ЛЕКЦИЯ 7

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

План лекции

4.3. Погрешности измерений

4.4. Оценка случайных погрешностей при многократных измерениях постоянной величины

4.5. Оценка инструментальных погрешностей однократных технических измерений

4.6. Правила округления чисел

4.3. Погрешности измерений

Одним из важнейших этапов экспериментальных исследований является установление точности проводимых измерений, т е. определение погрешностей (ошибок). *Погрешностью или ошибкой измерения* называют отклонение результата измерения физической величины от ее истинного значения.

Если погрешность мала, то ею можно пренебречь. Однако при этом неизбежно возникают два вопроса: во-первых, что понимать под малой погрешностью, и, во-вторых, как оценить величину погрешности.

Ошибка измерения обычно неизвестна, как неизвестно и истинное значение измеряемой величины (исключения составляют измерения известных величин, проведенные со специальной целью исследования ошибок измерения, например для определения точности измерительных приборов). Поэтому одной из основных задач математической обработки результатов эксперимента как раз и является оценка истинного значения измеряемой величины по получаемым результатам.

Рассмотрим классификацию погрешностей измерения.

Различают систематическую и случайную погрешности измерения.

Систематическая погрешность остается постоянной (или закономерно изменяющейся) при повторных измерениях одной и той же величины. К постоянно действующим причинам этой погрешности относятся следующие: недоброкачественные материалы, комплектующие изделия, применяемые для изготовления приборов; неудовлетворительная эксплуатации, неточная градуировка датчика, применение измерительных приборов невысокого класса точности, отклонение теплового режима установки от расчетного (обычно стационарного), нарушение допущений, при которых справедливы расчетные уравнения и т. п. Такие ошибки легко устраняются при отладке измерительной аппаратуры или введением специальных поправок к значению измеряемой величины.

Случайная погрешность изменяется случайным образом при повторных измерениях и обусловлена хаотическим действием множества слабых, и поэтому трудно выявляемых причин. Примером одной из этих причин является считывание показаний со шкалы стрелочного прибора – результат непредсказуемым образом зависит от угла зрения оператора. Оценить случайную погрешность измерения можно лишь методами теории вероятности и математической статистики. Если погрешность в эксперименте существенно превышает ожидаемую, то ее называют грубой ошибкой (промахом), результат измерения в этом случае отбрасывается. Грубые ошибки возникают вследствие нарушения основных условий измерения или в результате недосмотра экспериментатора (например, при плохом освещении вместо 3 записывают 8). При обнаружении грубой ошибки результат измерения следует сразу отбросить, а само измерение повторить (если это возможно). Внешним признаком результата, содержащего грубую ошибку, является его резкое отличие по величине от результатов остальных измерений.

Другой классификацией погрешностей является их разделение на методические и инструментальные погрешности. *Методические погрешности* обусловлены теоретическими ошибками выбранного метода измерений: отклонением теплового режима установки от расчетного (стационарного), нарушением условий, при которых справедливы расчетные уравнения и т.п. *Инструментальные погрешности* вызваны неточной градуировкой датчиков, погрешностями измерительных приборов и т.д. Если методические погрешности в тщательно поставленном опыте можно свести к нулю или учесть введением поправок, то инструментальные погрешности устранить в принципе невозможно – замена одного прибора другим, такого же типа, изменяет результат измерений.

Таким образом, наиболее трудно устраняемыми в эксперименте погрешностями являются случайные и систематические инструментальные погрешности.

4.4. Оценка случайных погрешностей при многократных измерениях постоянной величины

Если измерения провести многократно в одних и тех же условиях, то результаты отдельных измерений одинаково надежны. Такую совокупность измерений x_1, x_2 ...x_n называют равноточными измерениями.

При многократных (равноточных) измерениях одной и той же величины x случайные погрешности приводят к разбросу получаемых значений x_i, которые группируются вблизи истинного значения измеряемой величины Если проанализировать достаточно большую серию равноточных измерений и соответствующих случайных ошибок измерений, то можно выделить четыре свойства случайных ошибок:

1) число положительных ошибок почти равно числу отрицательных;

2) мелкие ошибки встречаются чаще, чем крупные;

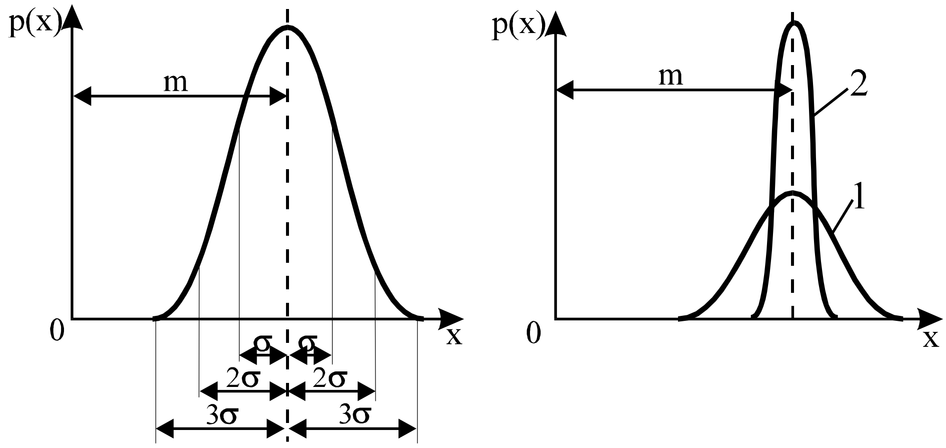
3) величина наиболее крупных ошибок не превосходит некоторого определенного предела, зависящего от точности измерения;

4) частное от деления алгебраической суммы всех случайных ошибок на их общее количество близко к нулю, т.е.

На основе перечисленных свойств при учете некоторых допущений математически достаточно строго выводится закон распределения случайных ошибок, описываемый следующей функцией:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}.$$

Закон распределения случайных ошибок является основным в математической теории погрешностей. Иначе его называют нормальным законом распределения измеряемых данных (распределением Гаусса). Этот закон в виде графика изображен на рис. 4.3 а.



а) *б)*

Рис. 4.3. Характеристики нормального закона распределения

p(x) – плотность вероятности получения отдельных значений x_i (сама вероятность изображается площадью под кривой);

m – математическое ожидание, наиболее вероятное значение измеряемой величины x (соответствующее максимуму графика), стремящееся при бесконечно большом числе измерений к неизвестному истинному значению x; $m = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$, где n – число измерений. Таким образом, математическое ожидание m определяется как среднее арифметическое от всех значений x_i,

σ – среднее квадратическое отклонение измеряемой величины x от значения m; $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{n-1}}$, $(x_i - m)$ – абсолютное отклонение x_i от m,

Площадь под кривой графика в каком-либо интервале значений x представляет собой вероятность получения случайного результата измерения в этом интервале. Для нормального распределения в интервал ±σ (относительно m) попадают 0,62 всех проведенных измерений; в более широком интервале ±2σ содержатся уже 0,95 всех измерений**,** а в интервал ±3σ укладываются практически все результаты измерений (кроме грубых ошибок).

Среднее квадратическое отклонение σ характеризует ширину нормального распределения. Если повысить точность измерения, разброс результатов резко уменьшится за счет уменьшения σ (распределение 2 на рис. 4.3 б уже и острее, чем кривая 1).

Конечной целью эксперимента является определение истинной величины x, к которой при наличии случайных погрешностей можно лишь приблизиться, вычисляя математическое ожидание m для все большего числа экспериментов.

Разброс значений математического ожидания m, вычисленных для различного числа измерений n характеризуется величиной σ_m; $\sigma_m = \sqrt{\dfrac{\sum_1^n (x_i - m)^2}{n(n-1)}}$.

При сравнении с формулой для σ видно, что разброс величины m, как средней арифметической, в $\sqrt{n}$ меньше разброса отдельных измерений x_i. Приведенные выражения для σ_m и σ отражают закон возрастания точности при росте числа измерений. Из него следует, что для повышения точности измерений в 2 раза необходимо сделать вместо одного – четыре измерения; чтобы повысить точность в 3 раза, нужно увеличить число измерений в 9 раз и т.д.

Для ограниченного числа измерений значение m все же отличается от истинного значения величины x, поэтому наряду с вычислением m необходимо указать доверительный интервал, в котором с заданной вероятностью находится истинное значение x. Для технических измерений вероятность 0,95 считают достаточной, поэтому доверительный интервал при нормальном распределении составляет $\pm 2\sigma_m$. Нормальное распределение справедливо для количества измерений $n \geq 30$.

В реальных условиях технический эксперимент редко проводится более 5 – 7 раз, поэтому недостаток статистической информации должен компенсироваться расширением доверительного интервала. В этом случае при ($n < 30$) доверительный интервал определяется как $\pm k_s\sigma_m$, где k_s – коэффициент Стьюдента, определяемый по справочным таблицам

С уменьшением числа измерений n коэффициент k_s увеличивается, что расширяет доверительный интервал, а при увеличении n значение k_s стремится к 2, что соответствует доверительному интервалу нормального распределения $\pm 2\sigma_m$.

Конечный результат многократных измерений постоянной величины **всегда** приводится к виду: $m \pm k_s\sigma_m$.

Таким образом, для оценки случайных погрешностей необходимо выполнить следующие операции:

1). Записать результаты x_1, x_2 ...x_n многократных измерений n постоянной величины;

2). Вычислить среднее значение из n измерений – математическое ожидание $m = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$;

3). Определить погрешности отдельных измерений $x_i - m$;

4). Вычислить квадраты погрешностей отдельных измерений $(x_i - m)^2$; если несколько измерений резко отличаются по своим значениям от остальных измерений, то следует проверить не являются ли они промахом (грубой ошибкой). При исключении одного или нескольких измерений п.п. 1...4 повторить;

5). Определяется величина σ_m – разброс значений математического ожидания m;

6). Для выбранной вероятности (обычно 0,95) и числа проведенных измерений n определяется по справочной таблице коэффициент Стьюдента k_s;

7). Определяются границы доверительного интервала $\pm k_s\sigma_m$

8). Записывается окончательный результат $m \pm k_s\sigma_m$.

4.5. Оценка инструментальных погрешностей однократных технических измерений

Инструментальные погрешности устранить в принципе невозможно. Все средства измерения основаны на определенном методе измерения, точность которого конечна. Погрешность прибора определяется точностью деления шкалы прибора. Так, например, если шкала линейки нанесена через 1 мм, то точность отсчета (половина цены деления $\pm 0{,}5$ мм) не изменить, если применить лупу для рассматривания шкалы.

Различают абсолютную и относительную погрешности измерения.

Абсолютная погрешность Δ измеряемой величины x равна разности измеренного и истинного значений:

$$\Delta = x - x_{ист}. \tag{4.6}$$

Относительная погрешность ε измеряется в долях от найденной величины x:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{x}. \tag{4.7}$$

Для простейших средств измерения – измерительных инструментов абсолютная погрешность измерения Δ равна половине цены деления. Относительная погрешность определяется по формуле (4.7).

Для измерительных приборов в зависимости от характера полосы погрешностей тарировки возможны следующие случаи:

а). Класс точности прибора указан на шкале в числа ε_s, обведенного в круглую рамку. Тогда абсолютная погрешность результата Δ определяется как доля ε_s,%, от показания стрелки прибора x:

$$\Delta = \frac{\varepsilon_s x}{100}, \tag{4.8}$$

Относительная погрешность результата, %:

$$\varepsilon = \varepsilon_s, \tag{4.9}$$

б) Класс точности прибора указан на шкале в виде значения ε_o без рамки. Тогда абсолютная погрешность результата измерений Δ определяется как доля ε_o, %, от всей шкалы (диапазона) прибора $x_д$:

$$\Delta = \frac{\varepsilon_0 x_д}{100}, \tag{4.10}$$

Относительная погрешность измерения, %, находится по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{x}100, \tag{4.11}$$

в). В паспортных данных приводится формула для предельной допускаемой погрешности ε, в %:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{x_д}{x} + \varepsilon_s, \tag{4.12}$$

Абсолютная погрешность результата

$$\Delta = \frac{\varepsilon \cdot x}{100}. \tag{4.13}$$

В тех случаях, когда выполняются косвенные измерения, искомая величина x определяется по формуле, в которую входят значения непосредственно измеряемых величин. Относительная погрешность ε_k косвенного измерения определяется как среднее квадратическое предельных относительных погрешностей отдельных измерений

$$\varepsilon_k = \sqrt{\left(\frac{\Delta_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta_n}{x_n}\right)^2}, \tag{4.14}$$

где x_1, x_2,… x_n – измеренные значения, по которым вычисляется искомая величина x.

Абсолютная погрешность косвенного измерения определяется по формуле

$$\Delta = \varepsilon_k \cdot x \tag{4.15}$$

4.6. Правила округления чисел

Величина погрешности результата измерений физической величины дает представление о том, какие цифры в числовом значении измеряемой величины сомнительны. Поэтому результаты измерений следует округлять перед тем, как производить с ними дальнейшие вычисления.

При округлении и последующей записи результатов измерения необходимо определять значащие цифры данного числа – это все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней записанной цифры справа. При этом нули, следующие из множителя 10^n, не учитываются.

Примеры: 1. Число 12,0 имеет три значащие цифры;

2. Число 30 две значащие цифры;

3. Число $120 \cdot 10^3$ три значащие цифры;

4. Число $0{,}514 \cdot 10$ три значащие цифры;

5. Число 0,0056 две значащие цифры.

Следует различать записи приближенных чисел по количеству значащих цифр.

Примеры:

1. Следует различать цифры 2,4 и 2,40:

– запись 2,4 означает, что верны только цифры целых и десятых; истинное значение числа может быть, например, 2,43 и 2,38.

– запись 2,40 означает, что верны и сотые доли числа; истинное значение числа может быть 2,403 и 2,398, но не 2,421 и не 2,382.

2. Запись 272 означает, что все цифры верны; если за последнюю цифру ручаться нельзя, то число должно быть записано $2{,}7 \cdot 10^2$.

3. Если в числе 4720 верны лишь две первые цифры, оно должно быть записано $47 \cdot 10^2$ или $4{,}7 \cdot 10^3$.

Число, для которого указывается допускаемое отклонение, должно иметь последнюю значащую цифру того же разряда как и последняя значащая цифра отклонения.

Примеры:

Правильно:	Неправильно:
1. $17{,}0 \pm 0{,}2$	$17 \pm 0{,}2$ или $17{,}00 \pm 0{,}2$
2. $12{,}13 \pm 0{,}17$	$12{,}13 \pm 0{,}2$ или $12{,}1 \pm 0{,}17$
3. $46{,}40 \pm 0{,}15$	$46{,}4 \pm 0{,}15$ или $46{,}402 \pm 0{,}15$

Округление числа представляет собой отбрасывание значащих цифр справа до определенного разряда с возможным изменением цифры этого разряда.

Пример: округление числа 132,48 до четырех значащих цифр будет 132,5.

В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не меняется.

Пример: округление числа 12,23 до трех значащих цифр дает 12,2.

В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) равна 5 или больше 5, сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Пример: округление числа 0,145 до двух значащих цифр дает 0,15.

Примечание. В тех случаях, когда следует учитывать результаты предыдущих округлений, поступают следующим образом:

1) если отбрасываемая цифра получилась в результате предыдущего округления в большую сторону, то последняя сохраняемая цифра не меняется (с переходом при необходимости в следующий разряд).

Пример: округление до одной значащей цифры числа 0,15 (полученного после округления числа 0,149) дает 0,1.

2) если отбрасываемая цифра получилась в результате предыдущего округления в меньшую сторону, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу (с переходом, при необходимости, в следующий разряд).

Пример: округление числа 0,25 (полученного в результате предыдущего округления числа 0,252) дает 0,3.

Округление следует выполнять сразу до желаемого количества значащих цифр, а не по этапам.

Пример: округление числа 565,46 до трех значащих цифр дает 565.

Округление по этапам:

I этап – 565,46 округляем до 565,5;

II этап – 565,5 округляем до 566 (ошибочно).