Контрольная работа №4

ИДЗ-4.1

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B — точки, лежащие на кривой, F — фокус, a — большая (действительная) полуось, b — малая (мнимая) полуось, ε — эксцентриситет, $y = \pm kx$ — уравнения асимптот гиперболы, D — директриса кривой, $2c$ — фокусное расстояние).

1.1. а) $b = 15$, $F(-10, 0)$; б) $a = 13$, $\varepsilon = 14/13$; в) D: $x = -4$.

1.2. а) $b = 2$, $F(4\sqrt{2}, 0)$; б) $a = 7$, $\varepsilon = \sqrt{85}/7$; в) D: $x = 5$.

1.3. а) $A(3, 0)$, $B(2, \sqrt{5}/3)$; б) $k = 3/4$, $\varepsilon = 5/4$; в) D: $y = -2$.

1.4. а) $\varepsilon = \sqrt{21}/5$, $A(-5, 0)$; б) $A(\sqrt{80}, 3)$, $B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$; в) D: $y = 1$.

1.5. а) $2a = 22$, $\varepsilon = \sqrt{57}/11$; б) $k = 2/3$, $2c = 10\sqrt{13}$; в) ось симметрии Ox и $A(27, 9)$.

1.6. а) $b = \sqrt{15}$, $\varepsilon = \sqrt{10}/25$; б) $k = 3/4$, $2a = 16$; в) ось симметрии Ox и $A(4, -8)$.

1.7. а) $a = 4$, $F = (3, 0)$; б) $b = 2\sqrt{10}$, $F(-11, 0)$; в) D: $x = -2$.

1.8. а) $b = 4$, $F = (9, 0)$; б) $a = 5$, $\varepsilon = 7/5$; в) D: $x = 6$.

1.9. а) $A(0, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{14/3}, 1)$; б) $k = \sqrt{21}/10$, $\varepsilon = 11/10$; в) D: $y = -4$.

1.10. а) $\varepsilon = 7/8$, $A(8, 0)$; б) $A(3, -\sqrt{3/5})$, $B(\sqrt{13/5}, 6)$; в) D: $y = 4$.

1.11. а) $2a = 24$, $\varepsilon = \sqrt{22}/6$; б) $k = \sqrt{2/3}$, $2c = 10$; в) ось симметрии Ox и $A(-7, -7)$.

1.12. а) $b = 2$, $\varepsilon = 5\sqrt{29}/29$; б) $k = 12/13$, $2a = 26$; в) ось симметрии Ox и $A(-5, 15)$.

1.13. а) $a=6$, $F(-4, 0)$; б) $b=3$, $F(7, 0)$; в) D: $x=-7$.

1.14. а) $b=7$, $F(5, 0)$; б) $a=11$, $\varepsilon=12/11$; в) D: $x=10$.

1.15. а) $A(-\sqrt{17/3}, 1/3)$, $B(\sqrt{21}/2, 1/2)$; б) $k=1/2$, $\varepsilon=\sqrt{5}/2$; в) D: $y=-1$.

1.16. а) $\varepsilon=3/5$, $A(0, 8)$; б) $A(\sqrt{6}, 0)$, $B(-2\sqrt{2}, 1)$; в) D: $y=9$.

1.17. а) $2a=22$, $\varepsilon=10/11$; б) $k=\sqrt{11}/5$, $2c=12$; в) ось симметрии Ox и $A(-7, 5)$.

1.18. а) $b=5$, $\varepsilon=12/13$; б) $k=1/3$, $2a=6$; в) ось симметрии Oy и $A(-9, 6)$.

1.19. а) $a=9$, $F(7, 0)$; б) $b=6$, $F(12, 0)$; в) D: $x=-1/4$.

1.20. а) $b=5$, $F(-10, 0)$; б) $a=9$, $\varepsilon=4/3$; в) D: $x=12$.

1.21. а) $A(0, -2)$, $B(\sqrt{15}/2, 1)$; б) $k=2\sqrt{10}/9$, $\varepsilon=11/9$; в) D: $y=5$.

1.22. а) $\varepsilon=2/3$, $A(-6, 0)$; б) $A(\sqrt{8}, 0)$, $B(\sqrt{20}/3, 2)$; в) D: $y=1$.

1.23. а) $2a=50$, $\varepsilon=3/5$; б) $k=\sqrt{29}/14$, $2c=30$; в) ось симметрии Oy и $A(4, 1)$.

1.24. а) $b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=7/8$; б) $k=5/6$, $2a=12$; в) ось симметрии Oy и $A(-2, 3\sqrt{2})$.

1.25. а) $a=13$, $F(-5, 0)$; б) $b=44$, $F(-7, 0)$; в) D: $x=-3/8$.

1.26. а) $b=7$, $F(13, 0)$; б) $b=4$, $F(-11, 0)$; в) D: $x=13$.

1.27. а) $A(-3, 0)$, $B(1, \sqrt{40}/3)$; б) $k=\sqrt{2/3}$, $\varepsilon=\sqrt{15}/3$; в) D: $y=4$.

1.28. а) $\varepsilon=5/6$, $A(0, -\sqrt{11})$; б) $A(\sqrt{32/3}, 1)$, $B(\sqrt{8}, 0)$; в) D; $y=-3$.

1.29. а) $2a=30$, $\varepsilon=17/15$; б) $k=\sqrt{17}/8$, $2c=18$; в) ось симметрии Oy и $A(4, -10)$.

1.30. а) $b=2\sqrt{2}$, $\varepsilon=7/9$; б) $k=\sqrt{2}/2$, $2a=12$; в) ось симметрии Oy и $A(-45, 15)$.

2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке A.

2.1. Вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156$, $A(0, -2)$.

2.2. Вершины гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$, $A(0, 4)$.

2.3. Фокусы гиперболы $24y^2 - 25x^2 = 600$, $A(0, -8)$.

2.4. $O(0, 0)$, A — вершина параболы $y^2 = 3(x - 4)$.

2.5. Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$, $A(0, 6)$.

2.6. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$, $A(0, -3)$.

2.7. Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A — его верхняя вершина.

2.8. Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, $A(0, -2)$.

2.9. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, $A(0, -4)$.

2.10. $O(0, 0)$, A — вершина параболы $y^2 = -(x + 5)/2$.

2.11. Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, $A(1, 7)$.

2.12. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$, $A(0, 6)$.

2.13. Фокусы эллипса $16x^2 + 41y^2 = 656$, A — его нижняя вершина.

2.14. Вершину гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$, $A(0, 4)$.

2.15. Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$, $A(0, 5)$.

2.16. $B(1, 4)$, A — вершина параболы $y^2 = (x - 4)/3$.

2.17. Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $A(-1, -3)$.

2.18. Левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, $A(0, -6)$.

2.19. Фокусы эллипса $24x^2 - 25y^2 = 600$, A — его верхняя вершина.

2.20. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 - 48$, $A(1, 3)$.

2.21. Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, $A(-1, -2)$.

2.22. $B(2, -5)$, A — вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$.

2.23. Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, $A(2, -7)$.

2.24. Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $A(-2, 5)$.

2.25. Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, A — его нижняя вершина.

2.26. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, $A(-5, -2)$.

2.27. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, $A(0, -6)$.

2.28. $B(3, 4)$, A — вершина параболы $y^2 = (x + 7)/4$.

2.29. Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837$, $A(1, 8)$.

2.30. Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, $A(2, 8)$.

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям.

3.1. Отстоит от прямой $x = -6$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(1, 3)$.

3.2. Отстоит от прямой $x = -2$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(4, 0)$.

3.3. Отстоит от прямой $y = -2$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(5, 0)$.

3.4. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, 3)$ и $B(-1, 2)$ равно $3/4$.

3.5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(4, 0)$ и $B(-2, 2)$ равна 28.

3.6. Отстоит от точки $A(1, 0)$ на расстоянии, в пять раз меньшем, чем от прямой $x = 8$.

3.7. Отстоит от точки $A(4, 1)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, -1)$.

3.8. Отстоит от прямой $x = -5$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(6, 1)$.

3.9. Отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

3.10. Отношение расстояний от точки M до точек $A(-3, 5)$ и $B(4, 2)$ равно $1/3$.

3.11. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, -1)$ и $B(3, 2)$ равна 40,5.

3.12. Отстоит от точки $A(2, 1)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = -5$.

3.13. Отстоит от точки $A(-3, 3)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(5, 1)$.

3.14. Отстоит от прямой $x = 8$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(-1, 7)$.

3.15. Отстоит от прямой $x = 9$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от точки $A(-1, 2)$.

3.16. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, -4)$ и $B(3, 5)$ равно $2/3$.

3.17. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3, 3)$ и $B(4, 1)$ равна 31.

3.18. Отстоит от точки $A(0, -5)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от прямой $x = 3$.

3.19. Отстоит от точки $A(4, -2)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $B(1, 6)$.

3.20. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(1, 4)$.

3.21. Отстоит от прямой $x = 14$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $A(2, 3)$.

3.22. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -2)$ и $B(4, 6)$ равно $3/5$.

3.23. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, 3)$ и $B(2, -4)$ равна 65.

3.24. Отстоит от точки $A(3, -4)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = 5$.

3.25. Отстоит от точки $A(5, 7)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, 1)$.

3.26. Отстоит от прямой $x = 2$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

3.27. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(3, 1)$.

3.28. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -5)$ и $B(4, 1)$ равно $1/4$.

3.29. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1, 2)$ и $B(3, -1)$ равна 18,5.

3.30. Отстоит от точки $A(1, 5)$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от прямой $x = -1$.

4. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат.

4.1. $\rho = 2 \sin 4\varphi$.
4.2. $\rho = 2(1 - \sin 2\varphi)$.
4.3. $\rho = 2 \sin 2\varphi$.
4.4. $\rho = 3 \sin 6\varphi$.
4.5. $\rho = 2/(1 + \cos \varphi)$.
4.6. $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$.
4.7. $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.
4.8. $\rho = 3(1 - \cos 2\varphi)$.
4.9. $\rho = 4 \sin 3\varphi$.
4.10. $\rho = 4 \sin 4\varphi$.
4.11. $\rho = 3(\cos \varphi + 1)$.
4.12. $\rho = 1/(2 - \sin \varphi)$.
4.13. $\rho = 5(1 - \sin 2\varphi)$.
4.14. $\rho = 3(2 - \cos 2\varphi)$.
4.15. $\rho = 6 \sin 4\varphi$.
4.16. $\rho = 2 \cos 6\varphi$.
4.17. $\rho = 3/(1 - \cos 2\varphi)$.
4.18. $\rho = 2(1 - \cos 3\varphi)$.
4.19. $\rho = 3(1 - \cos 4\varphi)$.
4.20. $\rho = 5(2 - \sin \varphi)$.
4.21. $\rho = 3 \sin 4\varphi$.
4.22. $\rho = 2 \cos 4\varphi$.
4.23. $\rho = 4(1 + \cos 2\varphi)$.
4.24. $\rho = 1/(2 - \cos 2\varphi)$.
4.25. $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$.
4.26. $\rho = 3(1 + \cos 2\varphi)$.
4.27. $\rho = 3 \cos 2\varphi$.
4.28. $\rho = 2 \sin 3\varphi$.
4.29. $\rho = 2/(2 - \cos \varphi)$.
4.30. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$.

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$).

5.1. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$
5.2. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x = 4\cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$
5.4. $\begin{cases} x = 2\sin t, \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$
5.6. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 1 - \sin t. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = 2\sin 2t. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2(1 - \sin t). \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x = 4\cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x = 4\cos 3t, \\ y = 2\sin 3t. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3(2 - \sin t). \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} x = 5\cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4(1 - \sin t). \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t. \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

Решение типового варианта

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5}, 0)$; б) гиперболы с мнимой полуосью, равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13}, 0)$; в) параболы, имеющей директрису $x = -3$.

▶ а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию задачи большая полуось $a = 3$, $c = \sqrt{5}$. Для эллипса выполняется равенство $b^2 = a^2 - c^2$. Подставив в него значения a и c, найдем $b^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$. Искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. По условию мнимая полуось $b=2$, а $c=\sqrt{13}$. Для гиперболы справедливо равенство $b^2=c^2-a^2$. Поэтому $a^2=c^2-b^2=(\sqrt{13})^2-2^2=9$. Записываем искомое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;$$

в) Каноническое уравнение параболы в данном случае должно иметь вид $y^2=2px$, а уравнение ее директрисы $x=-p/2$. Но по условию задачи уравнение директрисы $x=-3$. Поэтому $-p/2=-3$, $p=6$ и искомое каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2=12x. \blacktriangleleft$$

2. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2+4y^2=4$ и имеющей центр в его верхней вершине.

▶ Для данного эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ верхняя вершина $A(0,\ 1)$, $a=2$, $b=1$. Поэтому

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$$

и фокусы находятся в точках $F_1(-\sqrt{3},\ 0)$, $F_2(\sqrt{3},\ 0)$. Радиус R искомой окружности вычисляем по формуле расстояния между двумя точками:

$$R=|AF_1|=|AF_2|=\sqrt{(\mp\sqrt{3}-0)^2+(0-1)^2}=$$
$$=\sqrt{3+1}=2.$$

В соответствии с уравнением (4.2) записываем искомое уравнение окружности:

$$(x-0)^2+(y-1)^2=2^2 \text{ или } x^2+(y-1)^2=4. \blacktriangleleft$$

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(3,\ 2)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(-1,\ 0)$.

▶ Пусть $M(x,\ y)$ — любая точка искомой линии (рис. 4.19). Тогда по условию задачи $|AM|=3|BM|$. Так как

$$|AM|=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2},\ |BM|=\sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

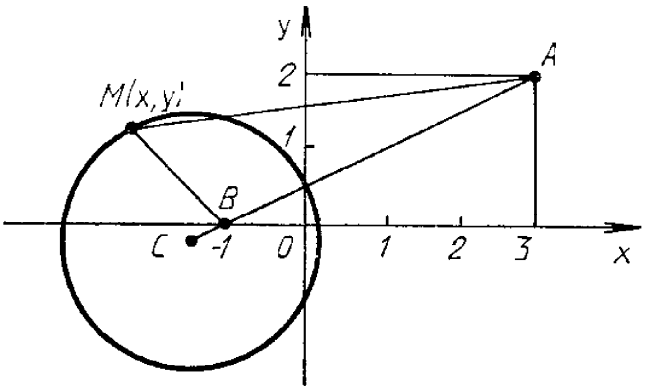

Рис. 4.19

то уравнение искомой линии

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=3\sqrt{(x+1)^2+y^2}.$$

Преобразуем его, возведя обе части в квадрат. Имеем:

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=9x^2+18x+9+9y^2,$$
$$8x^2+24x+8y^2+4y-4=0.$$

Выделив полные квадраты в последнем уравнении, придем к уравнению вида

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{45}{16},$$

которое является уравнением окружности с центром в точке $C(-3/2,\ -1/4)$ и радиусом $R=3\sqrt{5}/4$. ◀

4. Построить кардиоиду, заданную уравнением в полярных координатах $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

▶ Составим таблицу, в которой приведены значения полярного угла φ_i $(i=\overline{1,16})$ и соответствующие им значения полярного радиуса ρ_i:

φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	4	$\pi/2$	0	π	4	$3\pi/2$	8
$\pi/6$	2	$2\pi/3$	$\approx 0{,}6$	$7\pi/6$	6	$5\pi/3$	$\approx 7{,}4$
$\pi/4$	$\approx 1{,}2$	$3\pi/4$	$\approx 1{,}2$	$5\pi/4$	$\approx 6{,}8$	$7\pi/4$	$\approx 6{,}8$
$\pi/3$	$\approx 0{,}6$	$5\pi/6$	2	$4\pi/3$	$\approx 7{,}4$	$11\pi/6$	6

Построив найденные точки $M_i(\rho_i,\ \varphi_i)$ в полярной системе координат (см. пример 1 из § 4.3) и соединив их плавной линией, получим достаточно точное представление о кардиоиде (рис. 4.20.). ◀

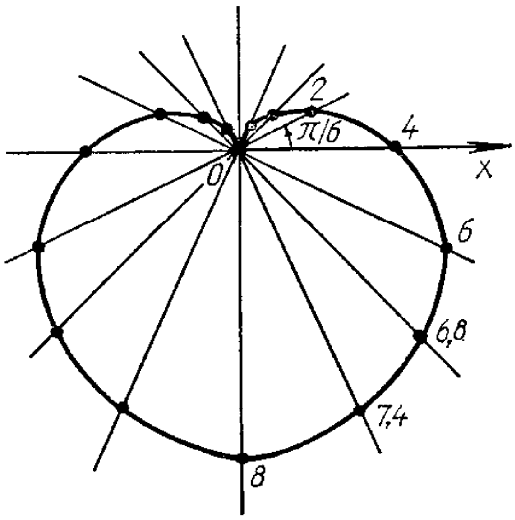

Рис. 4.20

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + 3\cos t, \\ y &= 2 - 2\sin t, \end{aligned}\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.\right\}$$

▶ Выберем достаточное количество значений параметра t_i, вычислим соответствующие значения x_i, y_i и построим точки $M_i(x_i, y_i)$ в декартовых координатах. Соединим их плавной линией. Очевидно, что полученная кривая очень похожа на эллипс с полуосями $a = 3$, $b = 2$ и центром в точке $C(1, 2)$. Для строгого доказательства того, что данные параметрические уравнения определяют эллипс с указанными осями и центром, избавимся от параметра t:

$$\frac{x-1}{3} = \cos t, \quad \frac{y-2}{-2} = \sin t,$$

откуда $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1.$ ◀

ИДЗ-4.2

1. Построить поверхности и определить их вид (название).

1.1. а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$.
1.2. а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$.
1.3. а) $-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$; б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$.
1.4. а) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$; б) $x^2 - y = -9z^2$.
1.5. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$; б) $7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$.
1.6. а) $z = 8 - x^2 - 4y^2$; б) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 72$.
1.7. а) $4x^2 + 6y^2 - 24z^2 = 96$; б) $y^2 + 8z^2 = = 20x^2$
1.8. а) $4x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 40 = 0$; б) $y = 5x^2 + 3z^2$.

1.9. а) $x^2 = 8(y^2 + z^2)$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 18$.
1.10. а) $5z^2 + 2y^2 = 10x$; б) $4z^2 - 3y^2 - 5x^2 + 60 = 0$.
1.11. а) $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$; б) $2y = x^2 + 4z^2$.
1.12. а) $6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$; б) $8y^2 + 2z^2 = x$.
1.13. а) $-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$; б) $6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$.
1.14. а) $5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$; б) $x^2 + 3z = 0$.
1.15. а) $6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$; б) $3x^2 + y^2 - 3z = 0$.
1.16. а) $-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$; б) $y^2 + 2z^2 = 6x^2$.
1.17. а) $-3x^2 + 6y^2 - z^2 - 18 = 0$; б) $x^2 - 2y = -z^2$.
1.18. а) $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$; б) $4x^2 - y^2 - 3z^2 = 12$.
1.19. а) $z = 4 - x^2 - y^2$; б) $3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48$.
1.20. а) $4x^2 + 5y^2 - 10z^2 = 60$; б) $7y^2 + z^2 = 14x^2$.
1.21. а) $9x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 1 = 0$; б) $15y = 10x^2 + 6y^2$.
1.22. а) $x^2 = 5(y^2 + z^2)$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 36$.
1.23. а) $4x^2 + 3y^2 = 12x$; б) $3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$.
1.24. а) $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$; б) $y - 4z^2 = 3x^2$.
1.25. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$; б) $x - 3z^2 = 9y^2$.
1.26. а) $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$; б) $2x^2 + 3z = 0$.
1.27. а) $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$; б) $2x^2 + 4y^2 - 5z = 0$.
1.28. а) $-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$; б) $2y^2 + 6z^2 = 3x$.
1.29. а) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$; б) $z^2 - 2y = -4x^2$.
1.30. а) $27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0$; б) $3x^2 - 7y^2 - 2z^2 = 42$.

2. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок.

2.1. а) $y^2 = 2z$, Oz; б) $9y^2 + 4z^2 = 36$; Oy.
2.2. а) $4x^2 - 3y^2 = 12$, Ox; б) $x = 1$, $y = 2$, Oz.
2.3. а) $x^2 = -3z$, Oz; б) $3x^2 + 5z^2 = 15$, Ox.
2.4. а) $3y^2 - 4z^2 = 12$, Oz; б) $y = 4$, $z = 2$, Ox.
2.5. а) $x^2 = 3y$, Oy; б) $3x^2 + 4z^2 = 24$, Oz.
2.6. а) $2x^2 - 6y^2 = 12$, Ox; б) $y^2 = 4z$, Oz.
2.7. а) $x^2 + 3z^2 = 9$, Oz; б) $x = 4$, $z = 6$, Oy.
2.8. а) $3x^2 - 5z^2 = 15$, Oz; б) $z = -1$, $y = 3$, Ox.
2.9. а) $y^2 = 3z$, Oz; б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Ox.
2.10. а) $y^2 - 5x^2 = 5$, Oy; б) $y = 3$, $z = 1$, Ox.
2.11. а) $x^2 = -4z$, Oz; б) $y^2 + 4z^2 = 4$, Oy.
2.12. а) $5x^2 - 6z^2 = 30$, Ox; б) $x = 3$, $z = -2$, Oy.
2.13. а) $z^2 = 2y$, Oy; б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Oz.
2.14. а) $y^2 = -4z$, Oz; б) $3y^2 + z^2 = 6$, Oy.
2.15. а) $7x^2 - 5y^2 = 35$, Ox; б) $x = -1$, $y = -3$, Oz.
2.16. а) $2x^2 = z$, Oz; б) $x^2 + 4z^2 = 4$, Ox.
2.17. а) $2y^2 - 5z = 10$, Oz; б) $y = 2$, $z = 6$, Ox.
2.18. а) $x^2 = -5y$, Oy; б) $2x^2 + 3z = 6$, Oz.
2.19. а) $x^2 - 9y^2 = 9$, Ox; б) $3y^2 = z$, Oz.

2.20. а) $x^2+2z=4$, Oz; б) $x=3$, $z=-1$, Oy.
2.21. а) $15x^2-3y^2=1$, Ox; б) $x=3$, $y=4$, Oz.
2.22. а) $y^2=5z$, Oz; б) $3x^2+7y^2=21$, Ox.
2.23. а) $15y^2-x^2=6$, Oy; б) $y=5$, $z=2$, Oy.
2.24. а) $5z=-x^2$, Oz; б) $3y^2+18z^2=1$, Oy.
2.25. а) $3x^2-8y^2=288$, Ox; б) $x=5$, $z=-3$, Oy.
2.26. а) $2y^2=72$, Oz; б) $6y^2+5z^2=30$, Oy.
2.27. а) $5x^2-7y^2=35$, Ox; б) $x=2$, $y=-4$, Oz.
2.28. а) $3x^2=-2z$, Oz; б) $8x^2+11z^2=88$, Ox.
2.29. а) $5y^2-8z^2=40$, Oz; б) $y=3$, $z=1$, Ox.
2.30. а) $3x^2=-4y$, Oz; б) $4x^2+3z^2=12$, Oz.

3. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

3.1. а) $z=x^2+y^2$, $z=0$, $x=1$, $y=2$, $x=0$, $y=0$; б) $x^2+y^2=2x$, $z=0$, $z=x$.

3.2. а) $x^2+y^2=z^2$, $z=0$, $y=2x$, $y=4x$, $x=3$ $(z>0)$; б) $x^2+y^2=4y$, $z=0$, $y+z=5$.

3.3. а) $y^2+3z^2=6$, $3x^2-25y^2=75$, $z\geqslant 0$; б) $x=4$, $y=2$, $x+2y+3z=12$, $x=0$, $y=0$, $z\geqslant 0$.

3.4. а) $z=5y$, $x^2+y^2=16$, $z=0$; б) $x+y+z=5$, $3x+y=5$, $2x+y=5$, $y=0$, $z=0$.

3.5. а) $y=3x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$; б) $8(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.6. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=x^2+5y^2$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$.

3.7. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.8. а) $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$; б) $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.9. а) $z=x^2+3y^2$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=1$; б) $z=8(x^2+y^2)+3$, $z=16x+3$.

3.10. а) $y=4x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $z=3\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2-x^2-y^2$.

3.11. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=3x^2+2y^2$, $z=0$; б) $z=10(x^2+y^2)+1$, $z=1-20y$.

3.12. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $y=16\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{2x}$, $z=0$, $x+z=2$.

3.13. а) $y=x$, $y=0$, $x=2$, $z=0$; б) $x+y=2$, $x=\sqrt{y}$, $z=2x$, $z=0$.

3.14. а) $2z=x^2+y^2$, $z=0$, $x=2$, $y=3$, $x=0$, $y=0$; б) $x^2+y^2=4x$, $z=0$, $z=x$.

3.15. а) $x^2+y^2=4z^2$, $z=0$, $y=x$, $y=8x$, $x=2$, $z>0$; б) $x^2+y^2=8y$, $z=0$, $y+z=6$.

3.16. а) $y^2+4z^2=8$, $16x^2-49y^2=784$, $z\geqslant 0$; б) $x=1$, $y=3$, $x+5y+10z=20$, $x=0$, $y=0$, $z\geqslant 0$.

3.17. а) $z=3y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$; б) $x+2y+3z=6$, $2x=y$, $2x+3y=6$, $y=0$, $z=0$.

3.18. а) $y=4x$, $y=0$, $x=1$, $z=xy$, $z=0$; б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.19. а) $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $z=2x^2+y^2$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2\leqslant 4$, $x\geqslant 0$.

3.20. а) $y=4x$, $y=0$, $x=4$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+z^2=y^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.21. а) $y=3x$, $y=0$, $x=3$, $z=xy$, $z=0$; б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $4(x^2+y^2)=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.22. а) $z=16x^2+y^2$, $z=0$, $y=2x$, $y=0$, $x=1$; б) $z-4=6(x^2+y^2)$, $z=4x+1$.

3.23. а) $y=3x$, $y=0$, $x=3$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $z=4\sqrt{x^2+y^2}$, $z=5-x^2-y^2$.

3.24. а) $y=3x$, $y=0$, $x=2$, $z=x^2+y^2$, $z=0$; б) $z-2=6(x^2+y^2)$, $z=1-4y$.

3.25. а) $y=2x$, $y=0$, $x=4$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $x+y=2$, $y=\sqrt{x}$, $z=12y$, $z=0$, $x=0$.

3.26. а) $z=2x^2+3y^2$, $z=0$, $x=2$, $y=1$, $x=0$, $y=0$; б) $x^2+y^2=6x$, $z=0$, $z=2x$.

3.27. а) $4(x^2+y^2)=z^2$, $z=0$, $y=x$, $y=4x$, $x=2(z>0)$; б) $x^2+y^2=4y$, $z=0$, $y+z=6$.

3.28. а) $2y^2+z^2=4$, $3x^2-8y^2=48$, $z\geqslant 0$; б) $x=1$, $y=3$, $x+2y+4z=24$, $x=0$, $y=0$, $z\geqslant 0$.

3.29. а) $z=3y^2$, $x^2+y^2=9$, $z=0$; б) $x+y+z=8$, $x+2y=4$, $x+4y=4$, $y=0$, $z=0$.

3.30. а) $y=5x$, $y=0$, $x=3$, $z=0$; б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Решение типового варианта

1. Построить данные поверхности и определить их вид (название):

а) $-\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0$; б) $3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0$.

▶ а) Приведем уравнение к каноническому виду

$$-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{1/2}+\frac{z^2}{4}=1.$$

Получили уравнение гиперболоида, расположенного так, как показано на рис. 4.21; полуоси его «горлового» эллипса $OB=\sqrt{2}/2$, $OC=2$;

б) Приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0.$$

Это уравнение конуса второго порядка, ориентированного указанным на рис. 4.22 образом. Его сечения плоскостями $z=\text{const}$ являются эллипсами. ◀

2. Записать уравнение поверхности, полученной при вращении:

1) параболы $z=-\frac{1}{2}y^2$: а) вокруг оси Oy; б) вокруг оси Oz;

2) эллипса $\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$: а) вокруг оси Oz; б) вокруг оси Oy.

▶ 1. В соответствии с общим правилом получения уравнения поверхности вращения (см. § 4.2) находим:

а) $\pm\sqrt{x^2+z^2}=-\frac{1}{2}y^2$, $4x^2-y^4+4z^2=0$

(алгебраическая поверхность четвертого порядка (рис. 4.23));

б) $z=-\frac{1}{2}(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2$, $z=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

(параболоид вращения (рис. 4.24)).

2. Имеем:

а) $\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$.

Получили сплюснутый вдоль оси Oz эллипсоид вращения (сфероид), полуоси его главных сечений $OA=OB=8$, $OC=2$ (рис. 4.25);

б) $\frac{y^2}{64}+\frac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$

(вытянутый вдоль оси Oy эллипсоид вращения (рис. 4.26): $OA=OC=2$, $OB=8$). ◀

3. Построить тело, ограниченное данными поверхностями:

а) $y=x$, $x=1$, $z=0$, $z=xy$;

б) $x+y=4$, $x=\sqrt{2y}$, $3x=2z$, $z=0$.

▶ а) Построение выполнено на рис. 4.27: OC — дуга

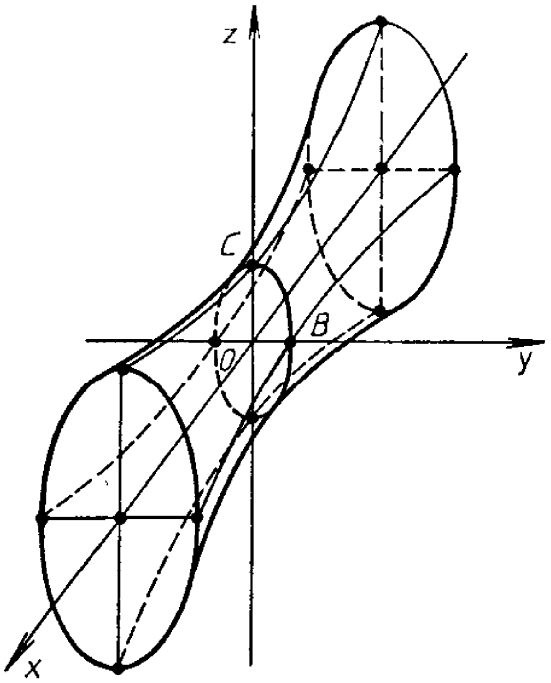

Рис. 4.21

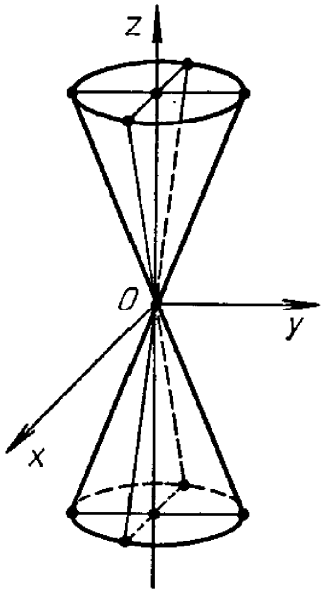

Рис. 4.22

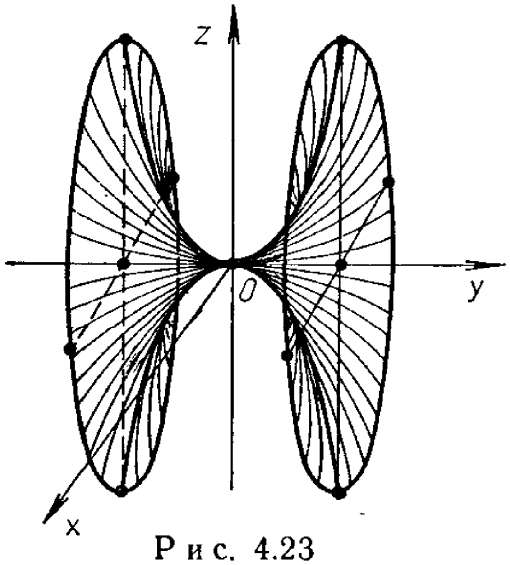

Рис. 4.23

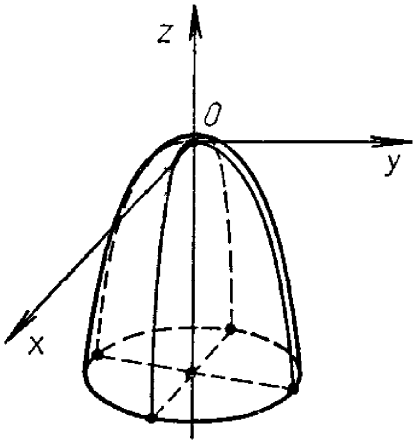

Рис. 4.24

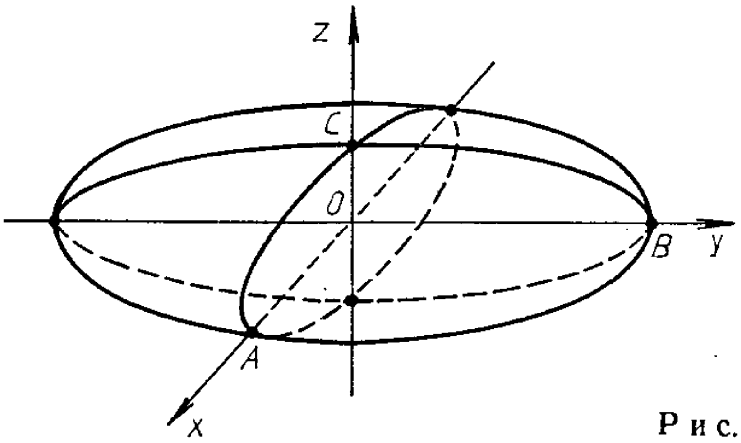

Рис. 4.25

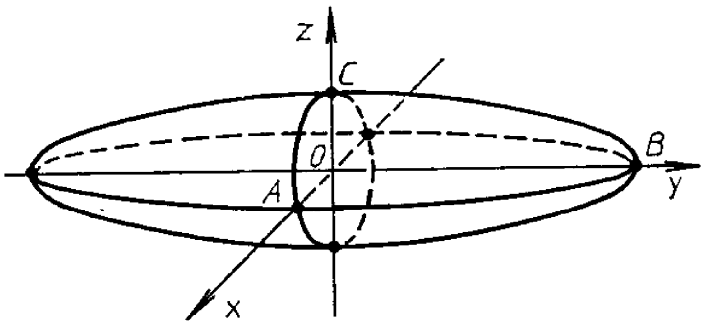

Рис. 4.26

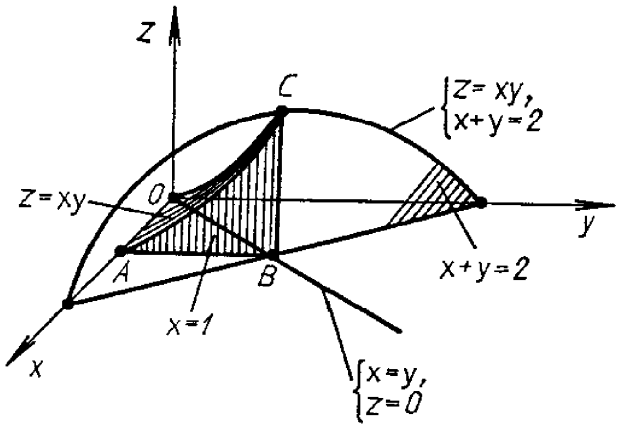

Рис. 4.27

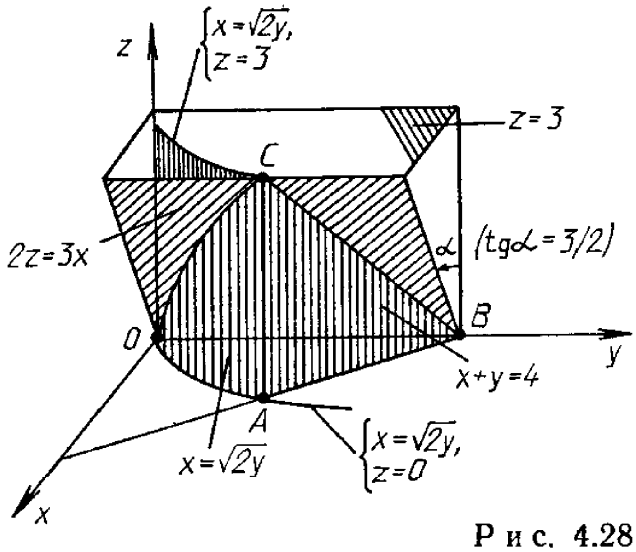

Рис. 4.28

параболы, являющейся пересечением гиперболического параболоида $z = xy$ с плоскостью $x = y$; $\overset{\frown}{AC}$ — пересечение поверхности $z = xy$ с плоскостью $x = 1$; $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ — характерные точки тела;

б) Построение выполнено на рис. 4.28: OC — дуга параболы, являющейся пересечением параболического

цилиндра с плоскостью $2z = 3x$; $A(2,\ 2,\ 0)$, $B(0,\ 4,\ 0)$, $C(2,\ 2,\ 3)$ — характерные точки тела. ◀