон). В зависимости от количества игровых лиц игра называется парной, если в ней участвуют две стороны (игрока), а если число сторон (игроков) больше двух — множественной. Участники множественной игры могут образовывать коалиции (постоянные или временные). Множественная игра с двумя постоянными коалициями превращается в парную.

По виду функций выигрыша игры делятся на матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, иерархические, типа дуэлей и др.

Матричная игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задается выигрыш игрока 1 в виде матрицы.

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение, и оно может быть легко найдено путем сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра — это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока).

В последнее время получили распространения деловые игры.

Деловая игра имитирует взаимодействие людей и проявляется как упражнение в последовательном принятии множества решений, основанное на некоторой модели коммерческой деятельности и на исполнении участниками игры конкретных ролей-должностей. Деловые игры предназначены для воспроизведения и согласования коммерческих интересов. В деловых играх обычно задаются начальные условия, в которых они находятся, сообщаются правила игры. Представляются варианты возможных решений и оценка из последствий. В игре обязательно присутствует ведущий, который руководит игрой. Оценивает решения, принятые игроками и определяет выигрыши и проигрыши по исходам игры.

Основными вопросами теории игр, которые возникают в коммерческой деятельности, являются:

- в чем состоит оптимальность поведения каждого из игроков в игре, какие свойства стратегий следует считать признаками оптимальности;
- существуют ли стратегии игроков, которые обладали бы атрибутами оптимальности;

- существуют ли оптимальные стратегии, и если да, то, как их найти?

Для игры, как правило, определен набор возможных конечных ее состояний (выигрыш, ничья, проигрыш) и игрокам (участникам игры) известны платежи в виде матрицы А = ||*aij*||, соответствующие каждому возможному конечному состоянию.

Наибольший интерес вызывают игры двух лиц. Они математически более глубоко проработаны и получили наибольшее распространение в практике анализа игровых ситуаций и имеют обширную библиографию.

По характеру выигрышей игры можно разделить на игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой. Игра называется игрой с нулевой суммой, если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого, в противном случае она называется игрой с ненулевой суммой, например, игра, в которой нужно вносить взнос за право участия в ней.

В частности игра двух игроков A и B с нулевой суммой называется *антагонистической*, т.е. выигрыш в размере a игрока A равен проигрышу $a = -b$ игрока B или $a + b = 0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать матричные, парные, конечные игры с нулевой суммой двух лиц.

Вопрос 2. Матричные, конечные, антагонистические игры.

Будем рассматривать матричную игру двух игроков A и B с нулевой суммой. Первый игрок A имеет m *чистых стратегий*, $i = 1,2,\ldots,m$, второй игрок B имеет n чистых стратегий, $j = 1,2,\ldots,n$. *Каждой паре стратегий* (i, j), в дальнейшем *ситуации*, поставлено в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш $(a_{ij} > 0)$, проигрыш $(a_{ij} < 0)$ игрока A, если игрок A применит стратегию $i(A_i)$, а игрок B применит свою стратегию $j(B_j)$. Для задания матричной игры достаточно задать матрицу платежей $\|a_{ij}\|$ порядка $m \times n$ выигрышей игрока A:

$$\|a_{ij}\| = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ A_m \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & . & . & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

В матричной игре каждый из игроков делает один ход: игрок A выбирает стратегию $A_i, i=1,\dots,m$, второй игрок выбирает стратегию $B_j, j=1,\dots,n$, после чего игрок A получает выигрыш a_{ij}, игрок B соответственно проигрыш равный a_{ij}. Игра на этом заканчивается.

Рассмотрим ряд примеров известных игр, записав для каждой из них платежную матрицу.

1. Игра «Поиск». Игрок A имеет возможность спрятаться в убежище 1 или 2. Игрок B осуществляет поиск игрока A. Если игрок B нашел A в убежище 1 или 2, то A платит B определенную сумму, например, 1 руб.; если же B осуществляет поиск в убежище 1, а игрок A спрятался в убежище 2, то B платит игроку A ту же сумму − 1 руб. То же самое, если B ищет в 2, а A находится в 1. Платежная матрица имеет вид:

$$\|a_{ij}\| = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Игра «три пальца». В игре участвуют 2 игрока A и B. Каждый из них независимо, но одновременно показывают 3 пальца, 2 пальца или 1 палец. Результат игры определяется суммой пальцев. Если эта сумма четная, выигрывает игрок A, если сумма нечетная, выигрывает игрок B. Каждый игрок имеет 3 стратегии, поэтому эта игра 3×3.

$$\|a_{ij}\| = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. «Дилемма заключенного». Два подозреваемых в ограблении сидят в разных камерах. Каждому из них адвокат конфиденциально предлагает дать показания против его сообщника, обещая смягчение наказания. При отсутствии прямых улик возможность их осуждения в большой степени зависит от того, заговорят они или будут молчать.

Если оба будут молчать, то наказанием будет срок предварительного заключения (потери каждого из узников составят (-1)). Если сознаются, то получат срок, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство (потери каждого из узников составят в этом случае (-6)). Если же заговорит только один из узников, а другой будет молчать, то в этом случае заговоривший будет выпущен на свободу (его потери равны 0), а сохраняющий молчание получит максимально возможное наказание (его потери будут равны (-9)). Эта конфликтная ситуация приводит к биматричной игре, в которой каждый из игроков имеет по две стратегии — молчать (М) или говорить (Г).

Выигрыши игроков А и В соответственно описываются так:

	(М)	(Г)			(М)	(Г)
(М)	-1	-9		(М)	-1	0
(Г)	0	-6		(Г)	-9	-6

4. «Семейный спор». Как следует из названия, игроки - муж и жена. Муж хочет сходить вечером на футбол, жена - в театр. Если они договорятся и пойдут куда-нибудь вместе, они получат большое удовольствие, если поругаются и проведут вечер поотдельности, то настроение будет испорчено.

Эта конфликтная ситуация приводит к биматричной игре, в которой каждый из игроков имеет по две стратегии: $A_1 = A_2 =$ {«футбол», «театр»}. Выигрыши игроков А и В соответственно описываются таблицами следующего вида:

	(1)	(2)			(1)	(2)
(1)	2	0		(1)	1	0
(2)	0	1		(2)	0	2

Выигрыш здесь выражен в единицах полезности, которые получит тот или иной игрок от проведенного вечера.

5. Студент-преподаватель. Рассмотрим следующую ситуацию. Студент (игрок А) готовится к зачету, который принимает преподаватель (игрок В). Можно считать, что у студента две стратегии — подготовиться к сдаче зачета (+) и не подготовиться (—). У преподавателя также две стратегии — поставить зачет (+) и не поставить зачета (—).

В основу значений функций выигрыша игроков положим следующие соображения:

Выигрыш студента Выигрыш преподавателя

	(+)	(—)			(+)	(—)
(+)	2	0		(+)	1	0
(—)	0	1		(—)	0	2

Выигрыщ Студента		
	(+)	(—)
(+)	Оценка заслужена	Очень обидно
(—)	Удалось обмануть	Оценка заслужена

Выигрыш Преподавателя		
	(+)	(—)
(+)	Все нормально	Был неправ
(—)	Дал себя обмануть	Опять придет

Количественно это можно выразить так:

	(+)	(—)			(+)	(—)
(+)	2	-1		(+)	1	-3
(—)	1	0		(—)	-2	-1

Пример. Две конкурирующие крупные торговые компании Виктория и Вестер планируют построить в одном из четырех небольших городов Г1, Г2, Г3, Г4, лежащих вдоль автомагистрали, по одному универсаму. Взаимное расположение городов, расстояния между ними и численность населения показаны на рис. 1.

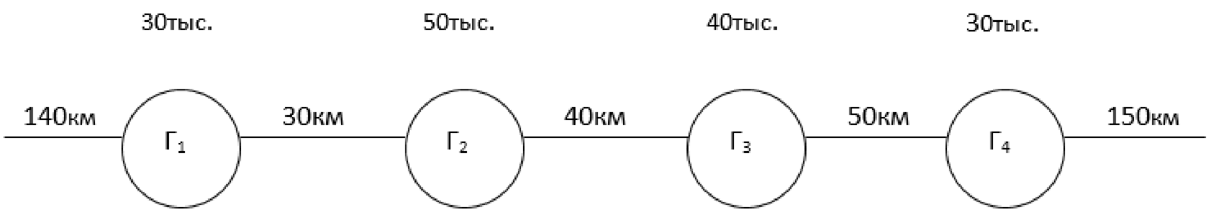


Рис. 1. Схема городов, расстояние и численность населения

Распределение оборота, полученного каждой фирмой, определяется численностью населения, а также степенью удаленности универсамов от места жительства покупателей. Исследования показали, что торговый оборот в универсамах будет распределяться между компаниями в соответствии с данными таблицы 1.

Таблица 1.

Условия	Распределение сторон между компаниями, %	
	Вестер	Виктория
Универсам компании Вестер расположен к городу ближе универсама компании Виктория.	75	25
Универсамы обеих компаний расположены на одном расстоянии от города.	60	40
Универсам компании Вестер расположен к городу дальше универсам компании Виктория.	45	55

Найти с помощью аппарата теории игр, в каких городах целесообразно компаниям построить свои универсамы.

Решение. На основании рис. 1 и данных таблицы 1 построим платежную матрицу данной задачи, полагая, что компания Вестер является игроком *A*, а компания Виктория – игроком *B*. В качестве стратегий будем считать планы компаний строить свои универсамы в городах Г1, Г2, Г3, Г4. У каждого игрока имеется 4 стратегии размещения своего универсама в одном из четырех городов. Например, стратегия (1,2) означает, что компания Вестер размещает свой универсам в городе Г1, а компания Виктория – в городе Г2. В соответствии с данными схемы 1 и таблицы 1 количество покупателей для этой стратегии составит:

1. $N_{Вес} = 0{,}75\times30+0{,}45\times50+0{,}45\times40+0{,}45\times30=76{,}5$ *тысяч человек для компании Вестер;*

2. $N_{Вик} = (30+50+40+30) - 76{,}5 = 73{,}5$ *тысяч человек для компании Виктория.*

Проделав аналогичные расчеты для всех вариантов «игры», получим платежную матрицу данной задачи (в тысячах покупателей).

Таблица 2.

A \ B	$Г_1$	$Г_2$	$Г_3$	$Г_4$
$Г_1$	90	76,5	91,5	91,5
$Г_2$	103,5	90	91,5	103,5
$Г_3$	88,5	88,5	90	103,5
$Г_4$	88,5	76,5	76,5	90

Предполагая, что доходы компаний от торговли пропорциональны потенциальному числу покупателей, будем рассматривать полученную платежную матрицу как платежную матрицу доходов. Согласно платежной матрице, нижняя цена игры равна 90, верхняя цена – также 90, т.е. в платежной матрице имеется седловая точка для ячейки ($Г_2$, $Г_2$).

Это означает, что при выборе компаниями Вестер и Виктория города $Г_2$, универсамы компании Вестер будут посещать 90 тысяч покупателей, а универсамы компании Виктория – 60 тысяч.

Вопрос 3. Нижняя и верхняя цена игры. Принципы максимина и минимакса.

Результаты конечной парной игры с нулевой суммой можно задавать матрицей, строки и столбцы которой соответствуют различным, стратегиям игроков (номер строки матрицы соответствует номеру стратегии, применяемой игроком 1, номер столбца — номеру стратегии игрока 2), а ее элементы — выигрышам одной стороны (равные проигрышам другой). Эта матрица называется платежной матрицей или матрицей игры. В общем случае платежная матрица является прямоугольной.

Рассмотрим парную конечную игру $m \times n$ и ее платежную матрицу $\|a_{ij}\|$, $i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n$.

Если игрок А выбирает стратегию i_0 0 {1,…}, то игрок В может выбрать такую стратегию j, при которой выигрыш игрока A будет равен наименьшему из чисел $a_{i_0 j}$, т.е. $\min\limits_j a_{i_0 j}$. Поэтому игрок A должен выбрать стратегию i_0 так, чтобы этот минимальный выигрыш был наибольшим, т.е. равным^

$$\max_i \min_j a_{ij} = \alpha \quad . \qquad (1)$$

Величину α будем называть нижним значением игры, *нижней ценой игры*. Соответствующую этому значению стратегию игрока A называют его *максиминной чистой стратегией*. Применяя эту стратегию, игрок A при любом поведении игрока B обеспечивает себе выигрыш не меньший, чем α .

Аналогично, стратегия $j_0 \in \{1,...,n\}$ игрока B, определяется из равенства:

$$\min_j \max_i a_{ij} = \beta \quad . \qquad (2)$$

называется *минимаксной чистой стратегией* игрока B. Применяя ее, игрок B при любых действиях игрока A проигрывает ему не больше β . Величину β будем называть *верхней ценой игры*.

<u>Определение:</u> Если в игре с матрицей $\|a_{ij}\|$ верхняя цена игры равна нижней цене игры ($\alpha = \beta$), то говорят, что эта игра имеет *седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры*: $V = \alpha = \beta$.

Вопрос 4. Оптимальные смешанные стратегии и их свойства.

Пусть в некоторой игре игрок A имеет чистые стратегии $i = 1,\ldots,m$ и вероятности их применения $p_1, p_2,\ldots, p_m$, а игрок B соответственно имеет чистые стратегии $j = 1,\ldots,n$ и вероятности их применения $q_1, q_2,\ldots, q_n$.

<u>Определение:</u> Вектор, каждая из компонент которого показывает относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии, называется *смешанной стратегией* данного игрока.

Поэтому, для игрока A, смешанная стратегия:

$$p = (p_1,..., p_m)\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

аналогично для игрока B:

$$q = (q_1,..., q_n)\ \sum_{j=1}^{n} q_i = 1 .$$

Очевидно, что чистая стратегия есть частный случай смешанной стратегии. Действительно, если в смешанной стратегии какая-либо i-я чистая стратегия применяется с вероятностью 1, то все остальные чистые стратегии не применяются. И эта i-я чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии.

<u>Определение:</u> Если $\vec{p}^* = (p_1^*, p_2^*,..., p_m^*)$ − оптимальная стратегия игрока A, а $\vec{q}^* = (q_1^*, q_2^*,..., q_n^*)$ − оптимальная смешанная стратегия игрока B, то число:

$$V = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i^* q_j^* = \vec{p}^*A\vec{q}^{*T}, \qquad (3)$$

является средней ценой игры,

где
A − платежная матрица.

Если $V > 0$, то при многократной реализации игры чаще в среднем будет выигрывать игрок A, если $V < 0$, то наоборот, − игрок B. Если $V = 0$, то игра считается ничейной.

Определение оптимальных смешанных стратегий и цены игры и составляет процесс нахождения решения игры.

Теорема 1: Всякая матричная игра размером $m \times n$ имеет решение в смешанных стратегиях, т.е. имеет, по крайней мере, одну седловую точку в смешанной стратегии. Это означает, что для любой матричной игры

$$\min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} \vec{p} A \vec{q}^T = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} \vec{p} A \vec{q}^T = V .$$

Теорема 2: Для того чтобы $\vec{p}^*$ была оптимальной смешанной стратегией матричной игры с матрицей $\|a_{ij}\|, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ и ценой игры V, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq V, \quad j = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Аналогично, для второго игрока: чтобы $\vec{q}^*$ была оптимальной смешанной стратегией, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \leq V, \quad i = 1, \dots, m. \tag{5}$$

Из этой теоремы вытекает: чтобы установить являются ли предполагаемые $(\vec{p}, \vec{q})$ и V решением матричной игры, достаточно проверить удовлетворяют ли они неравенствам (4) и (5), совместно со следующими уравнениями:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 .$$

Теорема 3: Пусть имеется матричная игра с матрицей $\|a_{ij}\|, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, ценой игры V, оптимальными смешанными стратегиями $\vec{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$, $\vec{q}^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ соответственно игрока A и B.

Тогда, если для некоторого i будет выполняться:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* < V, \text{ то } p_i^* = 0,$$

если для некоторого j будет:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* > V \text{, } mo \ q_j^* = 0.$$

Пример 1: Найдем решение матричной игры со следующей платежной матрицей:

$$\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

На основании теоремы 2, для нахождения решения следует найти неотрицательные $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\begin{cases} p_1 - p_2 - p_3 \geq V, \\ -p_1 - p_2 + 2p_3 \geq V, \\ -p_1 + 3p_2 - p_3 \geq V, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 - q_2 - q_3 \leq V, \\ -q_1 - q_2 + 3q_3 \leq V, \\ -q_1 + 2q_2 - q_3 \leq V, \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1. \end{cases}$$

Причем, данные системы можно решать как вместе, так и отдельно.

Рассмотрим сначала первую систему. Для ее решения можно сначала заменить все неравенства на равенства и попробовать их решить. Если все решения p_1, p_2, p_3 получатся неотрицательными, то это и будет решением игры. Таким образом:

$$\begin{cases} p_1 - p_2 - p_3 = V, \\ -p_1 - p_2 + 2p_3 = V, \\ -p_1 + 3p_2 - p_3 = V, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Решая систему каким-либо способом, получим:

$$p_1 = \frac{6}{13},\ p_2 = \frac{3}{13},\ p_3 = \frac{4}{13},\ V = -\frac{1}{13}.$$

Оптимальной смешанной стратегией игрока A будет:

$$\vec{p}^* = \left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13} \right).$$

Если бы в ходе решения этой системы мы получили бы хотя бы одно отрицательное значение p_i, то предположения о том, что все неравенства можно заменить уравнениями несправедливо, и надо только часть неравенств заменить равенствами и решать уже такую систему. Перебирая последовательно все возможные комбинации равенств и неравенств, и решая их, получим искомое решение. Это решение будет обязательно найдено согласно теореме 1.

Составляем теперь систему уравнений для второго игрока:

$$\begin{cases} q_1 - q_2 - q_3 = V, \\ -q_1 - q_2 + 3q_3 = V, \\ -q_1 + 2q_2 - q_3 = V, \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1, \end{cases}$$

и решая ее, получим $q_1 = \frac{6}{13}$, $q_2 = \frac{4}{13}$, $q_3 = \frac{3}{13}$, $V = -\frac{1}{13}$.

Поскольку q_1, q_2, q_3 – неотрицательные, они составляют оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Итак, решением игры являются:

$$\vec{p}^* = \left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13} \right),$$

$$\vec{q}^* = \left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13} \right),$$

$$V = -\frac{1}{13}.$$

Из рассмотренного примера видно, что метод решения перебором возможных равенств и неравенств неприемлем для большой размерности платежных матриц. В дальнейшем будут рассмотрены более совершенные методы.

Часто при нахождении решения матричной игры помогает выявление превосходства одной стратегии над другой.

Определение: Если для i-й и k-й стратегий игрока A выполняется соотношение $a_{ij} \geq a_{kj}, \forall j = 1, 2, \ldots, n$ и $a_{ij} > a_{kj}$ хотя бы для одного j, то говорят, что i-я стратегия доминирует k-ю стратегию: $A_i \succ A_k$.

Аналогично, для игрока B – стратегия r доминирует стратегию j ($B_r \succ B_j$), если выполняются неравенства $a_{ij} \ge a_{ir}, \forall i = 1,2,\ldots,m$ и $a_{ij} > a_{ir}$ хотя бы для одного i.

Теорема 4: Пусть Γ – матричная игра с матрицей $\|a_{ij}\|$ порядка $m \times n$ и $A_i \succ A_k$. Пусть $\|a^1_{ij}\|_{(m-1)\times n}$ – матрица, получаемая из $\|a_{ij}\|$ путем вычеркивания из нее k-й строки и пусть Γ^1 – матричная игра с матрицей $\|a^1_{ij}\|$. Тогда цена игры Γ^1 совпадает с ценой игры Γ.

Теорема 5: Пусть Γ – матричная игра с матрицей $\|a_{ij}\|$ порядка $m \times n$ и $B_r \succ B_j$. Пусть $\|a^1_{ij}\|_{(m-1)\times n}$ – матрица, получаемая из $\|a_{ij}\|$ путем вычеркивания j-го столбца и пусть Γ^1 – матричная игра с матрицей $\|a^1_{ij}\|$. Тогда цена игры Γ^1 совпадает с ценой игры Γ.

Рассмотрим матричную игру с матрицей платежей:

$$\|a_{ij}\| = \underset{A_3 \succ A_1}{\begin{pmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{1} \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}} \sim \underset{B_2 \succ B_4}{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & \cancel{5} \\ 5 & 3 & 5 & \cancel{3} \\ 1 & 5 & 4 & \cancel{8} \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно сокращать размерность игры, что в дальнейшем упрощает ее решение. Матричная игра обладает еще одним важным свойством, которое формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 6: Пусть дана матричная игра Γ с матрицей $\|a_{ij}\|$ и с ценой игры V. Тогда оптимальные смешанные стратегии игроков матричной игры Γ^1 с матрицей $b_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, где $\alpha > 0$ и ценой игры $V^1 = \alpha V + \beta$ совпадают с оптимальными смешанными стратегиями игроков в матричной игре Γ.

Доказательство: Пусть $\vec{p}^* = (p^*_1, p^*_2, \ldots, p^*_m)$ и $\vec{q}^* = (q^*_1, q^*_2, \ldots, q^*_n)$ – оптимальные смешанные стратегии в игре Γ игроков A и B, соответственно. Пусть $\vec{x}^* = (x^*_1, \ldots, x^*_m)$ и $\vec{y}^* = (y^*_1, \ldots, y^*_n)$ – оптимальные смешанные стратегии игроков A и B соответственно в игре Γ^1. Тогда, согласно теореме 2, для оптимальности $\vec{p}^*$, $\vec{q}^*$ $\vec{x}^*$, $\vec{y}^*$ необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq V, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \leq V, \ \sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1, \ \sum_{j=1}^{n} q_i^* = 1, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i^* \geq V^1, \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j^* \leq V^1, \ \sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1, \ \sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1. \tag{7}$$

В выражение (7) подставим $b_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta$, тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha a_{ij} + \beta) x_i^* \geq V^1, \sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{ij} + \beta) y_j^* \leq V^1,$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha a_{ij} x_i^* + \sum_{i=1}^{m} \beta x_i^* \geq V^1, \ \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{ij} y_j^* + \sum_{j=1}^{n} \beta y_j^* \leq V^1,$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha a_{ij} x_i^* + \beta \geq V^1, \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{ij} y_j^* + \beta \leq V^1,$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* + \beta \geq V^1, \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* + \beta \leq V^1,$$

так как $\alpha > 0$, получим:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq \frac{V^1 - \beta}{\alpha}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq \frac{V^1 - \beta}{\alpha}.$$

И так как $V = \dfrac{V' - \beta}{\alpha}$, то:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq V, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq V. \tag{8}$$

Таким образом, условие (8) совпадает с (6) и, следовательно:

$$\vec{x}^* = \vec{p}^*, \ \vec{y}^* = \vec{q}^*, \text{ а } V^1 = \alpha V + \beta.$$

Определение: Квадратная платежная матрица $\|a_{ij}\|, i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$ называется *кососимметрической*, если $a_{ij}=-a_{ji}$ для всех i и j, $i\neq j$. Тогда матричная игра называется *симметричной*, если ее матрица кососимметрическая.

Теорема 7: Цена симметричной игры равна 0. Если $\vec{p}^{\,*}$ – оптимальная смешанная стратегия игрока A, то $\vec{q}^{\,*}=\vec{p}^{\,*}$ – также оптимальная стратегия второго игрока B.

Вопрос 5. Методы решения матричных игр. Представление матричной игры как задачи ЛП.

Рассмотрим удобные методы решения матричных игр, а именно метод сведения матричной игры к задаче *линейного программирования* (ЛП), *приближенный итерационный метод* и *графоаналитический метод*.

Рассмотрим первый вариант решения матричной игры размера $m\times n$, сведя ее к задаче ЛП. При этом предполагается, что цена игры положительная, т.е. $V>0$. Это условие не нарушает общности, т.к. согласно теореме 6 всегда можно подобрать такое число β, прибавление которого ко всем элементам платежной матрицы дает матрицу с положительными элементами и, следовательно, с положительным значением цены игры. При этом оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся.

Пусть дана матрица $\|a_{ij}\|$ порядка $m\times n$. Согласно теореме 2 оптимальные смешанные стратегии $\vec{p}^{\,*},\vec{q}^{\,*}$ игроков A и B соответственно должны удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* \geq V,\quad j=\overline{1,n},\qquad \sum_{i=1}^{m} p_i^*=1,\quad p_i^*\geq 0,\ i=\overline{1,m}, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^* \leq V,\quad i=\overline{1,m},\qquad \sum_{j=1}^{n} q_j^*=1,\quad q_j^*\geq 0,\ j=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Разделим все уравнения и неравенства в (9) и (10) на цену игры V ($V>0$) и введем обозначения:

$$\frac{p_i^*}{V}=x_i,\ i=\overline{1,m},\qquad \frac{q_j^*}{V}=y_j,\ j=\overline{1,n},$$

и тогда получим задачи (9) и (10) в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq 1, \quad j=\overline{1,n}, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{V}, \;\; x_i \geq 0, \; i=\overline{1,m}, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq 1, \quad i=\overline{1,m}, \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{V}, \;\; y_j \geq 0, \; j=\overline{1,n}. \tag{12}$$

Поскольку игрок A стремится найти такие значения p_i^* и, следовательно x_i, чтобы цена игры V была максимальной, то решение задачи (11) сводится к нахождению таких неотрицательных значений $x_i \geq 0, \; i=\overline{1,m}$, при которых:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq 1. \tag{13}$$

Поскольку игрок B стремится найти такие значения q_j^* и следовательно y_j, чтобы цена игры V была наименьшей, то решение задачи (12) сводится к нахождению таких неотрицательных значений $y_j \geq 0, \; j=\overline{1,n}$, при которых

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq 1. \tag{14}$$

Формулы (13) и (14) выражают двойственные друг другу задачи линейного программирования, для решения которых можем использовать симплекс-метод.

Решив эти задачи, получим значения $x_i, i=\overline{1,m}$ и $y_j, j=\overline{1,n}$ и V. Тогда смешанные стратегии игроков получим по формулам:

$$p_i^* = Vx_i, \quad i=\overline{1,m}, \quad q_j^* = Vy_j, \quad j=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Второй вариант решения матричной игры с помощью ЛП предполагает, что цена игры V может быть произвольна.

Используем соотношения (9) и (10). Введем дополнительные неотрицательные переменные p_{m+j}^* для j-го неравенства, $(j=1,...,n)$ из (9) и q_{n+i}^* для i-го неравенства, $(i=1,...,m)$ из (10), получим следующие уравнения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* - p_{m+j}{}^* = V, \quad j = \overline{1,n}, \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1, \quad p_i^* \ge 0,\ i = 1,2,...,m+n, \qquad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j{}^* + q_{n+i}{}^* = V, \quad i = \overline{1,m}, \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j{}^* = 1, \quad q_j{}^* \ge 0,\ j = 1,2,...,n+m. \qquad (17)$$

Выделим в (6) первое равенство при $j = 1$ и вычтем его из всех остальных равенств для $j = 2,\ldots,n$, получим:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} p_i^* - p_{m+1}{}^* = V, \qquad (18)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} - a_{i1}) p_i^* - p_{m+j}{}^* + p_{m+1}{}^* = 0, \quad j = 2,...,n, \\ \sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1, \quad p_i^* \ge 0,\ i = 1,2,...,m+n. \end{cases} \qquad (19)$$

Поскольку игрок A стремится максимизировать V за счет своих стратегий, то решение системы (18), (19) сводится к следующей задаче ЛП: найти максимум линейной формы (18) при линейных ограничениях (19). Аналогично поступаем при решении системы (17): выделим в (17) первое равенство при $i = 1$ и вычтем его из всех равенств для $i = 2,\ldots,m$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} q_j{}^* + q_{n+1}{}^* = V, \qquad (20)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - a_{1j}) q_j{}^* - q_{n+1}{}^* + q_{n+i}{}^* = 0, \quad i = 2,...,m, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j{}^* = 1, \quad q_j{}^* \ge 0,\ j = 1,2,...,n+m. \end{cases} \qquad (21)$$

Поскольку игрок B стремится минимизировать V за счет своих стратегий, то решение системы (20), (21) сводится к следующей задаче ЛП: найти минимум линейной формы (20) при линейных ограничениях (21).

Пример 2: Пусть задана матричная игра с матрицей платежей:

$$\left\| a_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Необходимо найти решение игры, сведя предварительно ее к задаче ЛП.

Решение: Найдем чистые нижнюю и верхнюю цены игры, т.е. $\alpha = max(-1, -1, -1, 0) = 0$, $\beta = min(2, 1, 3, 2) = 1$, $0 \le V \le 1$. Так как цена игры V может быть равна 0, то преобразуем исходную матрицу платежей, прибавляя число 2 к каждому элементу матрицы, получим:

$$\left\| a_{ij}^1 \right\| = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad a_{ij}^1 = a_{ij} + 2,\ i, j = \overline{1,4},\ V_1 = V + 2.$$

Составим задачу ЛП, учитывая что $V_1 > 0$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{4} p_i^* a_{ij}^1 \ge V_1,\ j = \overline{1,4}, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} p_i^* = 1, \\ p_i^* \ge 0,\ i = \overline{1,4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{4} q_j^* a_{ij}^1 \le V_1,\ \ i = \overline{1,4}, \\ \sum\limits_{j=1}^{4} q_j^* = 1, \\ q_j^* \ge 0,\ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Введем обозначения, пусть:

$$\frac{p_i^*}{V_1} = x_i,\ i = \overline{1,4},\ \ \frac{q_i^*}{V_1} = y_i,\ j = \overline{1,4},$$

тогда первая и вторая системы преобразуется в соответствующие задачи ЛП.

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = \frac{1}{V_1} \to min,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} a_{ij}^1 x_i \geq 1, \ j = \overline{1,4}, \\ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,4}, \end{cases} \qquad (22)$$

$$\sum_{j=1}^{4} y_j = \frac{1}{V_1} \to max,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{4} a_{ij}^1 y_j \leq 1, \ i = \overline{1,4}, \\ y_j \geq 0, \ j = \overline{1,4}. \end{cases} \qquad (23)$$

Подставим в ограничения задачи (22) конкретные коэффициенты $a_{ij}^1,\ i, j = \overline{1,4}$, получим:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min_{x_1, x_2, x_3, x_4}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 1, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решением задачи (22) будет:

$$x_1 = \tfrac{8}{69},\ x_2 = \tfrac{3}{69},\ x_3 = \tfrac{7}{69},\ x_4 = \tfrac{9}{69},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \tfrac{1}{V_1} \ => V_1 = \tfrac{69}{27} = \tfrac{23}{9}.$$

Из формул (15) получаем:

$$p_1^* = x_1 V_1 = \tfrac{8}{69} \cdot \tfrac{23}{9} = \tfrac{8}{27},$$

$$p_2^* = x_2 V_1 = \tfrac{3}{69} \cdot \tfrac{23}{9} = \tfrac{3}{27},$$

$$p_3^* = x_3 V_1 = \tfrac{7}{69} \cdot \tfrac{23}{9} = \tfrac{7}{27},$$

$$p_4^* = x_4 V_1 = \tfrac{9}{69} \cdot \tfrac{23}{9} = \tfrac{9}{27}.$$

Подставим в ограничения задачи (23) конкретные коэффициенты $a_{ij}^1,\ i, j=\overline{1,4}$, получим:

$$
y_1+y_2+y_3+y_4 \to \max_{y_1,y_2,y_3,y_4},
$$
$$
\begin{cases}
2y_1+3y_2+y_3+4y_4 \le 1,\\
y_1+2y_2+5y_3+4y_4 \le 1,\\
2y_1+3y_2+4y_3+y_4 \le 1,\\
4y_1+2y_2+2y_3+2y_4 \le 1,\\
y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0.
\end{cases}
$$

Решением задачи (23) будет: $y_1=\frac{5}{46}$, $y_2=\frac{7}{46}$, $y_3=\frac{3}{46}$, $y_4=\frac{3}{46}$ или:

$$
q_1^*=y_1V_1=\frac{5}{46}\cdot\frac{23}{9}=\frac{5}{18};
$$
$$
q_2^*=y_2V_1=\frac{7}{46}\cdot\frac{23}{9}=\frac{7}{18};
$$
$$
q_3^*=q_4^*=y_3V_1=\frac{3}{46}\cdot\frac{23}{9}=\frac{3}{18}.
$$

И так, $\vec{p}^*=\left(\frac{8}{27}, \frac{3}{27}, \frac{7}{27}, \frac{9}{27}\right)$, $\vec{q}^*=\left(\frac{5}{18}, \frac{7}{18}, \frac{3}{18}, \frac{3}{18}\right)$,

$V=V_1-2=\frac{23}{9}-2=\frac{23-18}{9}=\frac{5}{9}$ – цена игры.

Решим эту же задачу, используя второй подход к построению задачи ЛП, считая, что цена игры V – произвольная, и возьмем исходную матрицу платежей.

Для этого построим системы:

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{4} p_i^* a_{ij} - p_{4+j}^* = V,\ j=\overline{1,4},\\
\sum_{i=1}^{4} p_i^* = 1,\\
p_i^* \ge 0,\ i=\overline{1,4},
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{4} q_j^* a_{ij} + q_{4+i}^* = V_1,\ i=\overline{1,4},\\
\sum_{j=1}^{4} q_j^* = 1,\\
q_j^* \ge 0,\ j=\overline{1,4}.
\end{cases}
$$

Задаваясь конкретными значениями для первой системы, получим систему:

$$\begin{cases} \quad - p_2^* \quad + 2p_4^* \quad - p_5^* = V, \\ p_1^* \quad + \; p_3^* \quad - p_6^* = V, \\ - p_1^* + 3p_2^* + 2p_3^* \quad - p_7^* = V, \\ 2p_1^* + 2p_2^* - \; p_3^* \quad - p_8^* = V, \; j = 1,2,3,4, \end{cases}$$
$$p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = 1,$$
$$p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*, p_5^*, p_6^*, p_7^*, p_8^* \geq 0.$$

Выделим первое равенство и вычтем его из всех остальных $j = \overline{2,4}$, получим:

$$\begin{cases} - p_2^* + 2p_4^* - p_5^* = V \to \max\limits_{p_i^*, i=\overline{1,8}}, \\ p_1^* + p_2^* \; + \; p_3^* - 2p_4^* - p_6^* + p_5^* = 0, \\ - p_1^* + 4p_2^* + 2p_3^* - 2p_4^* - p_7^* + p_5^* = 0, \\ 2p_1^* + 3p_2^* - \; p_3^* - 2p_4^* - p_8^* + p_5^* = 0, \\ p_i^* \geq 0, \; i = \overline{1,8}. \end{cases}$$

Аналогично поступаем со второй системой, получим:

$$\begin{cases} \quad q_2^* - \; q_3^* + 2q_4^* \; + q_5^* = V, \\ - q_1^* \quad + 3q_3^* + 2q_4^* + q_6^* = V, \\ \quad q_2^* + 2q_3^* - \; q_4^* \; + q_7^* = V, \\ 2q_1^* \quad + q_8^* = V, \; i = 1,2,3,4, \end{cases}$$
$$q_1^* + q_2^* + q_3^* + q_4^* = 1,$$
$$q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*, q_5^*, q_6^*, q_7^*, q_8^* \geq 0.$$

Выделим первое равенство и вычтем его из всех остальных $i = \overline{2,4}$ равенств, получим:

$$\begin{cases} q_2^* - q_3^* + 2q_4^* + q_5^* = V \to \min\limits_{q_j^*,\, j=\overline{1,8}}, \\ -q_1^* + q_2^* + 4q_3^* \qquad + q_6^* - q_5^* = 0, \\ \qquad 3q_3^* - 3q_4^* + q_7^* - q_5^* = 0, \\ 2q_1^* - q_2^* + q_3^* - 2q_4^* + q_8^* - q_5^* = 0, \\ q_j^* \geq 0,\ j = \overline{1,8}. \end{cases}$$

Решаем системы относительно неизвестных значений $\vec{p}$ и $\vec{q}$, окончательно получим решение матричной игры:

$$\vec{p}^* = \left(\frac{8}{27}, \frac{3}{27}, \frac{7}{27}, \frac{9}{27}, 0, 0, \frac{12}{27}, 0\right),\ \vec{q}^* = \left(\frac{5}{18}, \frac{7}{18}, \frac{3}{18}, \frac{3}{18}, \frac{11}{18}, 0, 0, \frac{7}{18}\right), V = \frac{5}{9}.$$

Вопрос 6. Итерационный метод Брауна.

При исследовании матричных игр, часто возникают ситуации, когда нет необходимости в получении точного решения игры или вследствие каких-либо причин найти точное значение цены игры и оптимальных смешанных стратегий невозможно или очень трудно. Тогда можно воспользоваться приближенными методами решения матричной игры.

Рассмотрим итерационный (пошаговый) метод Брауна последовательного приближения цены игры. Сущность метода Брауна состоит в следующем: мысленно игра проводится много раз, т.е. последовательно, в каждой партии игры каждый игрок выбирает ту стратегию, которая дает ему наибольший общий суммарный выигрыш. Другими словами, каждый игрок выбирает такую последовательность своих чистых стратегий, которая обеспечивает игроку A максимальный средний выигрыш, а игроку B − минимальный средний проигрыш.

После реализации k партий вычисляется среднее значение выигрыша игрока A, проигрыша игрока B, и их среднее арифметическое принимается за приближенное значение V. Метод дает возможность найти приближенно значение смешанных стратегий игроков. Стремление приближенных значений к истинным значениям происходит медленно.

Пример 3: Пусть игра задана матрицей платежей:

$$\left\| a_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть вектора $\vec{X},\vec{Y}$, вектора, компоненты которых есть абсолютные частоты применения стратегий, соответственно игроков A и B.

Перед началом игры $\vec{X}^{(0)}=\left(0,0,0\right),\ \vec{Y}^{(0)}=(0,0,0),\ k=0$.

Пусть игрок B выбрал свою $j=1$ стратегию (B_1), тогда игрок A должен выбрать такую стратегию i, которая дала бы ему максимальный выигрыш при $j=1$. Этой стратегией будет $i=2$ (A_2). Таким образом, после первой партии: $k=1,\ \vec{X}^{(1)}=(0,1,0);\ \vec{Y}^{(1)}=(1,0,0)$. Далее, игрок B, зная, что первый игрок A выбрал стратегию A_2, выбирает свою стратегию B_j так, чтобы получить минимальный проигрыш, т.е. B_2. Затем игрок A выбирает стратегию A_1, на основании информации о ходе игрока B, следовательно, после второй партии: $k=2,\ \vec{X}^{(2)}=(1,1,0);\ \vec{Y}^{(2)}=(1,1,0)$ и т.д.

После розыгрыша n партий мы получаем вектора $k=n,\ \vec{X}^{(n)}=(x_1,x_2,x_3);\ \vec{Y}^{(n)}=(y_1,y_2,y_3)$, где x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 – абсолютные частоты применения своих чистых стратегий, соответственно игроков A и B. Вычисляем оптимальные смешанные стратегии игроков: $\vec{p}^*=\frac{1}{n}\vec{X}^{(n)}=\left(\frac{x_1}{n},\frac{x_2}{n},\frac{x_3}{n}\right),\ \vec{q}^*=\frac{1}{n}\vec{Y}^{(n)}=\left(\frac{y_1}{n},\frac{y_2}{n},\frac{y_3}{n}\right)$ и цену игры по формуле:

$$V=\frac{\min\limits_j\left(\vec{p}^*A\right)+\max\limits_i\left(A\vec{q}^{*T}\right)}{2}. \qquad (24)$$

Пусть n=1000, тогда получаем, что оптимальные смешанные стратеги игроков A и B, соответственно, равны:

$$\vec{p}^*=\frac{1}{1000}\left(500,\quad 500,\quad 0\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ 0\right),$$

$$\vec{q}^*=\frac{1}{1000}\left(500,\quad 500,\quad 0\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ 0\right).$$

Найдем произведение матриц $\vec{p}^*\cdot A$ и $A\cdot\vec{q}^{*T}$, получим:

$$\vec{p}^* \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0}{2} + \frac{4}{2} + 0 \cdot 1 & \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 & \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1{,}5 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot \vec{q}^{\,*T} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0}{2} + \frac{3}{2} + 1 \cdot 0 \\ \frac{4}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{0}{2} + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 2{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

В конце концов, цена игры будет равна:

$$V = \frac{\min_j (2,\ 2,\ 1{,}5) + \max_i (1{,}5,\ 2{,}5,\ 0{,}5)}{2} = \frac{1{,}5 + 2{,}5}{2} = 2$$

Вопрос 7. Графоаналитический метод решения матричных игр размерами 2х2, 3хn, mх2.

Для применения предлагаемого метода необходимо сформулировать следующую теорему и определение.

Теорема об активных стратегиях игроков: Если один из игроков принимает свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш не изменится и будет равен цене игры V вне зависимости, какую стратегию применяет другой игрок в пределах своих активных стратегий.

Определение: Стратегии игрока, которые применяются с вероятностью больше 0, называются *активными*.

I. Аналитический метод решения матричных игр размером 2х2.

Пусть платежная матрица $\|a_{ij}\|$ игры имеет размер 2×2, т.е.

$$\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если $\alpha = \beta$, то решение найдено в чистых стратегиях. Если $\alpha < \beta$, то будем искать $\vec{p}^*, \vec{q}^*$ − смешанные стратегии игроков и цену игры V.

На основании теоремы об активных стратегиях для игрока A, применяющего оптимальную смешанную стратегию $\vec{p}^*$ и игрока B, применяющего свою чистую стратегию $\vec{q}^* = (1;0)$, цена игры будет такая же V, поэтому:

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = V.$$

Для случая, когда A принимает стратегию $\vec{p}^*$, а игрок B принимает свою чистую стратегию $\vec{q}^* = (0;1)$, цена игры будет тоже V, поэтому:

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = V.$$

Добавим условие $p_1^* + p_2^* = 1$.

Получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = V, \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = V, \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases} \qquad (25)$$

Решением игры 2×2 будут выражения:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}; \quad p_2^* = 1 - p_1^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}, \qquad (26)$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}. \qquad (27)$$

Аналогично рассуждая, можно получить систему уравнений для нахождения оптимальной смешанной стратегии игрока B и цену игры.

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = V, \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = V, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases}$$

$$q_1^* = \frac{V - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \; q_2^* = 1 - \frac{V - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{a_{11} - V}{a_{11} - a_{12}}, \text{ при } a_{11} \neq a_{12} \qquad (28)$$

Таким образом, задача решена, так как найдены векторы $q^* = (q_1, q_2)$, $p = (p_1, p_2)$ и цена игры V.

Пример 4: Рассмотрим матричную игру $\left\|a_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Найдем ее решение и дадим геометрическую интерпретацию этого решения.

Нижняя цена игры не совпадает с верхней ценой $\alpha = \max(2, 4) = 4,\ \beta = \min(6, 5) = 5,\ \alpha \neq \beta \ \Rightarrow\ 4 \le V \le 5$, поэтому седловой точки не существует и необходимо искать решение в смешанных стратегиях. Построим системы уравнений и решим их.

$$\begin{cases} 2p_1^* + 6p_2^* = V, \\ 5p_1^* + 4p_2^* = V, \\ p_1^* + p_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow p_1^* = 2/5;\ p_2^* = 3/5;\ V = 22/5\ ,$$

$$\begin{cases} 2q_1^* + 5q_2^* = 22/5, \\ 6q_1^* + 4q_2^* = 22/5, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases} \Rightarrow q_1^* = 1/5;\ q_2^* = 4/5$$

Дадим геометрическую интерпретацию игры. Введем на плоскости POQ систему координат и на оси OP отложим отрезок A_1A_2 единичной длины, каждой точке которого поставим в соответствие стратегию $(p_1^*, 1 - p_1^*)$ игрока A.

Пусть точке $A_1(0;0)$ отвечает стратегия $i = 1$, а точке $A_2(1;0)$ – стратегия $i = 2$.

В точках A_1 и A_2 проводим перпендикуляры I и II $\| OQ$ и будем на них откладывать выигрыши игроков (см. рис. 2).

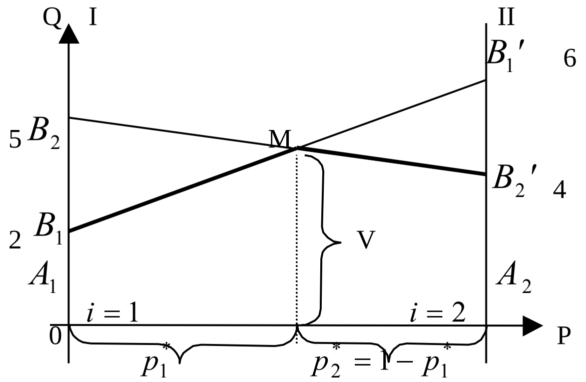


Рис. 2

На перпендикуляре I отложим выигрыши игрока A при стратегии $i = 1$, а на перпендикуляре II отложим выигрыши игрока A при стратегии $i = 2$.

Если A применит стратегию $i=1$, то его выигрыш при стратегии $j=1$ игрока B равен 2 (точка B_1); при стратегии $j=2$ игрока B выигрыш игрока A равен 5 (точка B_2).

Если же игрок A применяет стратегию $i=2$, то его выигрыш равен 6 (точка B_1') при выборе стратегии $j=1$ игрока B и 4 (точка B_2') при $j=2$. Соединяя между собою точки B_1 и B_1', а также B_2 и B_2' получим две прямые, расстояние до которых от оси OP определяет средний выигрыш игроков A и B при любом сочетании соответствующих стратегий. Ординаты точек, принадлежащих ломаной B_1MB_2' определяют минимальный выигрыш игрока A при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке M, следовательно, этой точке соответствует оптимальная смешанная стратегия $\overline{p}^* = (p_1^*, p_2^*)$.

Ломаная B_2MB_1' определяет максимальные проигрыши игрока B, минимум этих проигрышей находится также в точке M, следовательно, M − седловая точка.

Предлагаем читателям познакомиться с программной реализацией графоаналитического метода в среде математического пакета «Mathematica 3.0». Текст программы и небольшая справка по ее использованию находится в приложении 1.

II. Решения матричных игр размерами 2xn, nx2.

Пример 5: Найдем решение игры $\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Нижняя и верхняя цена игры определяются как $\alpha = 7,\ \beta = 9$. Так как $\alpha \neq \beta$, то решение будем искать в смешанных стратегиях. Выделим активные стратегии игрока B, решив игру графоаналитическим методом (см. рис. 3).

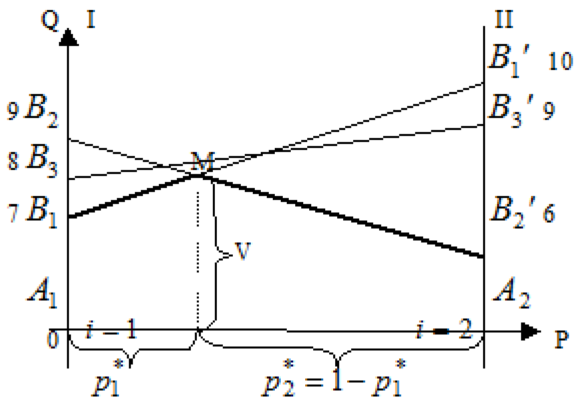


Рис. 3

Построим системы уравнений для игры $\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ и решим их.

Для игрока A:

$$\begin{cases} 7p_1^* + 10p_2^* = V, \\ 9p_1^* + 6p_2^* = V, \\ p_1^* + p_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2p_1^* + 2p_2^* = 0 \\ p_1^* + p_2^* = 1, \Rightarrow p_1^* = 1 - p_2^* \end{cases},$$

$$-1 + p_2^* + 2p_2^* = 0 \Rightarrow p_2^* = \tfrac{1}{3};\ p_1^* = \tfrac{2}{3};\ V = 8.$$

Для игрока B:

$$\begin{cases} 7q_1^* + 9q_2^* = V, \\ 10q_1^* + 6q_2^* = V, \\ q_1^* + q_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3q_1^* + 3q_2^* = 0, \\ q_1^* + q_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1^* = q_2^*, \\ q_1^* + q_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1^* = \tfrac{1}{2}, \\ q_2^* = \tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, $p_1^* = (\tfrac{2}{3}; \tfrac{1}{3}),\ q_2^* = (\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}; 0),\ V = 8.$

Пример 6: Найдем решение игры $\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Нижняя и верхняя цена игры определяются как $\alpha = 5,\ \beta = 6$. Так как $\alpha \neq \beta$, то решение будем искать в смешанных стратегиях. Выделим активные стратегии игрока A, решив игру графоаналитическим методом с позиции игрока B (см. рис. 4).

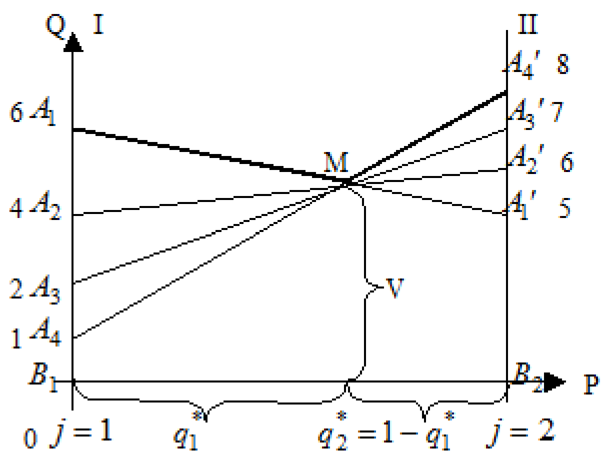


Рис. 4

Построим системы уравнений для игры $\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ и решим их.

$$\begin{cases} 6q_1^* + 5q_2^* = V, \\ q_1^* + 8q_2^* = V, \\ q_1^* + q_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - q_2^* = V, \\ 1 + 7q_2^* = V, \\ q_1^* = 1 - q_2^*, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2^* = 6 - V, \\ 7q_2^* = V - 1, \\ q_1^* = 1 - q_2^*, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8q_2^* = 5, \\ q_1^* = 1 - q_2^*, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2^* = 5/8, \\ q_1^* = 3/8 \end{cases} V = 43/8.$$

$$\begin{cases} 6p_1^* + p_4^* = 43/8, \\ 5p_1^* + 8p_4^* = 43/8, \\ p_1^* + p_4^* = 1, \end{cases} p_1^* = 7/8; p_4^* = 1/8.$$

Итак: $\vec{p}^* = (7/8, 0, 0, 1/8)$, $\vec{q}^* = (3/8, 5/8)$, $V = 43/8$.

<u>*Вывод:*</u> Каждая игра размером $m \times n$ имеет решение в смешанных стратегиях, которое содержит число активных стратегий, не превышающее наименьшего из чисел m и n. Этот вывод позволяет любую из игр $m \times 2$, $n \times 2$ свести к тривиальной игре 2×2.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется конфликтной ситуацией?
2. Как распределяется выигрыш между игроками в матричной игре с нулевой суммой выигрыша?
3. Что характеризует цена игры V?
4. Всегда ли в матричных играх выполняется правило − если у игрока А имеется чистая стратегия поведения, то и у игрока В также всегда найдется чистая стратегия?
5. Что характеризует $a_{32} = -3$ матрицы платежей для каждого из игроков А и В?
6. Справедливо ли неравенство $\beta > \alpha$?
7. Может ли конечная матричная игра с 0 суммой выигрыша не иметь решений?
8. Определите, какой из заданных векторов соответствует смешанной (чистой) стратегии игрока А:
$\vec{p}_1 = (0,4;\ 0;0,6)$, $\vec{p}_2 = (1;0;0)$, $\vec{p}_3 = (0;1/2;0;1/6;1/3)$?
9. Запишите систему уравнений относительно игрока В матричной игры размерностью 2×2.
10. Графоаналитический метод решения игры размерностью $2 \times n$.

11. Графоаналитический метод решения игры размерностью $m \times 2$.

12. В чем заключаются отличия аналитических методов решения матричных игр от итерационного метода Брауна?

13. Какие условия накладываются на модель игры в виде задачи линейного программирования?

14. Определите какие стратегии игрока В являются активными, если задан $\vec{q} = (0;1/2;0;1/4;1/4)$?

15. Определите максимально возможное число активных стратегий в игре размерностью 5×7?

Литература по теме:

Основная литература:

1. Колобашкина Л.В. Основы теории игр. М.: БИНОМ. 2014г.

2. Невежин В.П. Теория Игр. Примеры и задачи. М.: Форум, 2012г.

3. Шикин Е.В. От игр к играм. Математическое введение. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.

Дополнительная литература:

1. Бусыгин В.П., Коковин С.Г., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. Микроэкономический анализ несовершенных рынков. (2000) Новосибирск.

2. Васин А.А. Морозов В.В. Теория игр и модели экономики. − М.; МАКС Пресс, 2005.

3. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. − М.; Наука, 1985.

4. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. − М.; Наука, 1981.

5. Мандель М.Д. Кластерный анализ, М.: Финансы и статистика, 1988.

6. Петросян Л. А. Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов. - М., Книжный дом «Университет», 1998.

7. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие для студентов вузов специальностей «Прикладная математика» и «Экономическая кибернетика»/ И.М. Макаров, Т.М. Виноградский и др. – М.: Наука, 1982. с.

Интернет-ресурсы:

1. Курс дистанционного обучения по теории игр Высшей школы экономики. // https://www.coursera.org/course/gt.

2. Он-лайн калькулятор решения задач по теории игр. // http://math.semestr.ru/games/mat.php.

Тема 2. Биматричные игры

Цели и задачи изучения темы:

- ознакомление с математической моделью биматричных игр;
- дать представление об отношениях доминирования и ситуации равновесия в биматричных играх;
- познакомить с основными методами решения биматричных игр.

Успешно изучив тему, Вы:

Будете знать:

- описание математической модели биматричных игр;
- основные критерии отношений доминирования в биматричных игр;
- алгоритм определения ситуации равновесия;
- методы решения биматричных игр 2×2.

Будете уметь:

- строить модели биматричных игр и получать возможные результаты игры до ее фактического начала;
- сокращать размерность задачи с помощью отношения доминирования;
- определять ситуацию равновесия при принятии решений в неантогонистических конфликтах.

Вопросы темы:

1. Описание биматричных игровых задач. Теорема Нэша.
2. Отношения доминирования в биматричных играх.
3. Графоаналитический способ решения биматричных задач 2х2.

Вопрос 1. Описание биматричных игровых задач. Теорема Нэша.

Теория антагонистических игр применима лишь в тех случаях, когда можно определить общий критерий эффективности для двух конкурирующих сторон, одна из которых заинтересована в увеличении, а другая в уменьшении значения этого критерия. Однако значительно чаще встречаются ситуации, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но уже не обязательно являются противоположными.

Если для оценки действий каждой стороны необходимо определить отдельный критерий эффективности, игра имеет ненулевую сумму. В случае, когда участников конфликта — два, и критерии для конфликтующих сторон различны, ситуация описывается в классе биматричных игровых задач.

Биматричной называется конечная бескоалиционная игра двух лиц.

Биматричная игра описывается матрицами выигрышей конфликтующих сторон.

Рассмотрим, например, конфликтную ситуацию, в которой каждый из двух участников имеет следующие возможности для выбора своей линии поведения:

- игрок А — может выбрать любую из стратегий $A_1, \dots, Am$,
- игрок В — любую из стратегий $B_1, \dots, Bn$.

При этом всякий раз их совместный выбор оценивается вполне определенно: если игрок А выбрал i-ю стратегию Ai, а игрок В — j-ю стратегию Bj, то в итоге выигрыш игрока А будет равен некоторому числу a_{ij} а выигрыш игрока В — некоторому другому числу bij. Иными словами, всякий раз каждый из игроков получает свой приз.

Последовательно перебирая все стратегии игрока А и все стратегии игрока В, мы можем заполнить их выигрышами две таблицы:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & \dots & B_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} \end{array}; \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & \dots & B_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} \end{array}.$$

Пусть, к примеру, игрок А выбрал i-ю стратегию Ai, а игрок В — j-ю стратегию Bj, тогда выигрыши игроков в данной ситуации будут находиться в соответствующих платежных матрицах на пересечении i-той строки и j-того столбца. Элементы матриц, имеющие знак «минус», означают величину проигрыша игрока в соответствующей ситуации.

Замечание: Рассмотренные ранее матричные игры можно отнести и к биматричным, где матрица выплат игроку В противоположна матрице выплат игроку А:

$$b_{ij} = - a_{ij}$$

Ранее мы рассмотрели примеры построения модели биматричных игр:

- «Дилемма заключенных»;
- «Семейный спор»;
- «Студент преподаватель».

Перейдем к нахождению решения биматричных игр.

Вследствие того, что интересы игроков не совпадают, нам нужно построить такое (компромиссное) решение, которое бы в том или ином, но в одинаковом смысле удовлетворяло обоих игроков. Иначе говоря, попробуем найти некую равновесную ситуацию, явное отклонение от которой уменьшает выигрыш игрока.

При рассмотрении матричных игр понятие равновесной ситуации приводило нас к поиску седловой точки, которая существует далеко не всегда, если ограничиваться только чистыми стратегиями игроков А и В, т. е. стратегиями $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$.

Естественно ожидать, что в более сложном случае биматричной игры дело вряд ли будет обстоять проще. В матричных играх эта трудность была преодолена путем перехода к смешанным стратегиям, т. е. к такому поведению игроков, при котором они чередуют (свои собственные чистые) стратегии $A_1,\dots, A_m, B_1,\dots, B_n$.: игрок А — стратегии $A_1,\dots, A_m$ с определенными частотами $p = (p_1, \dots p_m)$:. $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, а игрок В — стратегии $B_1,\dots, Bn$ с определенными частотами:

$$q = (q_1, \dots, q_n) \ \sum_{j=1}^{n} q_i = 1$$

По теореме Неймана в смешанных стратегиях равновесная ситуация существует всегда. Иными словами, любая матричная игра в смешанных стратегиях разрешима.

Поэтому, рассматривая здесь биматричные игры, разумно сразу же перейти к смешанным стратегиям игроков. Тем самым мы предполагаем, что каждая игра может быть повторена в неизменных обстоятельствах многократно.

Средние выигрыши игроков А и В, вычисляются по правилам, в которых уже нет никакой дискриминации игрока В:

$$H_A = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* q_j^* = \vec{p}^{\,*} A \vec{q}^{\,*T} \qquad H_B = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i^* q_j^* = \vec{p}^{\,*T} B \vec{q}\,* \tag{29}$$

и смешанные стратегии игроков должны удовлетворять условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \tag{30}$$

Далее возникает естественный вопрос: всегда ли в биматричной игре существует равновесная ситуация (т. е. такая ситуация, отклонение от которой любого из игроков может лишь привести к уменьшению его выигрыша при условии, что второй игрок сохраняет свой выбор)? Ответ на этот вопрос дает теорема Нэша.

Теорема Нэша (основная теорема биматричных игр).

Каждая биматричная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия, возможно, в смешанных стратегиях.

Для определения ситуации равновесия необходимо решить систему неравенств (29), относительно $(\vec{p}, \vec{q})$ при условиях нормировки (30).

Вопрос 2. Отношения доминирования в биматричных играх.

Прежде чем приступить к определению ситуации равновесия в биматричной игровой задаче, необходимо по возможности сократить размерность задачи. Для этого заведомо невыгодные стратегии удаляют, применяя отношения доминирования.

Отношения доминирования в биматричной игре отличаются от отношений доминирования в антагонистической игре и базируются на исходных данных задачи (какие матрицы предлагаются для решения — выигрышей или проигрышей) и на критериях задачи.

Среди наиболее часто встречающихся критериев можно выделить следующие.

1. Заданы матрицы выигрышей сторон А и В. Применить отношения доминирования, если:

а) сторона А хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш стороны В;

б) сторона В хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш стороны А;

в) каждая из сторон хочет максимизировать свой выигрыш;

г) каждая из сторон хочет минимизировать выигрыш противника.

2. Заданы матрицы проигрышей сторон А и В. Применить отношения доминирования, если:

а) сторона А хочет минимизировать свой проигрыш и максимизировать проигрыш стороны В;

б) сторона В хочет минимизировать свой проигрыш и максимизировать проигрыш стороны А;

в) каждая из сторон хочет минимизировать свой проигрыш;

г) каждая из сторон хочет максимизировать проигрыш противника.

Рассмотрим алгоритмы упрощения некоторых игровых задач с использованием приведенных критериев.

Алгоритм упрощения задачи 1.а.

Сначала рассмотрим первый критерий задачи 1.а по редуцированию (уменьшению) размерности — сторона А хочет максимизировать свой выигрыш.

1. Определяем, с какой матрицей будем работать. Поскольку речь идет о выигрышах стороны А, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные выигрыши, т. е. матрицу А.

2. Активной (или действующей) в данном критерии является сторона А, следовательно, управлять она может только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются по строкам. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих строк.

3. Так как сторона А хочет максимизировать свой выигрыш, те свои стратегии, которые содержат меньший выигрыш, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы А подлежат доминируемые строки согласно условию: если $aik < ajk$ для любого к = 1,…n, стратегия Ai не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы А.

4. Поскольку сторона А отказалась от использования своей стратегии Ai соответствующая ей строка удаляется также и из матрицы **В**, независимо от ее элементов.

Теперь перейдем ко второму критерию задачи **1.а — сторона А хочет минимизировать выигрыш стороны В.**

1. Поскольку речь идет о выигрышах стороны В, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные выигрыши, т. е. матрицу В.

2. Активной (или действующей) в данном критерии является сторона А, следовательно, управлять она может только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются по строкам. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих строк.

3. В связи с тем что сторона А хочет минимизировать выигрыш стороны В, те свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для противника, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы В подлежат доминирующие строки согласно условию: если bik > bjk для любого к =1,..., n, стратегия А{ не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы В.

4. Поскольку сторона А отказалась от использования своей стратегии Ал соответствующая ей строка удаляется также и из матрицы А, независимо от ее элементов.

Пример 7. (упрощение задачи 1.а). Заданы матрицы выигрышей сторон А и В:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \end{array}; \quad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \end{array}.$$

Требуется уменьшить размерность задачи за счет исключения заведомо невыгодных стратегий с помощью отношений доминирования при условии, что сторона А хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш стороны В.

Решение. Рассмотрим первый критерий задачи — сторона А хочет максимизировать свой выигрыш.

По этому критерию из матрицы А удаляются доминируемые строки. При сравнении выигрышей при стратегиях A_2 и A_4 видно, что все элементы 4-й строки больше соответствующих элементов 2-й строки, следовательно, из матрицы А удаляется 2-я строка. Автоматически удаляется 2-я строка и из матрицы В.

Таким образом, после применения первого критерия матрицы выигрышей выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \end{array}; \quad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \end{array}.$$

Рассмотрим второй критерий — сторона А хочет минимизировать выигрыш стороны В.

По данному критерию из матрицы В удаляются доминирующие строки. Строка, соответствующая стратегии A_3, является доминирующей по отношению к строке, соответствующей стратегии A_1 и удаляется из матрицы В.

Соответственно из матрицы А также удаляется строка, соответствующая стратегии A_3.

Таким образом, после применения отношений доминирования матрицы выигрышей принимают следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_4 \end{array} \end{array}; \quad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_4 \end{array} \end{array}.$$

Алгоритм упрощения задачи 1.г.

Сначала рассмотрим первый критерий задачи 1.г — сторона А хочет минимизировать выигрыш стороны В.

1. Так как речь идет о выигрышах стороны В, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные выигрыши, т. е. матрицу В.

2. Активной (или действующей) в данном критерии является сторона А, следовательно, управлять она может только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются по строкам. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих строк.

3. Так как сторона А хочет минимизировать выигрыш стороны В, те свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для противника, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы В подлежат доминирующие строки согласно условию: если $bik > bjk$ стратегия Ai не используется и соответствующая строка удаляется из матрицы В.

4. Поскольку сторона А отказалась от использования своей стратегии Ai соответствующая ей строка удаляется также и из матрицы А, независимо от ее элементов.

Теперь перейдем ко второму критерию задачи — **сторона В хочет минимизировать выигрыш стороны А.**

1. Так как речь идет о выигрышах стороны А, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные выигрыши, т. е. матрицу А.

2. Активной в данном критерии является сторона В. Следовательно, управлять она может только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются по столбцам. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих столбцов.

3. Поскольку сторона В хочет минимизировать выигрыш стороны А, те свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для противника, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы А подлежат доминирующие столбцы согласно условию: если $ajk > ajl$, стратегия $Bк$ не используется и соответствующий ей столбец удаляется из матрицы А.

4. В связи с тем, что сторона В отказалась от использования своей стратегии $Bк$, соответствующий ей столбец автоматически удаляется также и из матрицы В, независимо от ее элементов.

Пример 8.(упрощение задачи 1.г.). Заданы матрицы выигрышей сторон А и В:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}; \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}.$$

Требуется сократить размерность задачи за счет исключения заведомо невыгодных стратегий с помощью отношений доминирования при условии, что каждая из сторон хочет минимизировать выигрыш противника.

Решение. Рассмотрим первый критерий задачи — сторона А хочет минимизировать выигрыш стороны В.

По этому критерию из матрицы В удаляются доминирующие строки. При сравнении выигрышей при стратегиях A_1 и A_3 видно, что все элементы 3-й строки больше соответствующих элементов 1-й строки, следовательно, из матрицы В удаляется 3-я строка. Автоматически удаляется 3-я строка и из матрицы А. Таким образом, после применения первого критерия матрицы выигрышей выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}; \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

Перейдем ко второму критерию — сторона В хочет минимизировать выигрыш стороны А.

По данному критерию из матрицы А удаляются доминирующие столбцы. Столбец B_1 является доминирующим по отношению к столбцу B_3 и удаляется из матрицы. Соответственно, из матрицы В также удаляется первый столбец.

Таким образом, после применения отношений доминирования матрицы выигрышей принимают следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}; \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

Алгоритм упрощения задачи 2.г.

Рассмотрим первый критерий **задачи 2.г — сторона А хочет максимизировать проигрыш стороны В.**

1. Поскольку речь идет о проигрышах стороны В, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные проигрыши, т. е. матрицу В.

2. Активной (или действующей) в данном критерии является сторона А, следовательно, управлять она может только своими стратегиями, проигрыши при которых располагаются по строкам. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих строк.

3. Так как сторона А хочет максимизировать проигрыш стороны В, те свои стратегии, которые содержат меньший проигрыш для противника, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы В подлежат доминируемые строки согласно условию: если $b_{ik} < b_{jk}$ для любого к =1,..., n, стратегия A_i не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы В.

4. Поскольку сторона А отказалась от использования своей стратегии A_i, соответствующая ей строка удаляется также и из матрицы А, независимо от ее элементов.

Рассмотрим второй критерий задачи — **сторона В хочет максимизировать проигрыш стороны А.**

1. Так как речь идет о проигрышах стороны А, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные проигрыши, т. е. матрицу А.

2. Активной в данном критерии является сторона В. Следовательно, управлять она может только своими стратегиями, проигрыши при которых располагаются по столбцам. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих столбцов.

3. Поскольку сторона В хочет максимизировать проигрыш стороны А, те свои стратегии, которые содержат меньший проигрыш для противника, она применять не будет.

Таким образом, удалению из матрицы А подлежат доминируемые столбцы согласно условию: если $a_{jl} > a_{jk}$ для j =1,..., m, стратегия B_k не используется и соответствующий столбец удаляется из матрицы А.

4. В связи с тем что сторона В отказалась от использования своей стратегии B_k соответствующий ей столбец автоматически удаляется также и из матрицы В, независимо от ее элементов.

5. Поскольку алгоритмы определения оптимальных стратегий в качестве исходных данных предполагают наличие матриц выигрыша, переходим к матрицам выигрыша, полагая, что проигрыш противника есть наш выигрыш. Другими словами, меняем матрицы местами.

Пример 9. (упрощение задачи 2.г). Заданы матрицы проигрышей сторон А и В:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}; \quad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}.$$

Требуется сократить размерность задачи за счет исключения заведомо невыгодных стратегий с помощью отношений доминирования при условии, что каждая из сторон хочет максимизировать проигрыш противника.

Решение. Рассмотрим первый критерий задачи — сторона А хочет максимизировать проигрыш стороны В.

По этому критерию из матрицы В удаляются доминируемые строки. При сравнении проигрышей при стратегиях A_1 и A_3 видно, что все элементы 1 -й строки меньше соответствующих элементов 3-й строки, следовательно, из матрицы В удаляется 1-я строка. Автоматически удаляется 1-я строка и из матрицы А.

Таким образом, после применения первого критерия матрицы проигрышей выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \end{array}; \quad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \end{array}.$$

Перейдем к рассмотрению второго критерия — сторона В хочет максимизировать проигрыш стороны А.

По данному критерию из матрицы А удаляются доминируемые столбцы. Столбец B_2 является доминируемым по **отношению** к столбцу B_3 и удаляется из матрицы. Соответственно, из матрицы В также удаляется второй столбец.

Таким образом, после применения отношений доминирования матрицы проигрышей принимают следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \end{array}; \quad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \end{array}.$$

Далее переходим к матрицам выигрыша: матрицей A становится матрица B, а матрицей B становится матрица A.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array}; \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array}.$$

Вопрос 3. Графоаналитический способ решения биматричных задач 2х2.

Предположим, что заведомо невыгодные стратегии из матриц игры удалены, следовательно, можно приступить к определению ситуации равновесия.

Пусть каждый игрок имеет по две стратегии. В этом случае матрицы A и B будут следующие:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Вероятности:

$$p_1 = p,\ p_2 = 1 - p,\ q_1 = q,\ q_2 = 1 - q$$

а средние выигрыши вычисляются по формулам:

$$H_A = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* q_j^* = \vec{p}^{\,*} A \vec{q}^{\,*T} \quad H_B = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i^* q_j^* = \vec{p}^{\,*T} B \vec{q}\,*$$

Или

$$H_A(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q),$$

$$H_B(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q),$$

$$\text{где } 0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1\ .$$

Сформулируем основное определение:

Определение.

Будем говорить, что пара чисел (p^*,q^*), $0 \le p^* \le 1$, $0 \le q^* \le 1$ определяет равновесную ситуацию, если для любых p и q, подчиненных условиям $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$, одновременно выполнены следующие неравенства:

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*) \qquad H_B(p,q^*) \le H_B(p^*,q^*) \tag{31}$$

Неравенства (31) означают следующее: ситуация, определяемая смешанной стратегией (p^*,q^*), является равновесной, если отклонение от нее одного из игроков при условии, что другой сохраняет свой выбор, приводит к уменьшению выигрыша первого. Тем самым получается, что если равновесная ситуация существует, то отклонение от нее невыгодно самому игроку.

Для того, чтобы подтвердить или опровергнуть это предположение, необходимо проверить справедливость неравенств (31) для любого p в пределах от 0 до 1 и для любого q в пределах от 0 до 1. В общем случае число таких проверок бесконечно. И, следовательно, действенный способ определения равновесной ситуации должен быть иным.

Для его обоснования сошлемся на следующий теоретический результат.

Теорема. *Выполнение неравенств.*

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*) \qquad H_B(p,q^*) \le H_B(p^*,q^*), \tag{32}$$

равносильно выполнению неравенств:

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*) \qquad H_B(p,q^*) \le H_B(p^*,q^*). \tag{33}$$

Иными словами, для того чтобы убедиться, что пара (p^*, q^*) определяет равновесную ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенства:

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*),$$

только для двух чистых стратегий игрока A: $p = 0$ *и* $p = 1$ и неравенства:

$$H_B(p, q) < H_B(p^*,q^*),$$

только для двух чистых стратегий игрока B: ($q=0$ *и* $q=1$).

Четыре неравенства (33) позволяют провести поиск точки равновесия уже вполне конструктивно.

Запишем средние выигрыши игроков A и B в более удобной форме. Имеем:

$$H_A(p,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\, pq + (a_{12} - a_{22})\, p + (a_{21} - a_{22})\, q + a_{22},$$

$$H_B(p,q) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})\, pq + (b_{12} - b_{22})\, p + (b_{21} - b_{22})\, q + b_{22}.$$

Полагая в первой из полученных формул: $p = 1$, а потом $p = 0$, получаем, что:

$$H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\, q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})\, q,$$

$$H_A(0,q) = (a_{21} - a_{22})\, q + a_{22}.$$

Рассмотрим разности:

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\, p\, q + (a_{12} - a_{22})\, p - (a_{11} - - a_{12} - a_{21} + a_{22})\, q + a_{22} - a_{12},$$

$$H_A(p,q) - H_A(0,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\, p\, q + (a_{12} - a_{22})\, p.$$

Полагая:

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}\ \alpha = a_{22} - a_{12}.$$

получим для них следующие выражения:

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) = Cpq - \alpha p - Cq + \alpha = Cq(p-1) - \alpha(p-1) = (p - 1)(Cq - a),$$

$$H_A(p,q) - H_A(0,q) = Cpq - \alpha p = p(Cq - \alpha).$$

В случае если пара *(p, q)* определяет точку равновесия, эти разности неотрицательны:

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) \geq 0,$$

$$H_A(p,q) - H_A(0,q) \geq 0.$$

Получаем:

$$(p - 1)(Cq - a) \geq 0,$$

$$p(Cq - \alpha) \geq 0.$$

Из формул для функции $H_B(p,q)$ при $q = 1$ и $q = 0$ предлагаем соответственно вывести следующие соотношения с учетом обозначений:

$$D= b_{11} - b_{12} - b_{21}+ b_{22}\ \beta= b_{22} - b_{22},$$

которые приводятся к виду:

$$(q - 1)\ (Dp-\beta) \geq 0,$$

$$q\ (Dp-\beta) \geq 0.$$

Вывод: Для того чтобы в биматричной игре:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

пара *(p, q)* определяла равновесную ситуацию, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих неравенств:

$$(p - 1)\ (Cq - a) \geq 0, \qquad 0 \leq p \leq 1,$$
$$p\ (Cq - \alpha) \geq 0,$$

$$(q - 1)\ (Dp-\beta) \geq 0 \qquad 0 \leq q \leq 1,$$
$$q\ (Dp-\beta) \geq 0,$$

где

$$C= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \qquad \alpha = a_{22}- a_{12},$$

$$D= b_{11} - b_{12} - b_{21}+ b_{22} \qquad \beta= b_{22} - b_{22}.$$

Геометрическую интерпретацию условий (31) рассмотрим на примерах описанных выше биматричных игр.

Пример 10. «Семейный спор».

Напомним, что ситуация, сложившаяся в этой задаче, задается платежными:

матрицами следующего вида:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Заменяя в неравенствах (3) величины C, a, D и их конкретными значениями:

$$C= 2- 0 - 0 + 1 = 3,\ \alpha = 1 - 0 = 1,$$

$$D= 1 - 0 - 0 + 2, \qquad \beta = 2 - 0 = 2.$$

Получим:

$$(p - 1)(3q - 1) \geq 0, \qquad (q - 1)(3p - 2) \geq 0,$$

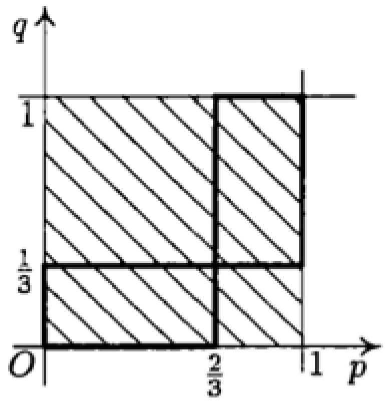
$$p\,(3q - 1) \geq 0, \qquad q\,(3p - 2) \geq 0.$$

Решаем и получаем, что:

1. $p = 1,\ q \geq \frac{1}{3}$ 2. $p = 0,\ \ q \leq \frac{1}{3}$ 3. $0 < p < 1,\ q = \frac{1}{3}$,

1. $q = 1,\ q \geq \frac{2}{3}$ 2. $q = 0,\ \ q \leq \frac{2}{3}$ 3. $0 < q < 1,\ q = \frac{2}{3}$.

Геометрическая интерпретация полученных результатов на единичном квадрате выглядит так:



Данная игра имеет три точки равновесия.
Две из них отвечают чистым стратегиям игроков:

$$P = 0,\ q = 0 \ H_A(0,0) = 1,\ H_B(0, 0) = 2,$$

одна – смешанная:

$$p = \frac{1}{3},\ q = \frac{2}{3} \qquad H_A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}, \qquad H_B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

В полученных результатах больше вопросов, чем ответов.

Ситуации (1,1) и (0,0) означают одновременный выбор игроками первых или соответственно вторых стратегий, т. е. определенную договоренность о совместных действиях.

Однако в данном случае есть еще одна ситуация равновесия, состоящая в выборе игроками вполне определенных смешанных стратегий. В ней оба игрока получают одинаковые выигрыши, правда, меньшие тех, которые давали две другие равновесные ситуации.

Какой же из этих трех ситуаций равновесия следует отдать предпочтение?
Какую стратегию выбрать игрокам?

Если бы игроки договорились выбрать одновременно, скажем, первую чистую стратегию, причем игрок А за получение большего выигрыша, чем игрок В, заплатил бы ему 1/2, то выигрыш каждым полутора единиц можно было бы считать и выгодным, и справедливым.

Однако в рамках теории бескоалиционных игр такого рода дележи не рассматриваются.

Вполне ясно, что для выбора каждым из игроков своей линии поведения (напомним, что подобная ситуация может повторяться и повторяется многократно) необходимы либо расширение возможностей, имеющихся у игроков, либо иные, измененные критерии.

Замечание. Если разбить рассмотренную биматричную игру на две матричные игры с нулевой суммой выигрыша, то, можно заметить следующее: если каждый игрок будет применять свои стратегии, в этой игре исходя только из матрицы своих выигрышей, то его оптимальный

средний выигрыш совпадет с его выигрышем при равновесной ситуации; кстати, по своей матрице игрок может найти и оптимальную смешанную стратегию другого игрока (но не свою!). Предлагается проверить самостоятельно.

Подведем некоторые итоги.

Проанализируем полученные результаты.

Из приведенных примеров видно, что числа C и D могут быть как положительными, так и отрицательными. Они могут, в частности, даже обращаться в нуль. Рассмотрим случай, когда ни C ни D нулю не равны, т. е.

$$C \cdot D \neq 0.$$

Тогда точка равновесия определяется парой (p,q):

$$p = \beta/D \qquad q = \alpha/C.$$

Эти формулы являются весьма примечательными: в равновесной ситуации выбор игрока А полностью определяется элементами платежной матрицы игрока В и не зависит от элементов его собственной платежной матрицы, а выбор игрока В равновесной ситуации полностью определяется элементами платежной матрицы игрока А, и не зависит от элементов его собственной платежной матрицы.

Иными словами, равновесная ситуация обоих игроков определяется не столько стремлением увеличить собственный выигрыш, сколько желанием держать под контролем выигрыш другого игрока (минимизировать этот выигрыш). И если, например, заменить в биматричной игре матрицу выплат игроку А, а матрицу выплат игроку В оставить прежней, то игрок А никак не изменит своего «равновесного» поведения (просто не обратит внимания на эту замену), в то время как игрок В изменит свою стратегию на новую, равновесную. Таким образом, в биматричной (неантагонистической) игре мы вновь встречаемся с антагонизмом. Правда, теперь это уже не антагонизм интересов (как было в антагонистической, матричной игре), а антагонизм поведения. Отметим, что в биматричными играх (в отличие от матричных) при наличии нескольких ситуаций равновесия средний выигрыш игрока в разных равновесных ситуациях различен (напомним, что в матричной игре выигрыш игрока один и тот же вне зависимости от количества точек равновесия). Но если средние выигрыши разнятся, то какую равновесную ситуацию следует считать оптимальной?

Вопросы для самопроверки:

1. В каком случае возникает биматричная игра, чем она задается?
2. Как можно задать функции выигрыша игроков?
3. Как определяются смешанные стратегии игроков и функции выигрыша игроков?
4. Как определяется ситуация равновесия в биматричной игре?
5. В чем содержательный смысл ситуации равновесия?
6. Всегда ли в биматричной игре есть ситуация равновесия?
7. Сформулируйте теорему Нэша.
8. Сформулируйте основные критерии доминирования в биматричной игре, если заданы матрицы выигрышей.
9. Являются ли разными ситуации равновесия в матричной игре с 0 суммой выигрыша эквивалентными по значениям функций выигрыша в биматричной игре?
10. Что понимается под возможной в игре неустойчивостью ситуации равновесия?
11. Опишите алгоритм поиска ситуации равновесия в биматричных играх размерности 2×2. Что такое смешанные стратегии?
12. Что такое совместная смешанная стратегия? Как могут быть реализованы на практике такие стратегии?
13. Как определяются выигрыши игроков при совместной смешанной стратегии?
14. Как задается в биматричной игре совместная смешанная стратегия?
15. Как определяется в биматричной игре ситуация равновесия в совместных смешанных стратегиях?
16. Сформулируйте основные критерии доминирования в биматричной игре, если заданы матрицы проигрышей.
17. Сколько точек равновесия может быть в биматричной игре?

Литература по теме:

Основная литература:

1. Колобашкина Л.В. Основы теории игр. М.: БИНОМ. 2014г.
2. Невежин В.П. Теория Игр. Примеры и задачи. М.: Форум, 2012г.
3. Шикин Е.В. От игр к играм. Математическое введение. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.

Дополнительная литература:

1. Бусыгин В.П., Коковин С.Г., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. Микроэкономический анализ несовершенных рынков. (2000) Новосибирск.
2. Васин А.А. Морозов В.В. Теория игр и модели экономики. − М.; МАКС Пресс, 2005.
3. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. − М.; Наука, 1985.
4. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. − М.; Наука, 1981.
5. Мандель М.Д. Кластерный анализ, М.: Финансы и статистика, 1988.
6. Петросян Л. А. Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов. - М., Книжный дом «Университет», 1998.
7. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие для студентов вузов специальностей «Прикладная математика» и «Экономическая кибернетика»/ И.М. Макаров, Т.М. Виноградский и др. – М.: Наука, 1982. с.

Интернет-ресурсы:

1. Курс дистанционного обучения по теории игр Высшей школы экономики. // https://www.coursera.org/course/gt.
2. Он-лайн калькулятор решения задач по теории игр. // http://math.semestr.ru/games/mat.php.

Тема 3. Позиционные игры

Цели и задачи изучения темы:

- ознакомление с многошаговыми процессами принятия решений;
- дать представление о позиционной игре в условиях неполной информации;
- дать представление о позиционной игре в условиях полной информации;
- познакомить с основными методами решения позиционных игр.

Успешно изучив тему, Вы:

Будете знать:

- способы описания позиционной игры;
- процесс нормализации позиционной игры;
- методы решения позиционных игр.

Будете уметь:

- сводить конфликтную ситуацию к позиционной игре;
- представлять позиционную игру в виде дерева;
- нормализовать позиционную игру;
- находить решение позиционной игры.

Вопросы темы:

1. Построение модели игры в позиционной или развернутой форме.
2. Нормализация позиционной игры.
3. Решение позиционных игровых задач с неполной информацией.
4. Решение позиционных игровых задач с полной информацией.

Лекция «Позиционные игры»

Вопрос 1. Построение модели игры в позиционной или развернутой форме.

Располагая той или иной информацией о прошлом развитии конфликта, во многих практически важных конфликтных ситуациях, стороны совершают свой выбор не раз и навсегда, а последовательно во времени, шаг за шагом. Тем самым они используют стратегии, отражающие как динамику конфликта, так и степень собственной информированности о фактически складывающейся обстановке в развитии этого конфликта.

Одним из классов игр, описывающих конфликты, динамика которых оказывает влияние на поведение участников, являются так называемые позиционные игры.

Позиционная игра — это бескоалиционная игра, моделирующая процессы последовательного принятия решений игроками в условиях меняющейся во времени и, вообще говоря, неполной информации.

Процесс самой игры состоит в последовательных переходах от одного состояния игры к другому, которые осуществляются либо путем выбора игроками одного из возможных действий в соответствии с правилами игры, либо случайным образом (случайный ход).

В качестве примеров позиционных игр можно привести крестики-нолики, шашки, шахматы, карточные игры, домино и др. Интересно, что право выбора первого хода в этих играх часто определяется случайным образом.

Состояния игры принято называть позициями (отсюда и название — позиционные игры), а возможные выборы в каждой позиции — альтернативами. Окончательные позиции называются вершинами.

Характерной особенностью позиционной игры является возможность представления множества позиций в виде древовидного упорядоченного множества, которое называется деревом игры.

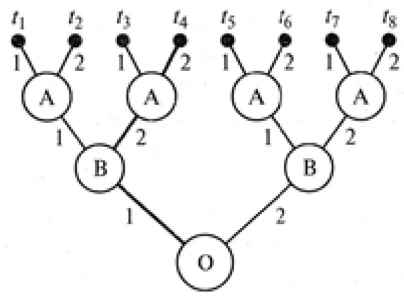


Рис. 5

Символы О, А или В в кружке указывают, кто из игроков (О, А или В) делает очередной ход в данной позиции. При этом символом О обычно обозначается ход в игре, осуществляемый не игроком, а каким-нибудь случайным механизмом (природой).

Описание конечной игры двух лиц с помощью дерева, узлы (точки ветвления) которого соответствуют ситуациям, в которых стороны осуществляют свои выборы (ходы), а вершины — ситуациям завершения операции (с указанием достигаемых сторонами значений полезностей), является моделью игры в позиционной или развернутой форме.

Термин «развернутая форма» отражает то обстоятельство, что рассматриваемая модель характеризует процесс выбора решений как развертывающийся во времени.

Для определенности мы будем рассматривать позиционные игры, в каждой позиции которых, за исключением окончательных, ровно две альтернативы — первая и вторая.

По графическому описанию игры в виде дерева можно заметить, что процесс игры состоит в переходе от начальной позиции к вершине через непосредственно следующие одна за другой промежуточные позиции.

Каждая вершина определяет единственную цепь (последовательность идущих друг за другом звеньев), связывающую начальную позицию с данной вершиной. Такая цепь называется *партией*. На рис. 5 одна из партий выделена жирными линиями. Число различных партий равно числу вершин. *В* каждой вершине t_i задан числовой выигрыш игрока *А*.

Различают позиционные игры с *неполной и полной информацией*.

В позиционных играх с *неполной информацией* (например, домино) игрок, делающий ход, не знает точно, в какой именно позиции дерева игры он фактически находится. Этому игроку известно лишь некоторое множество позиций, включающее в себя его фактическую позицию. Такое множество позиций называется *информационным множеством*. Позиции, принадлежащие одному и тому же информационному множеству, объединяются пунктирными линиями. Предполагается, что понятие дерева игры включает и группирование узлов этого дерева в информационные множества, отражающие осведомленность игроков обо всех выборах, предшествующих текущему ходу.

Игра в развернутой форме, в которой все информационные множества содержат ровно по одному узлу, называется *игрой с полной информацией*. В позиционных играх с полной информацией (например, шашки, шахматы) каждый игрок при своем ходе знает ту позицию дерева игры, в которой он находится.

Замечание. Решение игровых позиционных задач с неполной информацией будем рассматривать на примере антагонистических игр, а затем обобщим полученные результаты на более общий класс игр.

Вопрос 2. Нормализация позиционной игры.

Игра в позиционной форме предусматривает принятие решений в каждой (реализующейся в ходе конкретной партии) позиции игры. Однако каждая сторона может *заблаговременно* составить свой *план ведения игры*, предусматривающий, какое решение должно быть выбрано на каждом ходе (если развитие игры приведет в' позицию, соответствующую этому ходу). Принятие такого плана сводит многократные выборы решений в ходе игры к *единственному* выбору (т. е. к выбору плана, определяющего решения во всех позициях данной стороны). Будем называть такие планы *стратегиями сторон в позиционной игре*. Введенное понятие стратегии допускает следующее формальное определение.

Стратегия игрока в конечной позиционной игре есть функция, определенная на всех информационных множествах этого игрока (на дереве игры). Значением этой функции на каждом таком множестве является один из выборов, имеющихся у игрока в этом множестве. Заранее определенную последовательность ходов игрока, выбранную им в зависимости от информации о ходах другого игрока и ходах игрока О (природы), будем называть чистой стратегией этого игрока.

В том случае, если в игре нет случайных ходов (игрок О в игре не участвует), выбор игроками чистых стратегий однозначно определяет исход игры — приводит к окончательной позиции, где игрок А и получает свой выигрыш. Это обстоятельство позволяет сводить позиционную игру к матричной игре.

Процесс сведения позиционной игры к матричной называется *нормализацией позиционной игры*. Рассмотрим на примерах, как это делается.

Для начала рассмотрим примеры двух игр, состоящих из двух ходов, которые последовательно делают участвующие в ней игроки А и В. Начинает игрок А: он выбирает одну из двух возможных альтернатив — число x, равное либо 1 (первая альтернатива), либо 2 (вторая альтернатива). На ход игрока А игрок В отвечает своим ходом, выбирая одну из двух возможных альтернатив — число y, равное либо 1 (первая альтернатива), либо 2 (вторая альтернатива). В результате игрок А получает вознаграждение или вынужден платить штраф.

Пример 11 *(нормализация двухходовой игры с полной информацией)*.

1-й ход. Игрок А выбирает число x из множества двух чисел {1,2}.

2-й ход. Игрок В выбирает число y из множества двух чисел {1, 2}, зная, какое число x выбрал игрок А.

Задана функция W(x, y) выплат игроку А за счет игрока В:

$$W(1, 1) = 1,\ W(2, 1) = -2,$$

$$W(1, 2) = -1,\ W(2, 2) = 2.$$

Дерево игры и информационные множества для данного случая показаны на рис. 6.

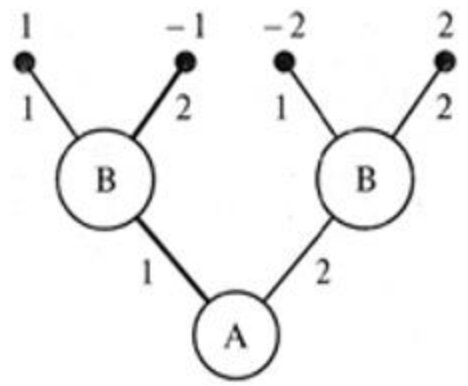


Рис. 6

Опишем стратегии игроков.

Стратегию игрока А можно задать одним числом x, показывающим, какую альтернативу, первую или вторую, выбрал игрок. Тем самым, у игрока А две чистых стратегии:

A_1 — «выбрать x = 1», A_2 — «выбрать x= 2».

Стратегию игрока В (принимая во внимание, что выбор игрока А на 1-м ходе ему известен) удобно описывать упорядоченной парой [y_1, y_2].

Здесь y_1 ($y_1 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком В при условии, что игрок А выбрал первую альтернативу, x = 1, а y_2 ($y_2 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком В при условии, что игрок А выбрал вторую альтернативу, x = 2.

Например, выбор игроком В стратегии [2, 1] означает, что если на 1-м ходе игрок А выбрал x = 1, то игрок В на своем ходе должен выбрать y =2. Если же на 1 -м ходе игрок А выбрал x = 2, то, согласно этой стратегии, игрок В на своем ходе должен выбрать y = 1.

Таким образом, у игрока В четыре чистых стратегии:

- B_1 — [1, 1] («y = 1 при любом выборе x»);
- B_2 — [1, 2] («y = x при любом выборе x»);
- B_3 — [2, 1] («y≠ x при любом выборе x»);
- B_4 — [2, 2] («y = 2 при любом выборе x»).

Рассмотрим теперь, как рассчитываются выигрыши игрока А в зависимости от примененных стратегий.

Пусть, например, игрок А выбрал стратегию A_1 - (1), а игрок В - стратегию B_2 - [1, 2].

Тогда x =1, а из стратегии [1,2] вытекает, что y = 1. Отсюда W(x,y)=W(1, 1)=1.

Остальные выигрыши рассчитываются совершенно аналогично.

Результаты расчетов записываются обычно или в виде таблицы выигрышей игрока А:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	$x = 1$	$W(1, 1)$	$W(1, 1)$	$W(1, 2)$	$W(1, 2)$
A_2	$x = 2$	$W(2, 1)$	$W(2, 2)$	$W(2, 1)$	$W(2, 2)$

или в виде матрицы игры:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

где,
как обычно, строки соответствуют стратегиям игрока А,
столбцы — стратегиям игрока В.

Полученная матрица имеет седловую точку. Оптимальные стратегии игроков:

A_1 — (1) и B_3—[2, 1]. Тем самым, игрок А на 1 -м ходе выбирает х = 1, а игрок В на 2-м ходе выбирает у= 2.

Цена игры v = — 1.

Пример 12 *(нормализация двухходовой игры с неполной информацией*).

В случае, когда выполнены все условия предыдущего примера, кроме одного — игрок В на втором ходе выбирает число у из множества двух чисел {1, 2}, не зная выбора числа х игроком А, — информационные множества выглядят так, как показано на рис. 7.

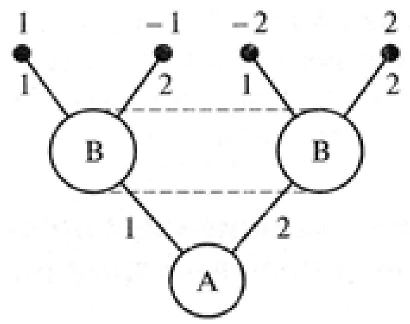


Рис. 7

Эта игра с неполной информацией: игрок В при своем ходе знает, в каком информационном множестве он находится, но ему неизвестно, в какой именно позиции этого множества — в левой или в правой. Опишем стратегии игроков.

У игрока А они те же, что и в предыдущем примере: A_1 — «выбрать x= 1», A_2 — «выбрать x = 2».

Поскольку игроку В выбор игрока А неизвестен, то есть игрок В не знает, в какой именно из двух позиций он находится (см. рис.7), то у него те же две стратегии: В{B_1 — «выбрать y = 1», B_2 — «выбрать y = 2».

Соответствующие таблица выигрышей игрока А и матрица игры имеют вид:

		B_1	B_2
		$y = 1$	$y = 2$
A_1	$x = 1$	$W(1, 1)$	$W(1, 2)$
A_2	$x = 2$	$W(2, 1)$	$W(2, 2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица седловой точки не имеет.

Оптимальные смешанные стратегии игроков, полученные аналитическим методом, таковы:

$$p^* = (2/3,\ 1/3) \qquad q^* = (1/2, 1/2).$$

Цена игры v = 0.

Замечание. На этих двух примерах видно, что результат сведения позиционной игры к матричной напрямую зависит от степени информированности игроков. В частности, отсутствие у игрока В сведений о выборе, сделанном игроком А, приводит к уменьшению количества его возможных стратегий. Сравнивая ответы, полученные в примерах 11 и 12, замечаем, что снижение уровня информированности игрока (в данном случае — игрока В) делает для него исход игры менее благоприятным.

Вопрос 3. Решение позиционных игровых задач с неполной информацией.

Рассмотрим теперь несколько примеров сведения трехходовых позиционных игр к матричным, сосредоточив основное внимание на одном из наиболее ответственных этапов нормализации — описании стратегий игроков.

Пример 13.

1-й ход делает игрок А: он выбирает число x из множества двух чисел: {1, 2}.

2-й ход делает игрок B: зная выбранное игроком А число x, он выбирает число y из множества двух чисел {1,2}.

3-й ход делает игрок А: не зная о выбранном игроком B числе y на 2-м ходе и забыв выбранное им самим на 1 -м ходе число x, он выбирает число z из множества двух чисел {1,2}.

После этого игрок А получает вознаграждение W(x, y, z) за счет игрока B:

Ситуация, когда игрок забывает свой собственный выбор на предыдущих шагах, случается, к примеру, если в процессе переговоров одной из сторон пришлось заменить своего представителя, а новый представитель не в полной мере владеет информацией о достигнутых ранее договоренностях.

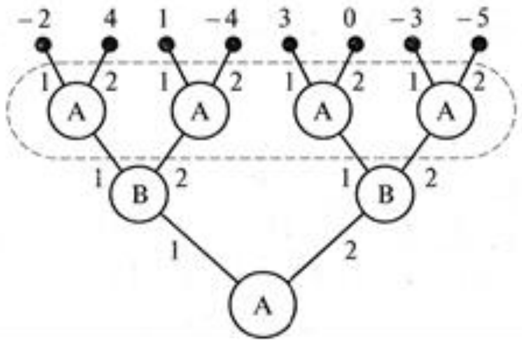


Рис. 8.

На рис. 8 показаны дерево игры и информационные множества. Нормализуем эту игру.

Поскольку игроку B выбор игрока A на 1-м ходе известен, у игрока B те же четыре стратегии [y_1, y_2], что и в примере 11:

- B_1 — [1, 1] («y = 1 при любом выборе x»);
- B_2 — [1,2] («y = x при любом выборе x»);
- B_3 — [2, 1] («y ≠ x при любом выборе x»);
- B_4 — [2, 2] («y = 2 при любом выборе x»).

Игрок А на 3-м ходе не знает предыдущих выборов: ни значения x, ни значения y. Поэтому каждая его стратегия состоит просто из пары чисел (x, z), где x ($x \in$ {1,2}) — альтернатива, выбираемая игроком А на 1 -м ходе, а z ($z \in$ {1,2}) — альтернатива, выбираемая игроком А на 3-м ходе.

Например, выбор игроком А стратегии (2, 1) означает, что на 1-м ходе он выбирает x = 2, а на 3-м ходе — z = 1.

Таким образом, у игрока А четыре стратегии: A_1 — (1,1), A_2 — (1, 2), A_3— (2,1), A_4—(2,2).

Выигрыши рассчитываются игрока А в зависимости от стратегий, применяемых игроками в данной игре. Пусть, например, игрок А выбрал стратегию A_2 — (1, 2), а игрок В — стратегию B_3 — [2, 1]. Тогда x = 1, откуда вытекает, что y = 2 (поскольку значение y=1 будет при условии x=1, а y=2 при условии x= 2). Значение z=2 выбрано игроком А независимо от выбора игрока В. Вычисляя значение функции выигрышей для этого набора, получаем:

$$W(x,y,z) = W(1,2,3) = -4.$$

В результате подобных рассуждений получаются и остальные пятнадцать выигрышей. Это позволяет построить таблицу выигрышей игрока А:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	(1, 1)	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 1)$
A_2	(1, 2)	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 2, 2)$	$W(1, 2, 2)$
A_3	(2, 1)	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$
A_4	(2, 2)	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$

или

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные смешанные стратегии игроков, полученные аналитическим методом:

$$p^*= (8/11, 3/11, 0, 0) \quad q^* = (0, 5/11, 0, 6/11).$$

Цена игры v = — 4/11.

Пример 14.

1 -й ход делает игрок А: он выбирает число x из множества двух чисел {1,2}.

2-й ход делает игрок В: не зная о выборе игрока А на 1 -м ходе, он выбирает число y из множества двух чисел {1, 2}.

3-й ход делает игрок А: он выбирает число z из множества двух чисел {1,2}, не зная ни значениях, ни значения y.

После этого игроки расплачиваются по правилу, указанному в примере 13.

Графическое представление этой игры показано на рис. 9.

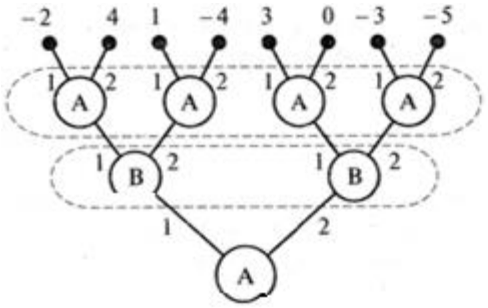


Рис. 9

Ясно, что у игрока А те же четыре стратегии, что и в примере 13: A_1—{1,1), A_2—(1,2), A_3— (2, 1), A_4—(2, 2).

У игрока В всего две стратегии: B_1 — «выбрать y = 1», B_2 — «выбрать y = 2».

В этом случае (весьма слабой информированности игроков) таблица выигрышей игрока А и соответствующая матрица строятся совсем просто:

		B_1	B_2
		$y = 1$	$y = 2$
A_1	(1, 1)	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 2, 1)$
A_2	(1, 2)	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 2, 2)$
A_3	(2, 1)	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$
A_4	(2, 2)	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$

или:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные смешанные стратегии игроков, полученные аналитическим методом, таковы:

p*= (2/3, 0, 1/3, 0) q* = (4/9, 5/9)

Цена игры v = —1/3.

Замечание. Сравнивая значения выигрышей игрока В, полученные в примерах 13 и 14, замечаем, что снижение его уровня информированности, как и в случае двухходовых игр, делает для него исход игры менее благоприятным.

Пример 15.

1 -й ход делает игрок А: он выбирает число x из множества двух чисел: {1, 2}.

2-й ход делает игрок В: зная выбранное игроком А число x, он выбирает число y из множества двух чисел {1, 2}.

3-й ход делает игрок А: зная о выбранном игроком В числе y на 2-м ходе, но забыв выбранное им самим на 1 -м ходе число x, он выбирает число z из множества двух чисел {1,2}.

После этого игроки расплачиваются по правилу, указанному в примере 13.

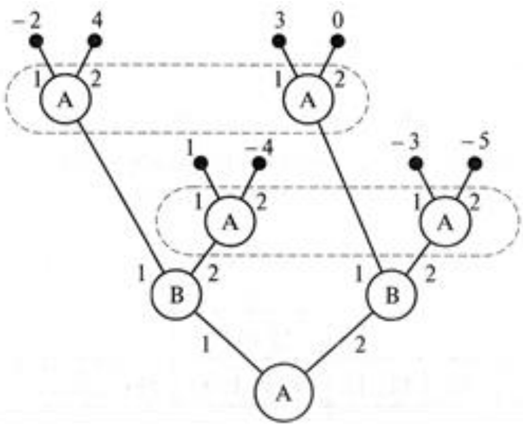


Рис. 10

Графическое представление этой игры показано на рис. 10.

Поскольку игроку В выбор игрока А на 1-м ходе известен, у игрока В те же четыре стратегии: {y_1, y_2}, что и в примере 11:

- B_1 — [1, 1] («y= 1 при любом выборе x»);
- B_2 — [1, 2] («y = x при любом выборе x»);
- B_3 — [2, 1] («y ≠ x при любом выборе x»);
- B_4 — [2, 2] («y = 2 при любом выборе x»).

При описании стратегий игрока А нужно исходить из того, что к 3-му ходу игрок А утратил сведения о собственном выборе на 1-м ходе, но ему известен выбор игрока В на 2-м ходе. Поэтому выбор числа z игроку А следует связать с известным ему к 3-му ходу значением y. Удобнее всего это сделать по аналогии с расчетом стратегий игрока В, т. е. при помощи упорядоченной пары [z_1, z_2]- Здесь z ($z \in$ {1,2}) — альтернатива, выбираемая игроком А при условии, что игрок В выбрал первую альтернативу, y = 1, а z_2 ($z_2 \in${1,2}) — альтернатива, выбираемая игроком А при условии, что игрок В выбрал вторую альтернативу, y = 2.

Чистую стратегию игрока А в данной игре можно представить как $(x,[z_1,z_2]$.

Здесь x ($x \in \{1,2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А на 1-м ходе, z_1 — альтернатива, выбираемая игроком А на 3-м ходе, если на 2-м ходе игрок В выбрал первую альтернативу (y = 1), и z_2 — альтернатива, которую игрок А выбирает на 3-м ходе, если на 2-м ходе игрок В выбрал вторую альтернативу (y = 2).

Например, выбор игроком А стратегии (2, [2, 1]) означает, что на 1-м ходе игрок А выбирает x = 2, а на 3-м — z = 2, если игрок В выбрал y = 1, и z = 1, если игрок В выбрал y = 2.

Таким образом, у игрока А восемь чистых стратегий:

A_1— (1, [1, 1]), A_2 — (1, [1, 2]), A_3— (1, [2, 1]), A_4—(1, [2, 2]),

A_5 — (2, [1, 1]), A_6 — (2, [1, 2]), A_7 — (2, [2, 1]), A_8— (2, [2, 2]).

Рассмотрим, как определяются элементы таблицы выигрышей игрока А.

Пусть, например, игрок А выбрал стратегию A_3 — (1, [2, 1]),а игрок В — стратегию В2 — [1, 2]. Тогда x= 1 (первый элемент стратегии A_3), y = 1 (первый элемент стратегии B_2 который выбирается на основании выбора значения x = 1 на 1-м шаге), z = 2 (первый элемент в квадратных скобках стратегии A_3, который выбирается на основании выбора значения y = 1 на 2-м шаге).

Отсюда:

$$W(x,y,z) = W(1,1,2) = 4.$$

Но этой же схеме вычисляются и остальные элементы таблицы. В результате получаем:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	(1, [1, 1])	W(1, 1, 1)	W(1, 1, 1)	W(1, 2, 1)	W(1, 2, 1)
A_2	(1, [1, 2])	W(1, 1, 1)	W(1, 1, 1)	W(1, 2, 2)	W(1, 2, 2)
A_3	(1, [2, 1])	W(1, 1, 2)	W(1, 1, 2)	W(1, 2, 1)	W(1, 2, 1)
A_4	(1, [2, 2])	W(1, 1, 2)	W(1, 1, 2)	W(1, 2, 2)	W(1, 2, 2)
A_5	(2, [1, 1])	W(2, 1, 1)	W(2, 2, 1)	W(2, 1, 1)	W(2, 2, 1)
A_6	(2, [1, 2])	W(2, 1, 1)	W(2, 2, 2)	W(2, 1, 1)	W(2, 2, 2)
A_7	(2, [2, 1])	W(2, 1, 2)	W(2, 2, 1)	W(2, 1, 2)	W(2, 2, 1)
A_8	(2, [2, 2])	W(2, 1, 2)	W(2, 2, 2)	W(2, 1, 2)	W(2, 2, 2)

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 3 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

После применения отношений доминирования в матрице игры остается единственный элемент, что говорит о наличии решения в чистых стратегиях. Оптимальные стратегии игроков: A_3 — (1,[2,1]), и B_4 — [2, 2]. Решение игры будет следующим:

$$p^*= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0,/0) \qquad q^* = (0, 0, 0, 1).$$

Цена игры v = 1.

Пример 16.

1-й ход делает игрок A: он выбирает число x из множества двух чисел: {1,2}.

2-й ход делает игрок B: зная выбранное игроком A число x, он выбирает число y из множества двух чисел {1,2}.

3-й ход делает игрок A: не зная о выбранном игроком B числе y на 2-м ходе, но помня выбранное им самим на 1-м ходе число x, он выбирает число z из множества двух чисел {1,2}.

После этого игроки расплачиваются по правилу, указанному в примере 13.

Графическое представление этой игры показано на рис. 11.

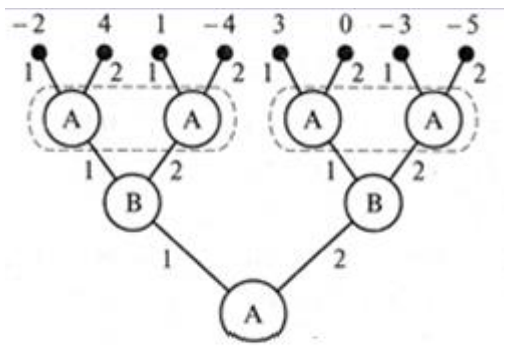


Рис. 11

Поскольку игроку B выбор игрока A на 1-м ходе известен, у игрока B те же четыре стратегии [y_1, y_2], что и в примере 11:

- B_1 — [1, 1] («y= 1 при любом выборе x»);
- B_2 — [1, 2] («y = x при любом выборе x»);

- B_3 — [2, 1] («$y \neq x$ при любом выборе x»);
- B_4 — [2, 2] («y = 2 при любом выборе x»).

Игрок А на 3-м ходе не знает выбора игрока В на 2-м ходе, т. е. значения у, но помнит свой выбор на 1-м шаге, т. е. значение х.

Поэтому выбор числа z игроку А следует связать с известным ему значением х. Удобнее всего это сделать по аналогии с расчетом стратегий игрока В, т. е. при помощи упорядоченной пары $[z_1, z_2]$- Здесь z_1 ($z \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А при условии, что им на 1-м ходе была выбрана альтернатива х = 1, а z_2 ($z_2 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А при условии, что им на 1-м ходе была выбрана альтернатива х = 2.

Чистую стратегию игрока А в данной игре можно представить в виде: $(x, [z_1,z_2])$.

Следовательно, у игрока А восемь чистых стратегий:

$$A_1 — (1, [1, 1]), A_2—(1, [1, 2]), A_3—(1, [2, 1]), A_4—(1, [2, 2]),$$

$$A_5 — (2, [1, 1]), A_6—(2, [1, 2]), A_7—(2, [2, 1]), A_8—(2, [2, 2]).$$

Например, выбор игроком А стратегии A_7 — (2, [2, 1]) означает, что на 1-м ходе игрок А выбирает х = 2, а на 3-м — z = 1 (поскольку х = 2 определяет выбор второго значения в квадратных скобках, т. е.z_2. Но, поскольку значения х однозначно определяют значения zi (i=1,2), мы получаем пары стратегий, которые дублируют друг друга, т. е. дают один и тот же результат: A_1—A_2, A_3—A_4, A_5—A_7, A_6—A_8. Таким образом, мы доказали, что количество стратегий игрока А может быть сведено к четырем.

Поэтому каждая его стратегия состоит просто из пары чисел (х, z), где х ($x \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А на 1-м ходе, а z ($z \in \{1,2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А на 3-м ходе.

Например, выбор игроком А стратегии (2,1) означает, что на 1 -м ходе он выбирает х = 2, а на 3-м ходе — z = 1.

Таким образом, у игрока А те же четыре стратегии, что и в примере 13:

$$A_1 — (1, 1), A_2— (1, 2), A_3—(2, 1), A_4—(2, 2).$$

В результате матрица данной игры, а, следовательно, и решение, полностью совпадают с матрицей и решением игры из примера 13, что говорит о неактуальности знания выбора на 1-м ходе, если нет информации о предыдущем (2-м) ходе.

$$A_1— (1, 1), A_2 — (1, 2), A_3— (2, 1), A_4— (2, 2).$$

В результате матрица данной игры, а, следовательно, и решение, полностью совпадают с матрицей и решением игры из примера 13, что говорит о неактуальности знания выбора на 1-м ходе, если нет информации о предыдущем (2-м) ходе.

Рассмотрим теперь примеры позиционных игр со случайными ходами.

Пример 17.

1 -й ход производится случайно: игрок О выбирает число x, равное 1 с вероятностью 0.5, и равное 2 — с такой же вероятностью.

2-й ход делает игрок А: он выбирает число y из множества двух чисел {1,2}, не зная результатов случайного выбора на 1-м ходе.

3-й ход делает игрок В: он выбирает число z из множества двух чисел {1, 2}, зная о том, какое именно число x случайно выбрано игроком О на 1-м ходе и не зная выбора y игрока А на 2-м ходе.

После этого игроки расплачиваются, используя функцию W(x, y, z), ту же, что и в предыдущих примерах.

Графическое представление этой игры показано на рис. 12.

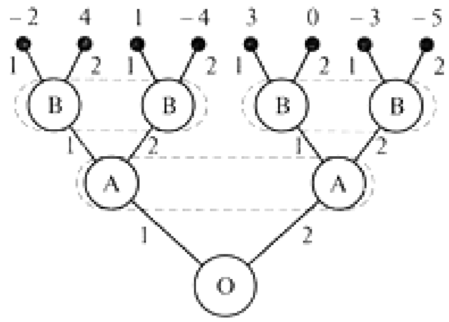


Рис. 12

Опишем стратегии игроков.

Поскольку игроку А исход случайного испытания неизвестен, он имеет всего две стратегии:

$$A_1 — (1),\ A_2 — (2).$$

При построении своих стратегий игроку В естественно воспользоваться имеющейся у него информацией о результате 1-го хода. Это позволит ему описать свою стратегию упорядоченной парой $[z_1, z_2]$, где z_1 ($z_1 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком В при условии, что $x = 1$, а z_2 ($z_2 \in \{1,2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком В при условии, что $x = 2$.

Тем самым, у игрока В четыре стратегии:

B_1— [1, 1], B_2— [1, 2], B_3— [2, 1], B_4—[2, 2].

Рассмотрим теперь, как определяются элементы таблицы выигрышей игрока А.

Пусть, например, игрок А выбрал стратегию A_1 — (1), а игрок В — стратегию B_3— [2,1]. Различаются два случая: x =1 и x =2.

Если x = 1, то стратегия B_3 указывает игроку В его выбор z= 2. А так как y = 1, то в результате имеем:

$$W(x, y, z) = W(1,1,2) = 4.$$

Если x = 2, то стратегия B_3 указывает игроку В его выбор z = 1. А так как y = 1, то в результате имеем:

$$W(x, y, z)=W(2, 1, 1) = 3.$$

Поскольку первая и вторая альтернативы на 1 -м ходе выбираются с вероятностями 0.5 и 0.5, то и вышеуказанные выигрыши появляются с теми же вероятностями и, следовательно, средний выигрыш игрока А при этих стратегиях определяется так:

$$4\cdot 0.5 +3\cdot 0.5 = 3.5.$$

Аналогичным образом рассчитываются и остальные средние выигрыши.

Таким образом, получаем: при x = 1:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	(1)	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 1, 1)$
A_2	(2)	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 2)$	$W(1, 2, 2)$

или:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

при x = 2.

Искомая матрица игры имеет вид:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	(1)	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 1, 2)$
A_2	(2)	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 2, 2)$	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 2, 2)$

или

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица игры имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 3.5 & 2 \\ -1 & -2 & -3.5 & -4.5 \end{pmatrix}.$$

После применения отношений доминирования в матрице игры остается единственный элемент, что говорит о наличии решения в чистых стратегиях. Оптимальными стратегиями игроков являются A_1— (1) и B_1— [1, 1].

Решение игры будет следующим:

p* = (1 0) q* = (1 0 0 0)

Цена игры v = 0.5.

Пример 18.

1 -й ход производится случайно: игрок O выбирает число x, равное 1, с вероятностью 2/3, и равное 2 — с вероятностью 1/3.

Если x = 1, то на 2 -м ходе игрок A выбирает число y из множества двух чисел {1,2}, зная результат случайного выбора на 1 -м ходе, а на 3-м ходе игрок B выбирает число z из множества двух чисел {1, 2}, зная о том, какое именно число x случайно выбрано игроком O на 1-м ходе, и не зная выбора y игрока A на 2-м ходе.

Если x = 2, то на 2-м ходе игрок B выбирает число y из множества двух чисел {1, 2}, зная результат случайного выбора на 1-м ходе, а на 3-м ходе игрок A выбирает число z из множества двух чисел {1,2}, зная x, но не зная y. После этого игроки расплачиваются, используя функцию W(x, y, z), ту же, что и в предыдущих примерах.

Графическое представление этой игры показано на рис. 13.

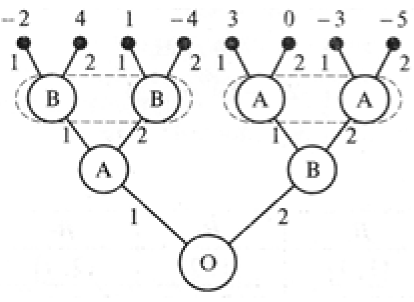


Рис. 13

Чистую стратегию игрока А в данной игре можно описать упорядоченной парой |y,z|, где у ($y \in \{1,2\}$) — выбор игрока А на 2-м ходе, если на 1 -м ходе выбрано х = 1, a z ($z \in \{1,2\}$) — выбор игрока А на 3-м ходе, если на 1 -м ходе выбрано х = 2. К примеру, стратегия парой |1,2| означает, что на 2-м ходе игрок А выбирает у = 1, а на 3-м ходе — z = 2.

Таким образом, у игрока А четыре стратегии:

$$A_1, —|1, 1|, A_2 —|1, 2|, A_3 — |2, 1|, A_4 —|2, 2|.$$

У игрока В те же четыре стратегии:

$$B, —|1, 1|, B_2 — |1, 2|. B_3 — |2, 1|, B_4 - |2, 2|.$$

Рассмотрим, как находятся элементы матрицы выигрышей игрока А.

По условию при х= 1 игрок А имеет возможность сделать только 2-й ход (выбрать у), а игрок В — только 3-й (выбрать z). При х = 2 их возможности меняются местами: игроку В предоставлено право 2-го хода (выбрать у), а игроку А — 3-го (выбрать z). Пусть, к примеру, игрок А применяет стратегию A_2 — |1, 2|, а игрок В — стратегию B_3 —|2, 1||.

Различаются два случая: х = 1 и х = 2.

Если х = 1, то стратегия A_2 указывает игроку А на 2-м ходе выбрать у - 1, а стратегия B_3 указывает игроку В на 3-м ходе выбрать z = 1. В результате:

$$W(x, y, z) = W(1, 1, 1) = —2.$$

Если х = 2, то стратегия B_3 указывает игроку В на 2-м ходе выбрать у - 2, а стратегия *A*2 указывает игроку А на 3-м ходе выбрать z = 2. В результате:

$$W(x, y, z)=W(2, 2, 2) = -5.$$

Так как первая и вторая альтернативы на 1-м ходе выбираются соответственно с вероятностями 2/3 и 1/3, то и найденные выигрыши появляются с теми же вероятностями и, следовательно, средний выигрыш игрока А при этих стратегиях определяется так:

$$(-2) \cdot 2/3+ (-5) \cdot 1/3 = -3.$$

Аналогично рассчитываются все остальные средние выигрыши.

Таким образом, получаем: при x = 1:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		|1, 1|	|1, 2|	|2, 1|	|2, 2|
A_1	|1, 1|	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 2)$
A_2	|1, 2|	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 2)$
A_3	|2, 1|	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 2)$	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 2)$
A_4	|2, 2|	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 2)$	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 2)$

или:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix};$$

при x = 2:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		|1, 1|	|1, 2|	|2, 1|	|2, 2|
A_1	|1, 1|	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 2, 1)$
A_2	|1, 2|	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$	$W(2, 2, 2)$
A_3	|2, 1|	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 2, 1)$
A_4	|2, 2|	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$	$W(2, 2, 2)$

или

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Искомая матрица игры имеет следующий вид:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 11 & -7 & 5 \\ -4 & 8 & -9 & 3 \\ 5 & -5 & -1 & -11 \\ 2 & -8 & -3 & -13 \end{bmatrix}.$$

Оптимальные смешанные стратегии игроков, полученные аналитическим методом, следующие:

p* = (5/11 0 6/11 0)   q* = (0, 0, 8/11, 3/11).

Цена игры v= - 41/33.

Вопрос 4. Решение позиционных игровых задач с полной информацией.

Позиционная игра называется *игрой с полной информацией*, если в любой точке любой ее партии игрок, делающий ход, точно знает, в какой позиции он находится и какие выборы были сделаны ранее, а следовательно, из-за древовидности графа игры может восстановить и все предыдущие позиции. В графическом исполнении каждый узел такой игры будет представлять собой отдельное информационное множество, и поэтому в такой игре информационные множества пунктиром не отмечаются. Примерами игр с полной информацией могут служить шашки, ' шахматы, крестики и нолики.

Большинство карточных игр не является играми с полной информацией, поскольку игроки не знают, какие карты были выданы другим игрокам. Основная особенность позиционной игры с полной информацией состоит в том, что соответствующая ей матрица выигрышей всегда имеет седловую точку, т. е. в игре с полной информацией существуют оптимальные чистые стратегии и, значит, равновесная ситуация. Сказанное означает, что в шахматах (крестиках-ноликах, шашках) уже в начальной позиции имеется способ выигрыша либо у белых, либо у черных, либо как та, так и другая сторона способна форсировать ничью.

Однако известное доказательство существования равновесной ситуации неконструктивно и не дает эффективных приемов фактического нахождения решения игры. И такие способы (стратегии) в шахматах не найдены до сих пор, и даже неизвестно, какая из перечисленных возможностей имеет место на самом деле.

Иное дело с игрой крестики-нолики: стратегий в ней немного и она разобрана до самого конца — существуют оптимальные чистые стратегии, ведущие игроков к ничьей. Как нетрудно заметить, двухходовая игра из примера 11 также является игрой с полной информацией. Ее нормализация приводит к матрице с седловой точкой (см. пример 11).

Рассмотрим примеры игр с полной информацией:

1. Выкладывание монет на стол. Два игрока поочередно кладут монеты одинаковых размеров на обыкновенный стол, всякий раз выбирая произвольное доступное место для монеты (взаимное накрывание монет не допускается). Тот из игроков, кто положит монету, не оставляющую места для новых монет, выигрывает.

Это игра с полной информацией. Существует вполне определенная стратегия, обеспечивающая выигрыш тому из игроков, кто начинает игру. А именно, начинающий игру должен положить первую монету точно в центр стола и на каждый ход противника отвечать симметричным ходом. Исход игры от стратегии второго игрока не зависит.

2. Переговоры. В переговорах участвуют две стороны: А и В. В слегка идеализированном варианте это может выглядеть, например, так.

Сначала сторона А высказывает одно из нескольких предложений, способных заинтересовать сторону В. Затем сторона В, ознакомившись с предложением стороны А, высказывает одно из нескольких встречных предложений, способных, по ее мнению, заинтересовать сторону А. В свою очередь, сторона А, ознакомившись с реакцией стороны В на сделанные предложения, высказывает ей новое предложение, внеся одну из нескольких возможных корректировок в свое первоначальное предложение с учетом мнения стороны В, и т. д.

Если предмет переговоров сложен, то подобный обмен ходами может затянуться. Однако любые переговоры непременно заканчиваются. И там, на финише, ждет функция выигрышей. Попробуем смоделировать короткий переговорный процесс трехходовой позиционной игрой. Предположим, что переговоры заканчиваются через три хода, на каждом из которых соответствующая сторона имеет возможность выбора из двух альтернатив, и опишем соответствующую позиционную игру.

1 -й ход делает сторона А: она выбирает одно из двух возможных предложений — число x из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

2 -й ход делает сторона В: она выбирает число y из множества двух чисел $\{1,2\}$, зная число x, предложенное стороной А.

3-й ход делает сторона А: она выбирает число z из предложение на 1-м ходе.

После этого сторона А либо получает вознаграждение (например, в виде кредита от стороны В), либо выплачивает стороне В штраф.

Все эти возможности описываются функцией выигрышей $W(x, y, z)$, заданной следующей таблицей:

$$W(1,1,1) = a \qquad W(2,1,1) = e$$
$$W(1,1,2) = b \qquad W(2,1,2) = f$$
$$W(1,2,1) = c \qquad W(2,2,1) = g$$
$$W(1,2,2) = d \qquad W(2,2,2) = h$$

Графическое представление этой игры показано на рис. 14.

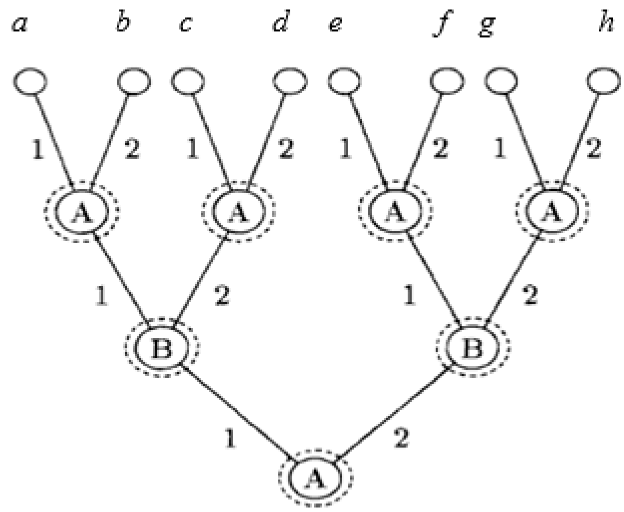


Рис. 14

Описанная позиционная игра является игрой с полной информацией.

Опишем возможные стратегии игрока В. Поскольку игроку В выбор игрока А на 1-м ходе известен, то у игрока В те же четыре стратегии, что и в примере 13: B_1 — [1,1], B_2 — [1, 2], B_3 — [2,1], B_4 — [2,2].

Чистая стратегия игрока А в данной игре описывается упорядоченной тройкой $(x, [z_1, z_2])$.

Здесь x (x = 1, 2) — альтернатива, которую игрок А выбирает на 1-м ходе, z_1 (z_1 = 1,2) — альтернатива, которую игрок А выбирает на 3-м ходе, если на 2-м ходе игрок В выбрал первую альтернатив у (у = 1), и z_2 (z_2 = 1, 2) — альтернатива, которую игрок А выбирает на 3-м ходе, если на 2-м ходе игрок В выбрал вторую альтернативу (у= 2).

Например, выбор игроком А стратегии (1, [2,1]) означает, что на 1-м ходе игрок А выбирает x = 1, а на 3-м — 2 = 2, если игрок В выбрал у = 1, и 2 = 1, если игрок В выбрал у = 2.

Тем самым у игрока А восемь чистых стратегий:

A_1— (1, [1,1]), A_2 — (1, [1,2]), A_3 — (1, [2,1]), A_4 — (1, [2,2]),

A_5 — (2, [1, 1]), A_6— (2, [1, 2]), A_7 — (2, [2, 1]), A_8 — (2, [2, 2]).

Покажем теперь, как в зависимости от применяемых стратегий определяются элементы таблицы выигрышей игрока А.

Пусть, например, игрок А выбрал стратегию A_6 — (2, [1, 2]), а игрок В — стратегию B_3— [2,1]. Тогда x = 2. Из [2,1] вытекает, что y = 1, а из (2, [1,2]) — что z = 1. Отсюда:

$$W(x, y, z) = W(2, 1, 1) = e.$$

Рассчитывая по этой же схеме все остальные элементы таблицы выигрышей, в итоге получим таблицу:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$[1,1]$	$[1,2]$	$[2,1]$	$[2,2]$
A_1	$(1,[1,1])$	$W(1,1,1)$	$W(1,1,1)$	$W(1,2,1)$	$W(1,2,1)$
A_2	$(1,[1,2])$	$W(1,1,1)$	$W(1,1,1)$	$W(1,2,2)$	$W(1,2,2)$
A_3	$(1,[2,1])$	$W(1,1,2)$	$W(1,1,2)$	$W(1,2,1)$	$W(1,2,1)$
A_4	$(1,[2,2])$	$W(1,1,2)$	$W(1,1,2)$	$W(1,2,2)$	$W(1,2,2)$
A_5	$(2,[1,1])$	$W(2,1,1)$	$W(2,2,1)$	$W(2,1,1)$	$W(2,2,1)$
A_6	$(2,[1,2])$	$W(2,1,1)$	$W(2,2,2)$	$W(2,1,1)$	$W(2,2,2)$
A_7	$(2,[2,1])$	$W(2,1,2)$	$W(2,2,1)$	$W(2,1,2)$	$W(2,2,1)$
A_8	$(2,[2,2])$	$W(2,1,2)$	$W(2,2,2)$	$W(2,1,2)$	$W(2,2,2)$

и соответствующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} a & a & c & c \\ a & a & d & d \\ b & b & c & c \\ e & g & e & g \\ e & h & e & h \\ f & g & f & g \\ f & h & f & h \end{pmatrix}$$

Вследствие того что рассматриваемая позиционная игра является игрой с полной информацией, полученная матрица имеет седловую точку при любой функции выигрышей. В этом легко убедиться, произвольно выбирая значения параметров a, Ь, c, d, e, f, g и h.

В рассмотренных примерах основное внимание было уделено описанию процесса нормализации позиционной игры — построению дерева игры и информационных множеств, выработке стратегий игроков и вычислению элементов платежной матрицы.

Следующий шаг — отыскание цены игры и оптимальных стратегий игроков — проводится методами, принятыми при решении матричных игр.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется позиционной игрой?
2. Какие различают позиционные игры?
3. Что характеризует позиционные игры?
4. Какова структура позиционной игры?
5. Привести примеры позиционных игр.
6. Привести примеры описания игры в виде дерева.
7. Что называется стратегиями в позиционной игре?
8. Какой процесс называется нормализацией позиционной игры?
9. Какими методами находятся оптимальные стратегии и цена позиционной игры?
10. В чем заключаются особенность позиционной игры с полной информацией?
11. Опишите процесс нормализации позиционной игры.
12. Как изменяется выигрыш игрока в позиционной игре в случае изменения его уровня информированности?

Литература по теме:

Основная литература:

1. Колобашкина Л.В. Основы теории игр. М.: БИНОМ. 2014г.
2. Невежин В.П. Теория Игр. Примеры и задачи. М.: Форум, 2012г.
3. Шикин Е.В. От игр к играм. Математическое введение. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.

Дополнительная литература:

1. Бусыгин В.П., Коковин С.Г., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. Микроэкономический анализ несовершенных рынков. (2000) Новосибирск.
2. Васин А.А. Морозов В.В. Теория игр и модели экономики. − М.; МАКС Пресс, 2005.
3. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. − М.; Наука, 1985.
4. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. − М.; Наука, 1981.
5. Мандель М.Д. Кластерный анализ, М.: Финансы и статистика, 1988.
6. Петросян Л. А. Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов. - М., Книжный дом «Университет», 1998.
7. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие для студентов вузов специальностей «Прикладная математика» и

«Экономическая кибернетика»/ И.М. Макаров, Т.М. Виноградский и др. – М.: Наука, 1982. с.

Интернет-ресурсы:

1. Курс дистанционного обучения по теории игр Высшей школы экономики. // https://www.coursera.org/course/gt.
2. Он-лайн калькулятор решения задач по теории игр. // http://math.semestr.ru/games/mat.php.