Контрольная работа 3

ИДЗ-3.1

1. Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ и $A_4(x_4, y_4)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вычислить:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) косинус угла между координатной поскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

1.1. $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(-1, 1, 6)$, $A_4(0, 4, -1)$.

1.2. $A_1(3, -1, 2)$, $A_2(-1, 0, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$.

1.3. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(5, 8, 3)$, $A_3(1, 2, -2)$, $A_4(-1, 0, 2)$.

1.4. $A_1(2, 4, 3)$, $A_2(1, 1, 5)$, $A_3(4, 9, 3)$, $A_4(3, 6, 7)$.

1.5. $A_1(9, 5, 5)$, $A_2(-3, 7, 1)$, $A_3(5, 7, 8)$, $A_4(6, 9, 2)$.

1.6. $A_1(0, 7, 1)$, $A_2(2, -1, 5)$, $A_3(1, 6, 3)$, $A_4(3, -9, 8)$.

1.7. $A_1(5, 5, 4)$, $A_2(1, -1, 4)$, $A_3(3, 5, 1)$, $A_4(5, 8, -1)$.

1.8. $A_1(6, 1, 1)$, $A_2(4, 6, 6)$, $A_3(4, 2, 0)$, $A_4(1, 2, 6)$.

1.9. $A_1(7, 5, 3)$, $A_2(9, 4, 4)$, $A_3(4, 5, 7)$, $A_4(7, 9, 6)$.

1.10. $A_1(6, 8, 2)$, $A_2(5, 4, 7)$, $A_3(2, 4, 7)$, $A_4(7, 3, 7)$.

1.11. $A_1(4, 2, 5)$, $A_2(0, 7, 1)$, $A_3(0, 2, 7)$, $A_4(1, 5, 0)$.

1.12. $A_1(4, 4, 10)$, $A_2(7,10, 2)$, $A_3(2, 8, 4)$, $A_4(9, 6, 9)$.

1.13. $A_1(4, 6, 5)$, $A_2(6, 9, 4)$, $A_3(2, 10, 10)$, $A_4(7, 5, 9)$.

1.14. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(8, 7, 4)$, $A_3(5, 10, 4)$, $A_4(4, 7, 8)$.

1.15. $A_1(10, 9, 6)$, $A_2(2, 8, 2)$, $A_3(9, 8, 9)$, $A_4(7, 10, 3)$.

1.16. $A_1(1, 8, 2)$, $A_2(5, 2, 6)$, $A_3(5, 7, 4)$, $A_4(4, 10, 9)$.

1.17. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$.

1.18. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(-5, 7, -7)$, $A_3(5, -3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$.

1.19. $A_1(8, -6, 4)$, $A_2(10, 5, -5)$, $A_3(5, 6, -8)$, $A_4(8, 10, 7)$.

1.20. $A_1(1, -1, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$.

1.21. $A_1(1, -2, 7)$, $A_2(4, 2, 10)$, $A_3(2, 3, 5)$, $A_4(5, 3, 7)$.

1.22. $A_1(4, 2, 10)$, $A_2(1, 2, 0)$, $A_3(3, 5, 7)$, $A_4(2, -3, 5)$.

1.23. $A_1(2, 3, 5)$, $A_2(5, 3, -7)$, $A_3(1, 2, 7)$, $A_4(4, 2, 0)$.

1.24. $A_1(5, 3, 7)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(4, 2, 10)$, $A_4(1, 2, 7)$.

1.25. $A_1(4, 3, 5)$, $A_2(1, 9, 7)$, $A_3(0, 2, 0)$, $A_4(5, 3, 10)$.

1.26. $A_1(3, 2, 5)$, $A_2(4, 0, 6)$, $A_3(2, 6, 5)$, $A_4(6, 4, -1)$.

1.27. $A_1(2, 1, 6)$, $A_2(1, 4, 9)$, $A_3(2, -5, 8)$, $A_4(5, 4, 2)$.

1.28. $A_1(2, 1, 7)$, $A_2(3, 3, 6)$, $A_3(2, -3, 9)$, $A_4(1, 2, 5)$.

1.29. $A_1(2, -1, 7)$, $A_2(6, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 8)$, $A_4(2, -3, 7)$.

1.30. $A_1(0, 4, 5)$, $A_2(3, -2, 1)$, $A_3(4, 5, 6)$, $A_4(3, 3, 2)$.

2. Решить следующие задачи.

2.1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$. (*Ответ*: $-1/15$, $4/15$, $-1/3$.)

2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1, 5, 6)$, $M_2(-1, 7, 10)$. (*Ответ:* $x - y - 2z + 22 = 0$.)

2.3. Найти расстояние от точки $M(2; 0; -0{,}5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$. (*Ответ:* $d = 4$.)

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, -3, 5)$ параллельно плоскости Oxy. (*Ответ:* $z - 5 = 0$.)

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2, 5, -1)$. (*Ответ:* $y + 5z = 0$.)

2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 5, -1)$, $B(-3, 1, 3)$ параллельно оси Oy. (*Ответ:* $4x + 5z - 3 = 0$.)

2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 4, 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$. (*Ответ:* $y - z - 4 = 0$.)

2.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. (*Ответ*: $x + 2y - 2z - 1 = 0$.)

2.9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3, 2, -5)$. (*Ответ:* $3x - y - 7z + 9 = 0$, $5y + 2z = 0$.)

2.10. Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(6, -10, 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oz — отрезок $c = 2$. $\left(\textit{Ответ:} \frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1.\right)$

2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, 3, -4)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a} = (4, 1, -1)$ и $\mathbf{b} = (2, -1, 2)$. (*Ответ:* $x - 10y - 6z + 4 = 0$.)

2.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 1, 0)$, $B(2, -1, -1)$ перпендикулярно к плоскости $5x + 2y + 3z - 7 = 0$. (*Ответ:* $x + 2y - 3z - 3 = 0$.)

2.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$. (*Ответ:* $14x + 9y - z = 0$.)

2.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3, -1, 2)$, $B(2, 1, 4)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (5, -2, -1)$. (*Ответ:* $2x + 9y - 8z + 19 = 0$.)

2.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(5, -2, 3)$, $B(1, -3, 5)$. (*Ответ:* $4x + y - 2z = 0$.)

2.16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2, -3, 3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$. (*Ответ:* -2, -6, 2.)

2.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -1, 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2, 3, -4)$, $M_2(-1, 2, -3)$. (*Ответ:* $3x + y - z = 0$.)

2.18. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z - 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

2.19. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, -4, 1)$ параллельно координатной плоскости Oxz. (*Ответ:* $y + 4 = 0$.)

2.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3, -5, 2)$. (*Ответ:* $2x - 3z = 0$.)

2.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 2, 3)$ и $N(-3, 4, -5)$ параллельно оси Oz. (*Ответ:* $x+2y-5=0$.)

2.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 3, -1)$ и прямую $x=t-3$, $y=2t+5$, $z=-3t+1$. (*Ответ:* $10x+13y+12z-47=0$.)

2.23. Найти проекцию точки $M(4, -3, 1)$ на плоскость $x-2y-z-15=0$. (*Ответ:* $M_1(5, -5, 0)$.)

2.24. Определить, при каком значении B плоскости $x-4y+z-1=0$ и $2x+By+10z-3=0$ будут перпендикулярны. (*Ответ:* $B=3$.)

2.25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2, -3, -4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины. (*Ответ:* $x+y+z+5=0$.)

2.26. При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax+2y-2z-7=0$? (*Ответ:* $A=-1$, $n=-6$.)

2.27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 1, 4)$ перпендикулярно к плоскости $x-4y+3z+2=0$. (*Ответ:* $7x+4y+3z-23=0$.)

2.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x+5y-z+7=0$ и $3x-y+2z-3=0$. (*Ответ:* $9x-5y-16z=0$.)

2.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, 3, -5)$ и $N(-1, 1, -6)$ параллельно вектору $\mathbf{a}=(4, 4, 3)$. (*Ответ:* $2x-5y+4z+31=0$.)

2.30. Определить, при каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x-3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны. (*Ответ:* $C=-9$.)

3. Решить следующие задачи.

3.1. Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ и $x-2y+2z-8=0$, $x+6z-6=0$.

3.2. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

3.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, -3, 3)$ и образующей с осями координат углы, соответственно равные 60°, 45° и 120°. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}.\right)$

3.4. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{6}$ перпендикулярна к прямой

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{aligned}\right\}$$

3.5. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 1, -4)$, $C(0, 2, 3)$, проведенной из вершины C. (*Ответ:* $x = 2t$, $y = -3t + 2$, $z = 17t + 3$.)

3.6. При каком значении n прямая $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = \frac{z}{1}$ параллельна прямой

$$\left.\begin{aligned} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (\textit{Ответ: } n = -2.)$$

3.7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$. (*Ответ:* $M(2, -3, 6)$.)

3.8. Найти проекцию точки $P(3, 1, -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$. (*Ответ:* $P_1(5, 5, 5)$.)

3.9. При каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x + 3y + 2z + 5 = 0$ перпендикулярны? (*Ответ:* $C = 6$.)

3.10. При каком значении A плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$? (*Ответ:* $A = -1$.)

3.11. При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$? (*Ответ:* $m = -6$, $C = 1{,}5$.)

3.12. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $x = 2t + 5$, $y = -3t + 1$, $z = -7t - 4$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-7}.\right)$

3.13. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(0, 0, 2)$, $B(4, 2, 5)$ и $C(12, 6, 11)$. (*Ответ*: лежат.)

3.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -5, 3)$ параллельно прямой $2x - y + 3z - 1 = 0$, $5x + 4y - z - 7 = 0$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}.\right)$

3.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -3, 4)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ и $\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{3}.\right)$

3.16. При каких значениях A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$? (*Ответ*: $A = 4$, $B = -8$.)

3.17. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

3.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $K(-3, 1, -2)$. (*Ответ*: $x + 3y = 0$.)

3.19. Показать, что прямые $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $3x + y - 5z + 1 = 0$, $2x + 3y - 8z + 3 = 0$ перпендикулярны.

3.20. При каком значении D прямая $3x - y + 2z - 6 = 0$, $x + 4y - z + D = 0$ пересекает ось Oz? (*Ответ*: $D = 3$.)

3.21. При каком значении p прямые

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t + 5, \\ y &= -t + 2, \\ z &= pt - 7 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x + 3y + z + 2 &= 0, \\ x - y - 3z - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

параллельны? (*Ответ*: $p = -5$.)

3.22. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 8 = 0$. (*Ответ*: $M(2, 0, 1)$.)

3.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2, -5, 3)$ параллельно плоскости Oxz. (*Ответ*: $y+5=0$.)

3.24. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $x+2y-z+5=0$ с плоскостью, проходящей через ось Oy и точку $M(5, 3, 2)$. (*Ответ*: $x+2y-z+5=0$, $2x-5z=0$.)

3.25. При каких значениях B и D прямая $x-2y+z-9=0$, $3x+By+z+D=0$ лежит в плоскости Oxy? (*Ответ*: $B=-6$, $D=-27$.)

3.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 3, 3)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a}=(-1, -3, 1)$ и $\mathbf{b}=(4, 1, 6)$. (*Ответ*: $19x-10y-11z+25=0$.)

3.27. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $E(3, 4, 5)$ параллельно оси Ox. $\left(\text{Ответ: } \frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-5}{0}.\right)$

3.28. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2, 3, 1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}.\right)$

3.29. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, -5, 3)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$ и $x=3t+1$, $y=-t-5$, $z=2t+3$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x-1}{5}=\frac{y+5}{-7}=\frac{z-3}{-11}.\right)$

3.30. Найти точку, симметричную точке $M(4, 3, 10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$. (*Ответ*: $M_1(2, 9, 6)$.)

Решение типового варианта

1. Даны четыре точки $A_1(4, 7, 8)$, $A_2(-1, 13, 0)$, $A_3(2, 4, 9)$, $A_4(1, 8, 9)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_4N, параллельной прямой A_1A_2.

Вычислить:

д) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

е) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

▶ а) Используя формулу (3.4), составляем уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $6x - 7y - 9z + 97 = 0$;

б) Учитывая уравнения прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), уравнения прямой A_1A_2 можно записать в виде

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z-8}{8};$$

в) Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора прямой $\mathbf{s}$ можно взять нормальный вектор $\mathbf{n} = (6, -7, -9)$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M с учетом уравнений (3.8) запишется в виде

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9};$$

г) Так как прямая A_4N параллельна прямой A_1A_2, то их направляющие векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ можно считать совпадающими: $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = (5, -6, 8)$. Следовательно, уравнение прямой A_4N имеет вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-8}{-6} = \frac{z-9}{8};$$

д) По формуле (3.18)

$$\sin\varphi = \frac{|6\cdot 5 + (-7)(-6) + (-9)8|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2}\,\sqrt{5^2 + (6)^2 + 8^2}} =$$

$$= \frac{34}{\sqrt{11}\,\sqrt{166}} \approx 0{,}8;$$

е) В соответствии с формулой (3.5)

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{0\cdot 6 + 0\cdot(-7) + 1\cdot(-9)}{\sqrt{1}\,\sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2}} =$$

$$= \frac{-9}{\sqrt{166}} \approx -0{,}7. \ ◀$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(4, 3, 1)$ и $N(-2, 0, -1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1, 1, -1)$ и $B(-3, 1, 0)$.

▶ Согласно формуле (3.9), уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{1}.$$

Если плоскость проходит через точку $M(4, 3, 1)$, то ее уравнение можно записать в виде $A(x-4)+B(y-3)+C(z-1)=0$. Так как эта плоскость проходит и через точку $N(-2, 0, -1)$, то выполняется условие

$$A(-2-4)+B(0-3)+C(-1-1)=0 \text{ или}$$
$$6A+3B+2C=0.$$

Поскольку искомая плоскость параллельна найденной прямой AB, то с учетом условия параллельности (3.16) имеем:

$$-4A+OB+1C=0 \text{ или } 4A-C=0.$$

Решая систему

$$\left.\begin{aligned}6A+3B+2C&=0,\\ 4A\qquad\quad -C&=0,\end{aligned}\right\}$$

находим, что $C=4A$, $B=-\frac{14}{3}A$. Подставив полученные значения C и B в уравнение искомой плоскости, имеем

$$A(x-4)-\frac{14}{3}A(y-3)+4A(z-1)=0.$$

Так как $A\neq 0$, то полученное уравнение эквивалентно уравнению

$$3(x-4)-14(y-3)+12(z-1)=0. \ ◀$$

3. Найти координаты x_2, y_2, z_2 точки M_2, симметричной точке $M_1(6, -4, -2)$ относительно плоскости $x+y+z-3=0$.

▶ Запишем параметрические уравнения прямой M_1M_2, перпендикулярной к данной плоскости: $x=6+t$, $y=-4+t$, $z=-2+t$. Решив их совместно с уравнением данной плоскости, найдем $t=1$ и, следовательно, точку M пересечения прямой M_1M_2 с данной плоскостью: $M(7, -3, -1)$. Так как точка M является серединой отрезка M_1M_2, то верны равенства (см. пример 1 из § 2.2):

$$7=\frac{6+x_2}{2},\quad -3=\frac{-4+y_2}{2},\quad -1=\frac{-2+z_2}{2},$$

из которых находим координаты точки M_2: $x_2 = 8$, $y_2 = -2$, $z_2 = 0$. ◀

ИДЗ-3.2

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

1.1. $A(-2, 4)$, $B(3, 1)$, $C(10, 7)$,
1.2. $A(-3, -2)$, $B(14, 4)$, $C(6, 8)$,
1.3. $A(1, 7)$, $B(-3, -1)$, $C(11, -3)$,
1.4. $A(1, 0)$, $B(-1, 4)$, $C(9, 5)$,
1.5. $A(1, -2)$, $B(7, 1)$, $C(3, 7)$,
1.6. $A(-2, -3)$, $B(1, 6)$, $C(6, 1)$,
1.7. $A(-4, 2)$, $B(-6, 6)$, $C(6, 2)$,
1.8. $A(4, -3)$, $B(7, 3)$, $C(1, 10)$,
1.9. $A(4, -4)$, $B(8, 2)$, $C(3, 8)$,
1.10. $A(-3, -3)$, $B(5, -7)$, $C(7, 7)$,
1.11. $A(1, -6)$, $B(3, 4)$, $C(-3, 3)$,
1.12. $A(-4, 2)$, $B(8, -6)$, $C(2, 6)$,
1.13. $A(-5, 2)$, $B(0, -4)$, $C(5, 7)$,
1.14. $A(4, -4)$, $B(6, 2)$, $C(-1, 8)$,
1.15. $A(-3, 8)$, $B(-6, 2)$, $C(0, -5)$,
1.16. $A(6, -9)$, $B(10, -1)$, $C(-4, 1)$,
1.17. $A(4, 1)$, $B(-3, -1)$, $C(7, -3)$,
1.18. $A(-4, 2)$, $B(6, -4)$, $C(4, 10)$,
1.19. $A(3, -1)$, $B(11, 3)$, $C(-6, 2)$,
1.20. $A(-7, -2)$, $B(-7, 4)$, $C(5, -5)$,
1.21. $A(-1, -4)$, $B(9, 6)$, $C(-5, 4)$,
1.22. $A(10, -2)$, $B(4, -5)$, $C(-3, 1)$,
1.23. $A(-3, -1)$, $B(-4, -5)$, $C(8, 1)$,
1.24. $A(-2, -6)$, $B(-3, 5)$, $C(4, 0)$,
1.25. $A(-7, -2)$, $B(3, -8)$, $C(-4, 6)$,
1.26. $A(0, 2)$, $B(-7, -4)$, $C(3, 2)$,
1.27. $A(7, 0)$, $B(1, 4)$, $C(-8, -4)$,
1.28. $A(1, -3)$, $B(0, 7)$, $C(-2, 4)$,

1.29. $A(-5, 1)$, $B(8, -2)$, $C(1, 4)$,
1.30. $A(2, 5)$, $B(-3, 1)$, $C(0, 4)$.

2. Решить следующие задачи.

2.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y-7=0$ и $x+3y-6=0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3. (*Ответ*: $x=3$.)

2.2. Найти проекцию точки $A(-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2, -3)$ и $C(-5, 1)$. (*Ответ*: $A_1(-12, 5)$.)

2.3. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ и точка $M(4, 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C. (*Ответ*: $C(8, 4)$.)

2.4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y-x=3$. (*Ответ*: $x-2y+4=0$.)

2.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ и точку пересечения прямых $2x-y=5$ и $x+y=1$. (*Ответ*: $x=2$.)

2.6. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, если $A(3, 6)$, $B(5, 2)$, $C(-1, -3)$, $D(-5, 5)$.

2.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(2, 5)$, $C(1, 0)$. (*Ответ*: $x+5y-8=0$.)

2.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 1)$ параллельно прямой MN, если $M(-3, -2)$, $N(1, 6)$. (*Ответ*: $2x-y+5=0$.)

2.9. Найти точку, симметричную точке $M(2, -1)$ относительно прямой $x-2y+3=0$. (*Ответ*: $M_1(-4/5, 23/5)$.)

2.10. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1, -3)$, $B(3, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, -5)$. (*Ответ*: $O(3, 1/3)$.)

2.11. Через точку пересечения прямых $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс. (*Ответ*: $y=-1$.)

2.12. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC $4x+y=12$, его высот BH $5x-4y=12$ и AM $x+y=6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC. (*Ответ*: $7x-7y-16=0$, $4x+5y-28=0$.)

2.13. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ и точка пересечения его высот $H(1, 2)$. Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH. (*Ответ*: $M(10/17, 62/17)$.)

2.14. Найти уравнения высот треугольника ABC, проходящих через вершины A и B, если $A(-4, 2)$, $B(3, -5)$, $C(5, 0)$. (*Ответ*: $3x+5y+2=0$, $9x+2y-28=0$.)

2.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(6, -3)$. (*Ответ*: $M(3, -2/3)$.)

2.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC, зная уравнения его сторон: AB — $2x-y-3=0$, AC — $x+5y-7=0$, BC — $3x-2y+13=0$. (*Ответ*: $2x+3y-7=0$.)

2.17. Дан треугольник с вершинами $A(3, 1)$, $B(-3, -1)$ и $C(5, -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C. (*Ответ*: $2x+y+2=0$, $d=54/\sqrt{17}\approx 13{,}1$.)

2.18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$ и $2x+3y+4=0$. (*Ответ*: $6x+11y=0$.)

2.19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат. (*Ответ*: $5x-3y-25=0$, $5x-3y+9=0$.)

2.20. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$. Найти уравнения его диагоналей. (*Ответ*: $y=0$, $x=3$.)

2.21. Составить уравнения медианы CM и высоты CK треугольника ABC, если $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$. (*Ответ*: $7x-y+3=0$ (CM), $4x+3y+16=0$ (CK).)

2.22. Через точку $P(5, 2)$ провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox; в) параллельную оси Oy. (*Ответ*: $x+y-7=0$, $y=2$, $x=5$.)

2.23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45°, б) 90°, в) 0°. (*Ответ*: $x-y+5=0$, $x+2=0$, $y-3=0$.)

2.24. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками $A(-6, -6)$ и $B(-3, -1)$ и имеющая абсциссу, равную 3? (*Ответ*: $y=9$.)

2.25. Через точку пересечения прямых $2x-5y-1=0$ и $x+4y-7=0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4, -3)$ и $B(-1, 2)$ в отношении $\lambda=2/3$. (*Ответ*: $2x-y-5=0$.)

2.26. Известны уравнения двух сторон ромба $2x-5y-1=0$ и $2x-5y-34=0$ и уравнение одной из

его диагоналей $x+3y-6=0$. Найти уравнение второй диагонали. (*Ответ*: $3x-y-23=0$.)

2.27. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3, 1)$, $B(7, 5)$ и $C(5, -3)$. (*Ответ*: $E(3, 1)$.)

2.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 1)$ под углом 45° к прямой $2x+3y=6$. (*Ответ*: $x-5y+6=0$, $5x+y+4=0$.)

2.29. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ и координаты его вершины $A(2, 3)$. Найти уравнения сторон AB и AC треугольника. (*Ответ*: $2x-y-1=0$ (AB), $3x+2y-12=0$ (AC).)

2.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-2y=0$, $x-y-1=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, -1)$. Найти уравнения двух других сторон. (*Ответ*: $x-y-7=0$, $x-2y-10=0$.)

Решение типового варианта

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(4, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(2, 7)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

▶ а) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), получим уравнение стороны AB:

$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3},$$

откуда

$$6(x-4)=7(y-3) \text{ или } 6x-7y-3=0;$$

б) Согласно уравнению (3.20), угловой коэффициент прямой AB $k_1=6/7$. С учетом условия перпендикулярности прямых AB и CH (см. формулу (3.28)) угловой коэффициент высоты CH $k_2=-7/6$ ($k_1k_2=-1$). По точке $C(2, 7)$ и угловому коэффициенту $k_2=-7/6$ составляем уравнение высоты CH (см. уравнение (3.21)):

$$y-7=-\frac{7}{6}(x-2) \text{ или } 7x+6y-56=0;$$

в) По известным формулам (см. § 2.2) находим координаты x, y середины M отрезка BC:

$$x=(-3+2)/2=-1/2,\ y=(-3+7)/2=2.$$

Теперь по двум известным точкам A и M составляем уравнение медианы AM:

$$\frac{x-4}{-1/2-4}=\frac{y-3}{2-3} \text{ или } 2x-9y+19=0;$$

г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы AM и высоты CH составляем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}7x+6y-56=0,\\ 2x-9y+19=0.\end{aligned}\right\}$$

Решая ее, получаем $N(26/5,\ 49/15)$;

д) Так как прямая, проходящая через вершину C, параллельна стороне AB, то их угловые коэффициенты равны $k_1=6/7$. Тогда, согласно уравнению (3.21), по точке C и угловому коэффициенту k_1 составляем уравнение прямой CD:

$$y-7=\frac{6}{7}(x-2) \text{ или } 6x-7y+37=0;$$

е) Расстояние от точки C до прямой AB вычисляем по формуле (3.29):

$$d=|CH|=\frac{|6\cdot 2-7\cdot 7-3|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\frac{40}{\sqrt{85}}\approx 4{,}4.$$

Решение данной задачи проиллюстрировано на рис. 3.4. ◁

2. Известны вершины $O(0,\ 0)$, $A(-2,\ 0)$ параллелограмма $OACD$ и точка пересечения его диагоналей $B(2,\ -2)$. Записать уравнения сторон параллелограмма.

▶ Уравнение стороны OA можно записать сразу: $y=0$. Далее, так как точка B является серединой диагонали AD (рис. 3.5), то по формулам деления отрезка пополам (см. § 2.2) можно вычислить координаты вершины $D(x,\ y)$:

$$2=\frac{-2+x}{2},\quad -2=\frac{0+y}{2},$$

откуда $x=6$, $y=-4$.

Теперь можно найти уравнения всех остальных сторон. Учитывая параллельность сторон OA и CD, составляем уравнение стороны CD: $y=-4$. Уравнение стороны OD составляем по двум известным точкам:

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-0}{-4-0},$$

откуда $y=-\frac{2}{3}x$, $2x+3y=0$.

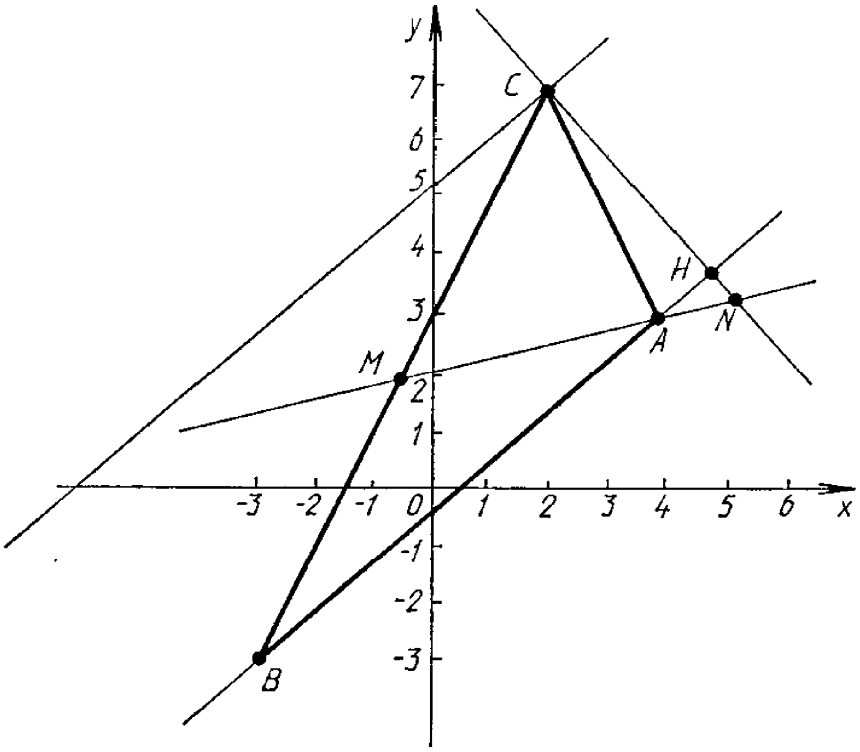

Рис. 3.4

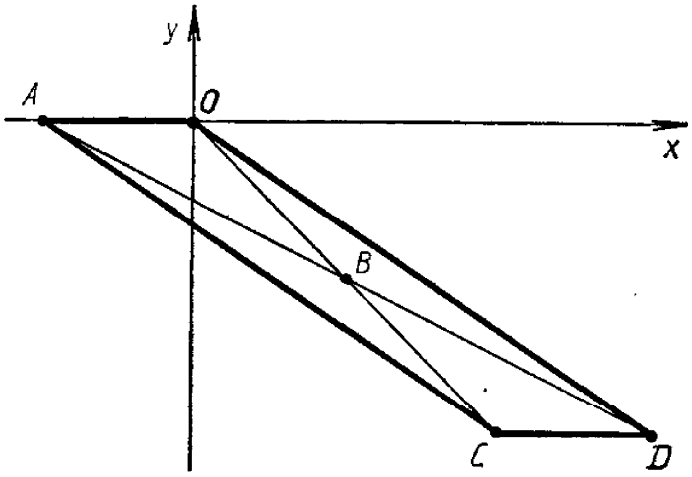

Рис. 3.5

Наконец, уравнение стороны AC находим, учитывая тот факт, что она проходит через известную точку $A(-2,\ 0)$ параллельно известной прямой OD (см. уравнение (3.21)):

$$y-0=-\frac{2}{3}(x+2) \text{ или } 2x+3y+4=0. \blacktriangleleft$$