

# Домашнее задание по операционному исчислению

## Задача 1

Пользуясь теоремами интегрирования изображения и интегрирования оригинала найти изображения заданных функций: найденный результат проверить для первой из заданных функций по первой теореме разложения, развертывая в ряды как оригинал, так и полученное изображение.

| N<br>вар. |                                                                                                                                    | N<br>вар. |                                                                                                                                                              |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1         | $\frac{1 - e^{-t}}{t}; \int_0^t \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau$                                                                  | 2         | $\frac{e^t - 1}{t}; \int_0^t \frac{e^{\tau} - 1}{\tau} d\tau$                                                                                                |
| 3         | $\frac{\sin t}{t}; \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$                                                                          | 4         | $\frac{1 - \cos t}{t}; \int_0^t \frac{1 - \cos \tau}{\tau} d\tau$                                                                                            |
| 5         | $\frac{\operatorname{ch} t - 1}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - 1}{\tau} d\tau$                                        | 6         | $\frac{\operatorname{sh} t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{sh} \tau}{\tau} d\tau$                                                                          |
| 7         | $\frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{t}; \int_0^t \frac{\cos \alpha \tau - \cos \beta \tau}{\tau} d\tau$                           | 8         | $\frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - \cos \tau}{\tau} d\tau$                                                     |
| 9         | $\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{t}; \int_0^t \frac{e^{\alpha \tau} - e^{\beta \tau}}{\tau} d\tau$                               | 10        | $\frac{e^t - \cos t}{t}; \int_0^t \frac{e^{\tau} - \cos \tau}{\tau} d\tau$                                                                                   |
| 11        | $\frac{\cos t - e^{-t}}{t}; \int_0^t \frac{\cos \tau - e^{-\tau}}{\tau} d\tau$                                                     | 12        | $\frac{\operatorname{ch} \alpha t - \operatorname{ch} \beta t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \alpha \tau - \operatorname{ch} \beta \tau}{\tau} d\tau$ |
| 13        | $\frac{1 - \cos t}{t^2}; \int_0^t \frac{1 - \cos \tau}{\tau^2} d\tau$                                                              | 14        | $\frac{\operatorname{ch} t - 1}{t^2}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - 1}{\tau^2} d\tau$                                                              |
| 15        | $\frac{t - \sin t}{t^2}; \int_0^t \frac{\tau - \sin \tau}{\tau^2} d\tau$                                                           | 16        | $\frac{e^t - t - 1}{t^2}; \int_0^t \frac{e^{\tau} - \tau - 1}{\tau^2} d\tau$                                                                                 |
| 17        | $\frac{e^{-t} + t - 1}{t^2}; \int_0^t \frac{e^{-\tau} + \tau - 1}{\tau^2} d\tau$                                                   | 18        | $\frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t^2}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - \cos \tau}{\tau^2} d\tau$                                                 |
| 19        | $\frac{e^{\alpha t} - 1}{t}; \int_0^t \frac{e^{\alpha \tau} - 1}{\tau} d\tau$                                                      | 20        | $\frac{1 - e^{-\beta t}}{t}; \int_0^t \frac{1 - e^{-\beta \tau}}{\tau} d\tau$                                                                                |
| 21        | $\frac{\sin \alpha t}{t}; \int_0^t \frac{\sin \alpha \tau}{\tau} d\tau$                                                            | 22        | $\frac{1 - \cos \alpha t}{t}; \int_0^t \frac{1 - \cos \alpha \tau}{\tau} d\tau$                                                                              |
| 23        | $\frac{\operatorname{ch} \alpha t - 1}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \alpha \tau - 1}{\tau} d\tau$                          | 24        | $\frac{\operatorname{sh} \alpha t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{sh} \alpha \tau}{\tau} d\tau$                                                            |
| 25        | $\frac{\operatorname{ch} \alpha t - \cos \beta t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \alpha \tau - \cos \beta \tau}{\tau} d\tau$ | 26        | $\frac{e^{\alpha t} - \cos \beta t}{t}; \int_0^t \frac{e^{\alpha \tau} - \cos \beta \tau}{\tau} d\tau$                                                       |
| 27        | $\frac{\cos \alpha t - e^{-\beta t}}{t}; \int_0^t \frac{\cos \alpha \tau - e^{-\beta \tau}}{\tau} d\tau$                           | 28        | $\frac{e^{\alpha t} - 1 - \alpha t}{t^2}; \int_0^t \frac{e^{\alpha \tau} - 1 - \alpha \tau}{\tau^2} d\tau$                                                   |
| 29        | $\frac{1 - \beta t - e^{-\beta t}}{t^2}; \int_0^t \frac{1 - \beta \tau - e^{-\beta \tau}}{\tau^2} d\tau$                           | 30        | $\frac{1 - \cos \alpha t}{t^2}; \int_0^t \frac{1 - \cos \alpha \tau}{\tau^2} d\tau$                                                                          |

## Задача 2

При помощи обобщенной (третьей) теоремы разложения найти оригиналы заданных функций.

| N<br>вар. |                                | N<br>вар. |                               | N<br>вар. |                                |
|-----------|--------------------------------|-----------|-------------------------------|-----------|--------------------------------|
| 1         | $\frac{p-c}{p(p-a)(p-b)}$      | 2         | $\frac{p^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}$ | 3         | $\frac{p}{(p-a)^2(p-b)}$       |
| 4         | $\frac{1}{(p-a)^3(p-b)}$       | 5         | $\frac{p^2-1}{p^3+5p^2+6p}$   | 6         | $\frac{p^2+1}{p^3-3p^2+2p}$    |
| 7         | $\frac{p-1}{p(p^2+1)}$         | 8         | $\frac{p+1}{p(p^2+1)}$        | 9         | $\frac{p^2+p}{(p-1)(p^2+1)}$   |
| 10        | $\frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)}$     | 11        | $\frac{1-p}{(p+1)(p^2+1)}$    | 12        | $\frac{p^3+p^2+p-1}{p^4-1}$    |
| 13        | $\frac{p^3+3p}{p^4-1}$         | 14        | $\frac{p^2+2}{p^2(p^2+1)}$    | 15        | $\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$      |
| 16        | $\frac{2p-1}{p^2(p-1)^2}$      | 17        | $\frac{2p+1}{p^2(p+1)^2}$     | 18        | $\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}$      |
| 19        | $\frac{p^2+p+1}{(p^2-1)^2}$    | 20        | $\frac{p^2+2p-1}{(p^2+1)^2}$  | 21        | $\frac{3p^2-3p+1}{p^3(p-1)^3}$ |
| 22        | $\frac{3p^2+3p+1}{p^3(p+1)^3}$ | 23        | $\frac{1}{(p^2-1)(p^2-4)}$    | 24        | $\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$     |
| 25        | $\frac{p}{(p^2-1)(p^2-4)}$     | 26        | $\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$    | 27        | $\frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$   |
| 28        | $\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2-4)}$   | 29        | $\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2+4)}$  | 30        | $\frac{p^3}{(p^2-1)(p^2-4)}$   |

### Задача 3

Проинтегрировать следующие линейные дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

1.  $x'' + 4x = e^t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
2.  $x'' + 9x = \cos 3t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
3.  $x'' - 4x = t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
4.  $x'' - 9x = \operatorname{sh} 3t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
5.  $x'' - 3x' = t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
6.  $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
7.  $x'' - 4x' + 5x = e^t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
8.  $x'' + 2x' + 2x = t^2$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
9.  $x'' + 2x' + x = e^{-t}$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
10.  $x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
11.  $x'' + x' = e^{-t}$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
12.  $x'' + 3x' + 2x = e^t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
13.  $x'' + x' - 2x = e^t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
14.  $x'' - x' - 2x = t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
15.  $x'' - 2x' = e^{2t}$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
16.  $x'' + 2x = t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x = x_0$ ;     $x' = x'_0$
17.  $x'' + 2x' + x = e^{-t}$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = 1$ ;     $x'_0 = 0$
18.  $x'' - 3x' = e^{3t}$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = 0$ ;     $x'_0 = -1$
19.  $x'' - 2x' + 2x = \sin t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = 0$ ;     $x'_0 = 1$
20.  $x'' + 4x = \sin 2t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = 1$ ;     $x'_0 = -2$
21.  $x'' - 9x = \operatorname{sh} t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = -1$ ;     $x'_0 = 3$
22.  $x'' + x' = t^2$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = 1$ ;     $x'_0 = 0$
23.  $x'' + x' - 2x = e^{-t}$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = 1$ ;     $x'_0 = -2$
24.  $x'' - x' - 6x = e^{-t}$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = 0$ ;     $x'_0 = -1$
25.  $x''' - x' = t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = 0$ ;     $x'_0 = 1$ ;     $x''_0 = 0$
26.  $x''' - x' = e^t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = 1$ ;     $x'_0 = 0$ ;     $x''_0 = 0$
27.  $x^{IV} - x = 1$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = 1$ ;     $x'_0 = x''_0 = x'''_0 = 0$
28.  $x^{IV} - x'' = \operatorname{sh} t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$  ;     $x'''_0 = 1$
29.  $x^{IV} - x''' = e^t$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$  ;     $x'''_0 = 1$
30.  $x''' - 2x'' + x' = 1$  ;    при  $t = 0$ ;     $x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$ .

# Задача 4

Проинтегрировать следующие системы линейных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

| N<br>вар. | Система                                                                                                            | Начальные условия                                              |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1         | $\begin{cases} x'' - y' = t \\ y'' - x' = 0 \end{cases}$                                                           | $t = 0; \quad x = -1; \quad x' = 0; \quad y = 1; \quad y' = 0$ |
| 2         | $\begin{cases} x'' + y' = t \\ y'' - x' = 1 \end{cases}$                                                           | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = -1; \quad y = 1; \quad y' = 0$ |
| 3         | $\begin{cases} x'' - y' = t \\ y'' + x' = 0 \end{cases}$                                                           | $t = 0; \quad x = -1; \quad x' = 2; \quad y = 1; \quad y' = 0$ |
| 4         | $\begin{cases} x'' + y'' = 0 \\ x' + y = 1 + e^t \end{cases}$                                                      | $t = 0; \quad x = 0; \quad x' = 2; \quad y = 0; \quad y' = -1$ |
| 5         | $\begin{cases} x'' + 2x' + y' = e^{-t} \\ y'' - x' = 0 \end{cases}$                                                | $t = 0; \quad x = 0; \quad x' = 1; \quad y = -1; \quad y' = 0$ |
| 6         | $\begin{cases} x'' - y = te^t \\ x'' - x' + y'' - y = e^t + 2t \end{cases}$                                        | $t = 0; \quad x = 0; \quad x' = 1; \quad y = 0; \quad y' = 2$  |
| 7         | $\begin{cases} x'' + y' = \operatorname{sh} t - \sin t - t \\ y'' + x' = \operatorname{ch} t - \cos t \end{cases}$ | $t = 0; \quad x = 0; \quad x' = 2; \quad y = 1; \quad y' = 0$  |
| 8         | $\begin{cases} x'' + x' - y' = 1 \\ x' + x - y'' = 1 + 4e^{-t} \end{cases}$                                        | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 0; \quad y = 0; \quad y' = 1$  |
| 9         | $\begin{cases} x'' - y' + y = \cos t - t \\ y'' + x' = -2t \end{cases}$                                            | $t = 0; \quad x = 0; \quad x' = 1; \quad y = 2; \quad y' = -1$ |
| 10        | $\begin{cases} x'' - x' + y' = e^{-t} + \cos t \\ x' - y'' - y' = 2e^t + \sin t \end{cases}$                       | $t = 0; \quad x = 2; \quad x' = 1; \quad y = 0; \quad y' = 1$  |
| 11        | $\begin{cases} x'' + x' + y = t \\ x' + x - y'' = 1 \end{cases}$                                                   | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 1; \quad y = 1; \quad y' = 0$  |
| 12        | $\begin{cases} x'' - x - 2y' = t \\ x'' - x' - y'' = 1 \end{cases}$                                                | $t = 0; \quad x = 0; \quad x' = 0; \quad y = 2; \quad y' = 1$  |
| 13        | $\begin{cases} x'' + x - 2y = 2 \cos t \\ x' - y'' = 0 \end{cases}$                                                | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 2; \quad y = 0; \quad y' = 1$  |
| 14        | $\begin{cases} x'' + x + 2y' = 2 \\ x' + y'' = \cos t \end{cases}$                                                 | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 0; \quad y = 1; \quad y' = 0$  |

# Задача 4

Проинтегрировать следующие системы линейных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

| N<br>вар. | Система                                                                                             | Начальные условия                                                        |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 15        | $\begin{cases} x'' - y' = 0 \\ x - y'' = 2 \sin t \end{cases}$                                      | $t = 0; \quad x = -1; \quad x' = 1; \quad y = 1; \quad y' = 1$           |
| 16        | $\begin{cases} x'' - y' = 0 \\ x' - y'' = 2 \cos t \end{cases}$                                     | $t = 0; \quad x = 0; \quad x' = 2; \quad y = 2; \quad y' = 0$            |
| 17        | $\begin{cases} x'' - x + y' = \cos t \\ x' + y'' + y = \operatorname{ch} t + t \end{cases}$         | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 1; \quad y = 0; \quad y' = 2$            |
| 18        | $\begin{cases} x'' + y' = 0 \\ y'' + x' = 1 - 2 \sin t \end{cases}$                                 | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 1; \quad y = 1; \quad y' = 1$            |
| 19        | $\begin{cases} x'' - x + y = 1 - \frac{t^2}{2} \\ x' + y'' = e^t \end{cases}$                       | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 2; \quad y = 1; \quad y' = 1$            |
| 20        | $\begin{cases} x'' - 2y = e^t \\ y'' + 2x = -3e^t \end{cases}$                                      | $t = 0; \quad x = -1; \quad x' = 0; \quad y = 0; \quad y' = 0$           |
| 21        | $\begin{cases} x'' + 2y = e^{-t} \\ x' + x - y'' + y = 0 \end{cases}$                               | $t = 0; \quad x = 0; \quad x' = 2; \quad y = 1; \quad y' = 0$            |
| 22        | $\begin{cases} x'' - x + 2y = t \\ y'' - x' = te^{-t} \end{cases}$                                  | $t = 0; \quad x = 0; \quad x' = 1; \quad y = 1; \quad y' = -\frac{1}{2}$ |
| 23        | $\begin{cases} x'' - y' = e^t \\ y'' - y + x' = 0 \end{cases}$                                      | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 0; \quad y = -1; \quad y' = 0$           |
| 24        | $\begin{cases} x'' - x' + y = \sin t \\ y'' + y - x' = e^t \end{cases}$                             | $t = 0; \quad x = -1; \quad x' = 0; \quad y = 1; \quad y' = 1$           |
| 25        | $\begin{cases} x'' + y' + y = e^t - t \\ x' - x + 2y'' - y = -e^{-t} \end{cases}$                   | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 2; \quad y = 0; \quad y' = 0$            |
| 26        | $\begin{cases} x'' - y = \operatorname{sh} t - t \\ y'' + x' = \operatorname{ch} t - 1 \end{cases}$ | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = -1; \quad y = 1; \quad y' = 0$           |
| 27        | $\begin{cases} x'' + y' = \operatorname{sh} t \\ y'' - y + x' = 2t \end{cases}$                     | $t = 0; \quad x = 0; \quad x' = 0; \quad y = 1; \quad y' = -1$           |
| 28        | $\begin{cases} x'' + 2y' = 0 \\ x' + y'' + 2y = -4e^{2t} \end{cases}$                               | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 0; \quad y = 0; \quad y' = -2$           |
| 29        | $\begin{cases} x'' + y' + x = e^t \\ y'' + x' = 1 \end{cases}$                                      | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 2; \quad y = 0; \quad y' = -1$           |
| 30        | $\begin{cases} 2y' - x'' = 2 \\ y'' + 2y + x' = 2t + 1 \end{cases}$                                 | $t = 0; \quad x = 1; \quad x' = 1; \quad y = 0; \quad y' = -1$           |