

Лекция 2 СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПУТИ НА ПРОЧНОСТЬ

План лекции:

- 2.1. Основное дифференциальное уравнение и его решение.
- 2.2. Определение расчетных напряжений в элементах пути.

2.1. Основное дифференциальное уравнение и его решение

Расчетная схема: возьмем балку на сплошном упругом основании, на которую действует сосредоточенная сила P (рис. 2.1). Примем положение координатных осей с центром в точке O , где приложена вертикальная сила.

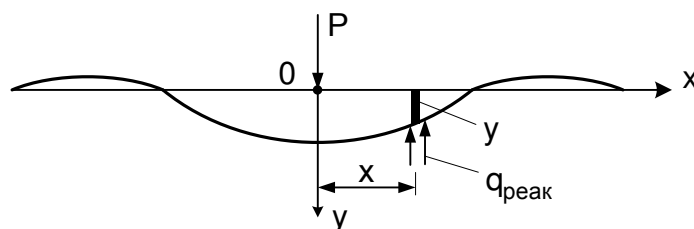


Рис. 2.1. Расчетная схема

Из курса «Сопротивление материалов» известны следующие зависимости:

- 1) изгибающий момент

$$M = -\frac{1}{\rho} EJ, \quad (2.1)$$

где ρ – кривизна,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'', \text{ тогда } M = -y'' \cdot EJ; \quad (2.2)$$

- 2) поперечная (перерезывающая) сила

$$Q = -\frac{dM}{dx} = y''' \cdot EJ; \quad (2.3)$$

- 3) реактивный отпор основания

$$q_{\text{реак}} = -\frac{dQ}{dx} = y^{IV} \cdot EJ. \quad (2.4)$$

Подставляя в уравнение (2.4) вместо $q_{\text{реак}}$ его значение по формуле $q_{\text{реак}} = U \cdot y = -y^{IV} \cdot EJ$, получим

$$y^{IV} + \frac{U}{EJ} \cdot y = 0. \quad (2.5)$$

Это основное дифференциальное уравнение статического расчета пути на прочность.

Для решения этого уравнения составляется однородное дифференциальное уравнение

$$y^{IV} + 4 K^4 \cdot y = 0. \quad (2.6)$$

В данном уравнении введено следующее обозначение

$$4 K^4 = \frac{U}{EJ}. \quad (2.7)$$

Из этого равенства получено

$$K = \sqrt[4]{\frac{U}{4 EJ}}. \quad (2.8)$$

В результате интегрирования линейного дифференциального уравнения четвертого порядка получен общий интеграл (функция y от x) с постоянными коэффициентами

$$y = C_1 e^{Kx} \sin Kx + C_2 e^{Kx} \cos Kx + C_3 e^{-Kx} \sin Kx + C_4 e^{-Kx} \cos Kx. \quad (2.9)$$

Используем известные граничные условия для определения коэффициентов C_i :

1) $x \rightarrow \infty$, $y = 0$, что может быть только при $C_1 = C_2 = 0$;

2) $x = 0$, тогда $y' = \frac{dy}{dx} = 0$ из условия симметрии: касательная к оси

балки в начале координат горизонтальна, $C_3 = C_4 = C$;

3) построим эпюру перерезывающих сил Q (рис. 2.2).

Если взять значение Q чуть правее точки 0

$$(x = +0), \text{ то } \begin{cases} Q = -\frac{P}{2} \\ Q = -y^{III} \cdot EJ \end{cases} \quad \text{из равенства правых}$$

частей уравнений можно определить

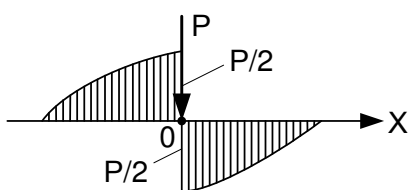


Рис. 2.2. Эпюра Q

$$C_3 = C_4 = C = \frac{P K}{2 U}. \quad (2.10)$$

Тогда упругий прогиб балки в любой точке можно рассчитать по зависимости

$$y = \frac{P K}{2 U} (e^{-Kx} \cdot \sin Kx + e^{-Kx} \cdot \cos Kx), \quad (2.11)$$

где $e^{-Kx}(\sin Kx + \cos Kx) = \eta$ – ордината линии влияния прогиба (рис. 2.3).

Таким образом, **упругий прогиб рельса в любом сечении на расстоянии X от точки приложения силы**

$$y = \frac{K P}{2 U} \eta. \quad (2.12)$$

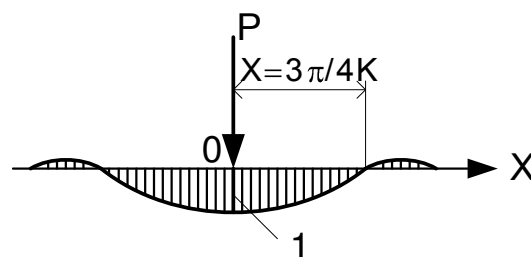


Рис. 2.3. Эпюра η

В точке приложения силы $X = 0$, $\eta = 1$, $y = \frac{K P}{2 U}$ – эта зависимость используется при экспериментальном определении модуля упругости U .

На каком же расстоянии от точки приложения силы прогиб равен нулю? $y = 0$ при $\eta = 0$, $e^{-Kx} \neq 0$, тогда

$$\sin Kx + \cos Kx = 0, \quad \text{при} \quad X = \frac{3 \pi}{4 K}. \quad (2.13)$$

2.2. Определение расчетных напряжений в элементах пути

Осевые напряжения в рельсах от одиночной нагрузки по оси рельса, МПа, от статического воздействия вертикальной силы определяются по формуле

$$\sigma_p^o = \frac{M}{W}, \quad (2.14)$$

где M – изгибающий момент от сосредоточенной силы, кН·м; W – момент сопротивления поперечного сечения рельса, м³.

При определении изгибающего момента по формуле (2.2) берется вторая производная от зависимости (2.12) (упругий прогиб рельса).

После преобразований получим

$$M = \frac{P}{4 K} e^{-Kx} (\cos Kx - \sin Kx). \quad (2.15)$$

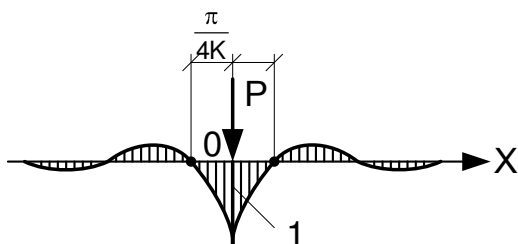


Рис. 2.4. Эпюра μ

Функцию $e^{-Kx}(\cos Kx - \sin Kx) = \mu$ называли ординатой линии влияния изгибающего момента (рис. 2.4).

Под точкой приложения силы $x = 0$, $\mu = 1$.

Из выше написанного уравнения видно, что $\mu = 0$, если $\cos Kx - \sin Kx = 0$ при

$$x = \frac{\pi}{4K}.$$

Тогда изгибающий момент $M = \frac{P}{4K} \mu$, и осевые напряжения в подошве рельса определяются по формуле

$$\sigma_p^o = \frac{P}{4WK} \mu. \quad (2.16)$$

Напряжения смятия в шпалах под подкладкой, МПа, от одиночной нагрузки рассчитываются по формуле

$$\sigma_{ш} = \frac{R_{ш}}{\omega}, \quad (2.17)$$

где $R_{ш}$ – реакция шпалы реального пути на нагрузку, кН (рис. 2.5); ω – опорная площадь подкладки, m^2 .

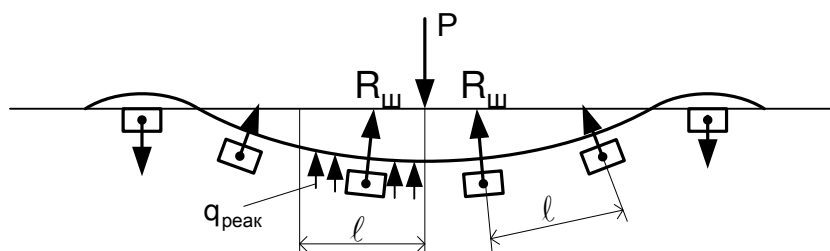


Рис. 2.5. Расчетная схема для определения давления рельса на опору

В реальном пути рельс опирается на отдельные опоры – шпалы. Давление $R_{ш}$ на опору численно равно следующей величине

$$R_{ш} = q_{реак} \cdot l, \quad (2.18)$$

где $q_{реак}$ – погонный реактивный отпор основания; l – расстояние между осями шпал (шпальных ящиков).

Реактивный отпор основания численно равен

$$q_{\text{реак}} = U y; \quad y = \frac{K}{2U} P \eta, \quad (2.19)$$

$$R_{\text{ш}} = U y \ell = U \frac{K}{2U} P \eta \ell = \frac{K\ell}{2} P \eta \quad (2.20)$$

После подстановки формулы (2.20) в (2.17) окончательно получим следующую зависимость

$$\sigma_{\text{ш}} = \frac{K\ell}{2\Omega} P \eta. \quad (2.21)$$

Напряжения в балласте под шпалой в подрельсовом сечении, МПа, (рис. 2.6) от одиночной силы определяются из выражения

$$\sigma_{\text{ш}} = \frac{R_{\text{ш}}}{\Omega}, \quad (2.22)$$

где Ω – площадь полушпалы, м^2 .

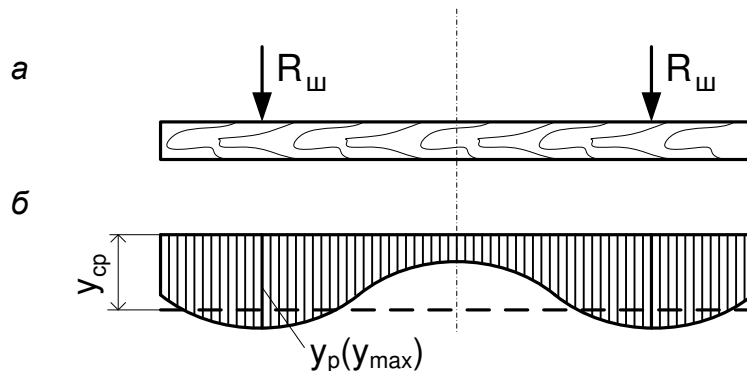


Рис. 2.6. Схема сил, действующих на шпалу (а) и эпюра прогибов (б)

Напряжения под подошвой шпалы пропорциональны просадкам, поэтому напряжение в подрельсовой зоне $\sigma_{\text{б}}$ соответствует y_p , а средним напряжениям $\sigma_{\text{б}}^{\text{ср}} \rightarrow y_{\text{ср}}$:

$$\frac{\sigma_{\text{б}}^{\text{ср}}}{\sigma_{\text{б}}} = \frac{y_{\text{ср}}}{y_p}, \text{ отсюда}$$

$$\sigma_{\text{б}} = \sigma_{\text{б}}^{\text{ср}} \frac{y_p}{y_{\text{ср}}} = \sigma_{\text{б}}^{\text{ср}} \frac{1}{\alpha_p}, \quad (2.22)$$

где $\sigma_6^{cp} = \frac{R_{ш}}{\Omega}$, поэтому $\sigma_6 = \frac{R_{ш}}{\Omega \alpha_p}$, с учетом формулы (2.20)

$$\sigma_6 = \frac{K \ell}{2 \Omega \alpha} P \eta, \quad (2.23)$$

где Ω_α – площадь полушпалы с учетом коэффициента изгиба α_p ; P – вертикальная нагрузка на рельс.

Эпюра напряжений по поперечному сечению шпалы имеет вид, представленный на рис. 2.7.

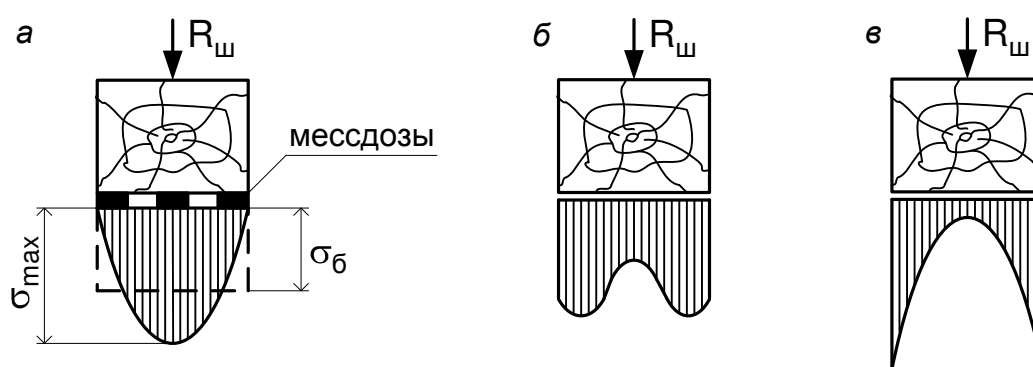


Рис. 2.7. Эпюра напряжений по поперечному сечению шпалы: а – при обычных скоростях движения; б – при движении поезда с большой скоростью; в – при ударе

Определение напряжений в элементах пути при действии системы нагрузок.

У современного подвижного состава тележки могут быть в основном двухосные (рис. 2.8, а), трехосные и четырехосные (рис. 2.8, б).

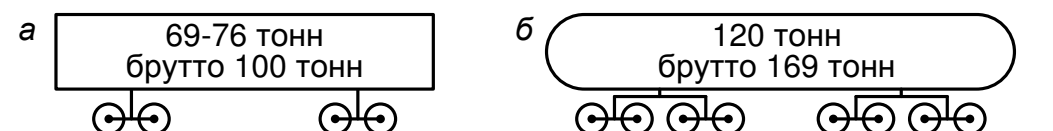


Рис. 2.8. Схема грузовых вагонов:
а – двухосная тележка; б – четырехосная тележка

В практических расчетах действие системы нагрузок на расчетное сечение в любом элементе верхнего строения пути приводит к эквивалентной одной нагрузке с помощью ординат линий влияния η и μ (рис. 2.9).

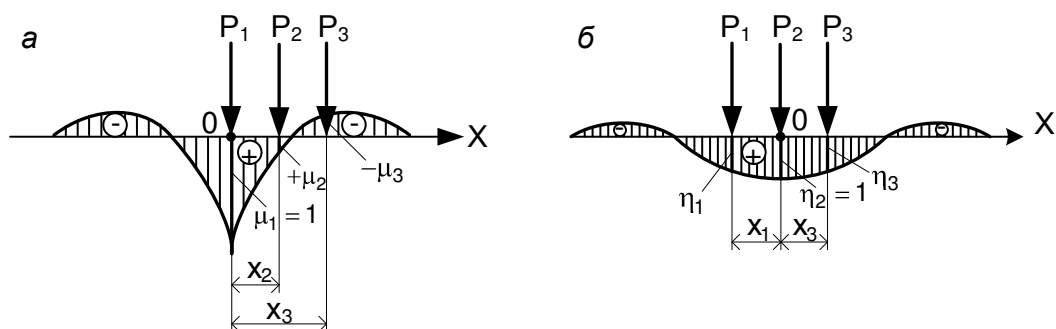


Рис. 2.9. Схема для определения напряжений: а – в рельсе;
б – на шпалу и балласт

Напряжения в рельсе, на шпалу и в балласте определяются по следующим формулам:

$$\sigma_p^0 = \frac{1}{4WK} P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot \mu_2 + P_3 (-\mu_3), \quad (2.24)$$

где $\mu_i = f(K \cdot x_i)$ – принимается по таблицам [2], либо по формуле (2.15); K – коэффициент относительной жесткости рельса и подрельсового основания; x_i – расстояние от расчетной оси до оси i -го колеса;

$$\sigma_{ш} = \frac{K \cdot \ell}{4\omega} (P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot 1 + P_3 \cdot \eta_3); \quad (2.25)$$

$$\sigma_6 = \frac{K \cdot \ell}{2\Omega_\alpha} (P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot 1 + P_3 \cdot \eta_3), \quad (2.26)$$

где $\eta_i = f(K \cdot x_i)$ – принимается по таблицам [2], либо по формуле (2.11).

Влияние соседних колес учитывается при их нахождении от расчетного сечения на расстоянии не более 3,5 м, т. е. $x_i \leq 3,5$ м.

Рекомендуемая литература [1, 2, 6, 8].