Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тульский государственный университет»

Кафедра "Автомобили и автомобильное хозяйство"

Основы научных исследований на транспорте, планирование экспериментов

Методические указания
по выполнению контрольной работы

Тула 2013

Введение

Современный этап научных исследований характеризуется тем, что наряду с классическим натурным экспериментом все шире применяется вычислительный эксперимент, проводимый на математической модели с помощью ЭВМ. Проведение вычислительного эксперимента значительно дешевле и мобильнее, чем проведение аналогичного натурного, и в ряде случаев вычислительный эксперимент является единственным возможным инструментом исследователя.

Математический аппарат теории планирования и обработки результатов экспериментов в полной мере может быть применен как к натурным, так и к вычислительным экспериментам. В данной контрольной работе под проводимым экспериментом будем понимать эксперимент на математической модели, выполненный при помощи ЭВМ.

Основная задача теории планирования и обработки результатов экспериментов – это построение статистической модели изучаемого процесса в виде $Y = f(X_1, X_2, \ldots X_k)$, где X – факторы (входные переменные), Y – функция отклика (выходная переменная). Полученную функцию отклика можно использовать для оптимизации изучаемых процессов, то есть определять значения факторов, при которых явление или процесс будет протекать наиболее эффективно.

Цель и задачи контрольной работы

Целью контрольной работы (ККР) является углубление, закрепление и систематизация знаний студентов по планированию эксперимента и статистической обработке полученных результатов.

При этом во время выполнения ККР относительно полученного варианта задания раскрываются следующие вопросы:

- разработка плана проведения вычислительного эксперимента;
- проведение вычислительного эксперимента на ЭВМ и накопление статистической информации;
- обработка полученных статистических данных с помощью регрессионного анализа и получение формульных зависимостей, связывающих значение выходной переменной Y (отклика) объекта с входными переменными X (факторами);
- графическое представление и анализ полученных результатов (проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели).

Характеристика изучаемого объекта, предмета и цели исследования

Объект исследования – одноцилиндровый четырехтактный дизельный двигатель ТМЗ-450Д производства ОАО АК «Туламашзавод». Технические параметры двигателя приведены в табл. 1

Предмет исследования – процесс функционирования двигателя.

Цель исследования – анализ влияния одного из параметров двигателя (X) на показатель его работы (Y) и получение соответствующей функциональной зависимости.

Для проведения исследований используется математическая модель двигателя ТМЗ-450Д.

Таблица 1

Технические параметры двигателя ТМЗ-450Д

№ п/п	**Параметры двигателя**	**ТМЗ-450Д**
1	Тип дизеля	четырехтактный
2	Число цилиндров	1
3	Расположение цилиндров	вертикальное
4	Диаметр цилиндра, мм	85
5	Ход поршня, мм	80
6	Рабочий объем, см^3	450
7	Степень сжатия	20±1
8	Номинальная мощность, кВт	8,0
9	Частота вращения коленчатого вала при номинальной мощности, мин$^{-1}$	3600±100
10	Максимальный крутящий момент, Н·м	25±1
11	Удельный эффективный расход топлива на номинальном режиме не более, г/кВт·ч	280
12	Масса, кг	52

<u>Порядок выполнения ККР</u>

1. Подготовка плана эксперимента

Используя указанный в задании план проведения эксперимента в кодовом виде, а также область планирования фактора X (X_{min}, X_{max}) подготовить план проведения данного однофакторного эксперимента. Для этого необходимо кодированные значения факторов X^*_j, указанные в таблице, перевести в натуральный вид X_j, где j = 1, 2,…, N; j – номер опыта; N – число опытов.

Расчетные формулы:

– интервал (шаг) варьирования фактора $\Delta X = \dfrac{X_{max} - X_{min}}{2}$;

– натуральное значение основного уровня фактора $\overline{X} = \dfrac{X_{max} + X_{min}}{2}$;

– натуральное значение фактора в j-м опыте $X_j = X_j^* \cdot \Delta X + \overline{X}$

где X^*_j – кодированное значение фактора в j-ом опыте; X_j – натуральное значение фактора в j-ом опыте.

Результаты расчетов представить в виде табл. 2.

Таблица 2

Подготовка плана эксперимента

№ опыта	X^*_j	X_j
1	X^*_1	X_1
2	X^*_2	X_2
….	….	….
N	X^*_N	X_N

В дальнейших расчетах необходимо использовать только натуральные значения факторов X_j.

2. Проведение вычислительного эксперимента

Используя полученный план эксперимента и выданную преподавателем программу расчета (математическую модель) провести на ЭВМ вычислительный эксперимент, состоящий из опытов N (см. рис. 1).

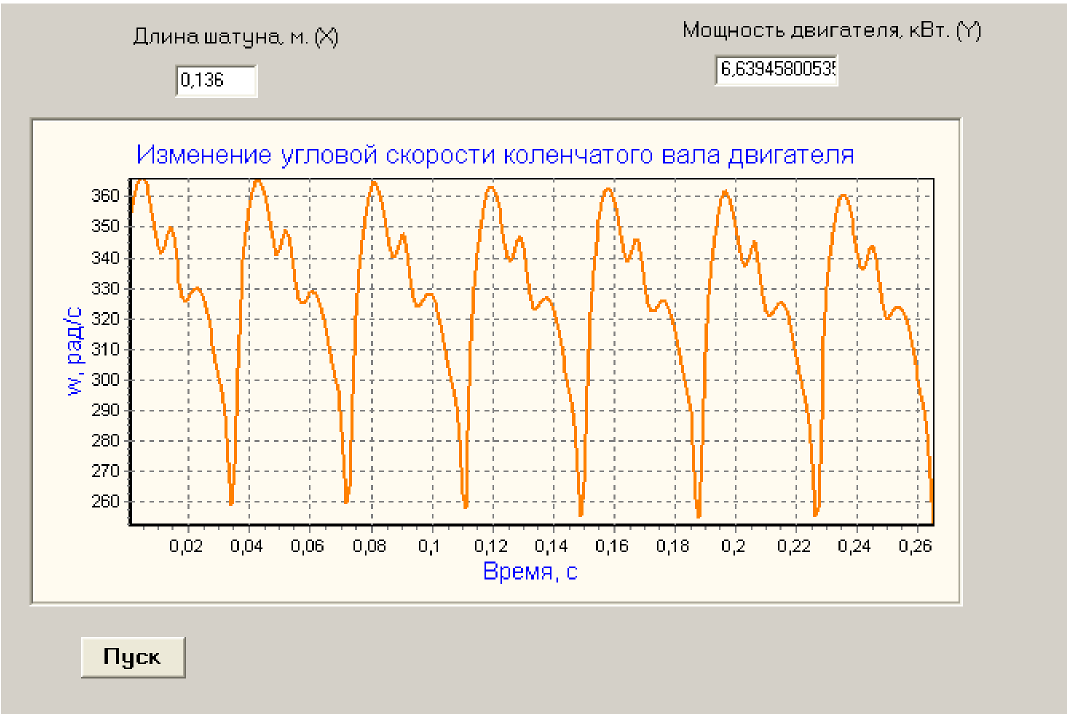

Рис. 1. Математическая модель дизеля ТМЗ-450Д

Полученные результаты представить в виде таблицы 3

Табл. 3

Результаты вычислительного эксперимента

№ опыта	X_j	Y_j
1	X_1	Y_1
2	X_2	Y_2
….	….	….
N	X_N	Y_N

3. Получение формульных зависимостей, связывающих значение выходной переменной Y (отклика) объекта с входной переменной X (фактором)

Для получения функциональных зависимостей вида $Y = f(X)$ наиболее часто используется *метод наименьших квадратов (МНК)*.

При выполнении расчетов в качестве аппроксимирующих функций (уравнений регрессии) использовать следующие полиномиальные зависимости:

– линейную ($Y_p = a_0 + a_1X$);

– квадратичную ($Y_p = a_0 + a_1X + a_2X^2$);

где a_0, a_1 и a_2 неизвестные коэффициенты уравнений.

Получение аппроксимирующих функций является общепринятым подходом к обработке статистической информации. Эти функции в математической статистике называют статистической или регрессионной моделью процесса.

Посредством МНК значения a_0, a_1 и a_2 находятся из условия минимизации суммы квадратов отклонений экспериментальных значений отклика Y_j от получаемых Y_{jp} с помощью регрессионной модели, т. е. путем минимизации суммы:

$$f(a_0, a_1, a_2, ...) = \sum_{j=1}^{N}\left[\Delta Y_j\right]^2 = \sum_{j=1}^{N}\left[Y_j - Y_{jp}\right]^2 = \min .$$

Минимизация суммы квадратов производится обычным способом с помощью дифференциального исчисления путем приравнивания к 0 первых частных производных по a_0, a_1, a_2,….. В итоге получается замкнутая система алгебраических уравнений, с неизвестными a_0, a_1, a_2,…..

Так, например, для уравнения прямой $Y_p = a_0 + a_1X$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = -2\sum_{j=1}^{N}\left(Y_j - a_1X_j - a_0\right)X_j = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = -2\sum_{j=1}^{N}\left(Y_j - a_1X_j - a_0\right) = 0.$$

или

$$\begin{cases} a_1\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 2} + a_0\sum\limits_{j=1}^{N} X_j = \sum\limits_{j=1}^{N} Y_j X_j; \\ a_1\sum\limits_{j=1}^{N} X_j + a_0 \cdot N = \sum\limits_{j=1}^{N} Y_j. \end{cases}$$

В итоге для случая уравнения прямой неизвестные коэффициенты определяются по следующим формулам

$$a_1 = \frac{N\sum\limits_{j=1}^{N} X_j Y_j - \sum\limits_{j=1}^{N} X_j \sum\limits_{j=1}^{N} Y_j}{N\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 2} - \left(\sum\limits_{j=1}^{N} X_j\right)^2};$$

$$a_0 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 2} \sum\limits_{j=1}^{N} Y_j - \sum\limits_{j=1}^{N} X_j \sum\limits_{j=1}^{N} X_j Y_j}{N\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 2} - \left(\sum\limits_{j=1}^{N} X_j\right)^2}$$

.

Для квадратичной зависимости $Y_p = a_0 + a_1X + a_2X^2$ система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_2\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 2} + a_1\sum\limits_{j=1}^{N} X_j + a_0 \cdot N = \sum\limits_{j=1}^{N} Y_j; \\ a_2\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 3} + a_1\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 2} + a_0\sum\limits_{j=1}^{N} X_j = \sum\limits_{j=1}^{N} X_j Y_j; \\ a_2\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 4} + a_1\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 3} + a_0\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 2} = \sum\limits_{j=1}^{N} X_j^{\ 2} Y_j. \end{cases}$$

Вычисляя из N опытов необходимые суммы и решая эту систему, находим значения коэффициентов a_0, a_1 и a_2.

При вычислении приведенных в уравнениях сумм данные целесообразно представлять в виде табл. 4.

Табл. 4

К определению значений коэффициентов

№ опыта	X_j	Y_j	X_j^2	$X_j Y_j$	….
1	X_1	Y_1	X_1^2	$X_1 Y_1$	….
2	X_2	Y_2	X_2^2	$X_2 Y_2$	….
….	….	….	….	….	….
N	X_N	Y_N	X_N^2	$X_N Y_N$	….
Σ	ΣX_j	ΣY_j	ΣX_j^2	$\Sigma X_j Y_j$	….

4. Графический анализ результатов

Полученные результаты представить в графическом виде (результаты опытов в виде отдельных точек, графики $Y_p = a_0 + a_1X$ и $Y_p = a_0 + a_1X + a_2X^2$). Примеры графиков приведены на рис. 2.

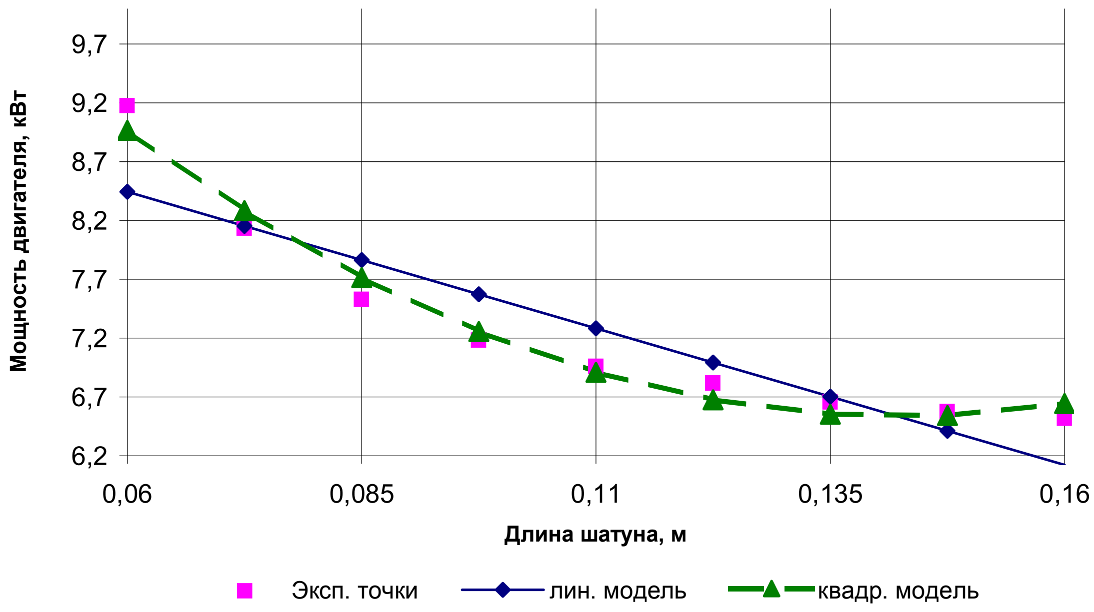

Рис. 2. Пример графического представления результатов

5. Статистический анализ результатов

Для проверки адекватности полученных статистических моделей необходимо определить абсолютные ΔY_j и относительные погрешности ε_j в каждом из опытов.

$$\Delta Y_j = Y_{jp} - Y_j;$$

$$\varepsilon_j = \frac{\Delta Y_j}{Y_j}.$$

где Y_{jp} – расчетное значение функции (отклика) в j-ой точке.

Просматривая значения этих погрешностей, исследователь может легко понять, какова погрешность предсказания в точках, где проводились опыты, устраивают его или нет подобные ошибки. Таким образом, путем сопоставления фактических значений отклика с предсказанными по уравнению регрессии можно получить достаточно надежное свидетельство о точностных характеристиках модели.

Полученные значения погрешностей представить в виде табл. 5 и сравнить для каждой из регрессионных моделей.

Табл. 5

Определение абсолютных и относительных погрешностей

№ опыта	$Y_p = a_0 + a_1X$		$Y_p = a_0 + a_1X + a_2X^2$	
	ΔY_j	ε_j	ΔY_j	ε_j
1	ΔY_1	ε_1	ΔY_1	ε_1
2	ΔY_2	ε_2	ΔY_2	ε_2
….	….	….	….	….
N	ΔY_N	ε_N	ΔY_N	ε_N

С помощью анализа *работоспособности* регрессионной модели выясняют практическую возможность ее использования для решения какой-либо задачи. Это анализ будем проводить, вычисляя коэффициент детерминации (квадрат корреляционного отношения), который является удобным числовым показателем, интегрально характеризующим точностные свойства уравнения регрессии. Коэффициент детерминации R^2 для полученных уравнений регрессии вычисляется по формуле

$$R^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N}\left(Y_{jp} - \overline{Y}\right)^2}{\sum_{j=1}^{N}\left(Y_j - \overline{Y}\right)^2},$$

где $\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j$ – общее среднее значение функции отклика.

При вычислении коэффициента R^2 необходимые для расчета данные целесообразно представлять в виде табл. 6.

Табл. 6

К определению значений коэффициента R^2

№ опыта	$\left(Y_j - \overline{Y}\right)^2$	$Y_p = a_0 + a_1X$	$Y_p = a_0 + a_1X + a_2X^2$
		$\left(Y_{jp} - \overline{Y}\right)^2$	$\left(Y_{jp} - \overline{Y}\right)^2$
1	$\left(Y_1 - \overline{Y}\right)^2$	$\left(Y_{1p} - \overline{Y}\right)^2$	$\left(Y_{1p} - \overline{Y}\right)^2$
2	$\left(Y_2 - \overline{Y}\right)^2$	$\left(Y_{2p} - \overline{Y}\right)^2$	$\left(Y_{2p} - \overline{Y}\right)^2$
….	…..	…..	……
N	$\left(Y_N - \overline{Y}\right)^2$	$\left(Y_{Np} - \overline{Y}\right)^2$	$\left(Y_{Np} - \overline{Y}\right)^2$
Σ	$\sum_{j=1}^{N}\left(Y_j - \overline{Y}\right)^2$	$\sum_{j=1}^{N}\left(Y_{jp} - \overline{Y}\right)^2$	$\sum_{j=1}^{N}\left(Y_{jp} - \overline{Y}\right)^2$

Величина R^2 может изменяться в пределах от 0 до 1. Если R^2 больше 1, то уравнение регрессии выбрано неверно или сделана ошибка при расчете его параметров. Если $R^2 = 1$, регрессионная кривая проходит через все экспериментальные точки. Малое значение R^2 всегда свидетельствует о низкой точности уравнения регрессии. Если $R^2 \geq 0{,}75$ уравнение регрессии, как правило, считают работоспособным.

Сравнить полученные значения R^2 для каждого из уравнений регрессии.

Сделать выводы по результатам работы.

Объем и оформление ККР

Контрольная работа содержит: пояснительную записку в объеме 8 – 12 листов формата А4 с полуторным интервалом, размер шрифта 14 пт. Пояснительная записка должна включать: титульный лист, задание, оглавление, введение, разделы основной части, заключение и список использованной литературы. В пояснительной записке должны быть полностью раскрыты вопросы определенные выше в цели ККР.

Защита ККР

После выполнения, контрольная работа сдается преподавателю на проверку и при положительной оценке проводится ее защита (в виде собеседования).

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972.
2. Красовский Г.И., Филаретов Г.Ф. Планирование эксперимента. – Минск, 1982.
3. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. Справочное руководство. – М.: Наука, 1971.