ИУ1, ИУ2, 4-й семестр, 2012–2013 уч.г.
Теория вероятностей и математическая статистика

Модуль 3, домашнее задание «Случайные величины»

Задача 1. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (3 балла)

Вариант 1. В некотором государстве по закону подоходным налогом облагаются граждане, имеющие годовой доход не менее 5000 у.е. Доходы налогоплательщиков распределены по закону Парето с параметром $k = 2$. Найдите: а) процент налогоплательщиков, имеющих годовой доход более 10000 у.е.; б) средний доход налогоплательщика; в) процент налогоплательщиков, имеющих годовой доход более 10000 у.е. в случае, если закон изменится и подоходным налогом станут облагаться граждане с доходом более 6000 у.е.

Вариант 2. По данным ДПС скорости автомобилей в потоке распределены по нормальному закону. Известно, что 12% автомобилей движется со скоростью менее 60 км/ч и 15% автомобилей движется со скоростью более 110 км/ч. Определите: а) среднюю скорость автомобиля в потоке; б) процент автомобилей, движущихся со скоростью более 100 км/ч; в) процент автомобилей, движущихся со скоростями, отклоняющимися от средней скорости потока не более, чем на 15 км/ч; г) границы интервала скоростей движения в соответствии с правилом "трех сигм".

Вариант 3. Случайная величина распределена по закону Симпсона (правилу равнобедренного треугольника) на интервале $[-2, 2]$. Определите: а) плотность распределения случайной величины; б) вероятность того, что случайная величина находится в интервале $[1, 2]$; в) математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Вариант 4. Случайная величина R — расстояние от точки попадания до центра мишени. Она распределена по закону Релея с плотностью $f_R(r) = Are^{-4r^2}$, $r \geq 0$. Определите: а) коэффициент A; б) моду случайной величины, т.е. точку максимума ее плотности распределения; в) $\mathsf{M}[R]$ и $\mathsf{D}[R]$; г) вероятность того, что в результате выстрела расстояние от точки попадания до центра окажется меньше, чем мода.

Вариант 5. Наработка подшипника на отказ имеет логарифмически нормальное распределение с параметрами $\mu = 6$, $\sigma = 1{,}5$. Определить вероятность безотказной работы в течение 100 единиц времени и интенсивность отказов в течение 150 единиц времени.

Вариант 6. Известно, что количество телефонных звонков в справочное бюро распределено по закону Пуассона и в среднем составляет 5 звонков в минуту. Определите вероятности событий: а) в течение минуты не поступит ни одного звонка; б) количество звонков в минуту будет заключено в интервале $[2, 6]$. Найдите наиболее ожидаемое количество звонков за 7 минут.

Вариант 7. Время безотказной работы устройства распределено по показательному закону с параметром распределения λ. Найдите: а) математическое ожидание времени безотказной работы устройства; б) вероятность того, что данная случайная величина примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

Вариант 8. Вероятность безотказной работы тахометра в течение $t = 150$ ч равна $P(t) = 0{,}9$. Время исправной работы подчинено двухпараметрическому закону Вейбулла с параметром $\lambda = 2{,}6$. Определите: а) интенсивность отказов тахометра на момент времени $t = 150$ ч; б) среднюю наработку до первого отказа.

Вариант 9. Модуль скорости молекулы газа является случайной величиной X, распределенной по закону Максвелла с плотностью $f(x) = Cx^2e^{-4x^2}$, $x \geq 0$. Найдите значения C, $\mathsf{M}[X]$, $\mathsf{D}[X]$.

Вариант 10. Случайная величина имеет распределение Коши с плотностью $f(x) = \dfrac{a}{x^2+4}$. Найдите коэффициент распределения a, функцию распределения $F(x)$, медиану распределения и вероятность попадания случайной величины в интервал $(-2, 2)$. Определите, существуют ли математическое ожидание и дисперсия данной случайной величины.

Вариант 11. Покупатель приобретает лотерейные билеты, вероятность выигрыша которых составляет 0,1. Число X купленных билетов до первого выигрыша является случайной величиной, подчиняющейся геометрическому распределению. Определите $\mathsf{M}[X]$ и $\mathsf{D}[X]$.

Вариант 12. Случайная величина X имеет распределение Лапласа с плотностью $f_X(x) = ae^{-4|x|}$. Определите коэффициент a, функцию распределения $F_X(x)$, значения $\mathsf{M}[X]$ и $\mathsf{D}[X]$.

Вариант 13. Вероятность отказа прибора при испытании не зависит от отказов остальных приборов и равна 0,18. Испытано 12 приборов. Случайная величина X — число приборов, отказавших за время испытаний. Определите с точностью до 4 знаков закон распределения случайной величины, математическое ожидание, дисперсию, а также вероятности $\mathsf{P}(X < 3)$ и $\mathsf{P}(X > 9)$.

Вариант 14. В упаковке имеется 15 ламп, из которых 6 являются дефектными. Из упаковки достается 5 ламп. Определите вероятность того, что количество дефектных не превысит 3; найдите наиболее вероятное число дефектных ламп в выборке.

Вариант 15. Случайная величина X распределена по закону прямоугольного треугольника в интервале $(0, 3)$. Определите плотность распределения, функцию распределения, вероятность $\mathsf{P}(1{,}5 < X < 3)$, медиану распределения, а также значения $\mathsf{M}[X]$ и $\mathsf{D}[X]$.

Вариант 16. Случайная величина X распределена на интервале $(-3, 3)$, а график ее функции плотности представляет собой полуэллипс. Найдите функцию плотности случайной величины, ее функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

Вариант 17. Диаметр выпускаемой детали — случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с математическим ожиданием 6 *см* и среднеквадратичным отклонением 0,7 *см*. Определите вероятности событий: а) случайно отобранная деталь имеет диаметр в пределах от 5,5 до 6,8 *см*; б) отклонение диаметра от математического ожидания составляет не более 0,3 *см*. Каковы границы изменения диаметра, вероятность попадания в которые составляет 0,97?

Вариант 18. Время исправной работы стеклоочистителя подчинено гамма-распределению с параметрами $k = 3$ и $\lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\text{ч}}$. Определите вероятность безотказной работы изделия в течение 10 000 ч, частоту и интенсивность отказа на момент времени $t = 5000$ ч и среднее время работы до первого отказа.

Вариант 19. Производится считывание информации с носителя, который время от времени дает сбои. Всегда считывается вся информация, хотя считывание некоторых бит удается не с первого раза. Известно, что вероятность сбоя любого бита есть величина постоянная, равная 0,2. Определите вероятность того, что потребуется 10 попыток для считывания 8 бит и найдите наиболее вероятное число попыток при считывании 16 бит.

Вариант 20. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x) = C(x+1)^{-3/2}$, $x \geq 0$. Найдите константу C, функцию распределения $F_\xi(x)$, значения $\mathsf{M}[\xi]$ и $\mathsf{D}[\xi]$, а также вероятность $\mathsf{P}(|\xi - 1/3| < 1)$.

Вариант 21. Дана функция распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \operatorname{arctg} x, & 0 \leq x < \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найдите $\mathsf{M}[\xi]$ и $\mathsf{D}[\xi]$.

Вариант 22. Время безотказной работы батареи аккумуляторов постоянного тока имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 30 ч и среденеквадратичным отклонением 4 ч. Определите: а) вероятность безотказной работы батареи в течение 25 ч; б) время замены батарею аккумуляторов, гарантирющее, что вероятность отказа батареи до момента замены не превышает 10%.

Вариант 23. В опытной партии имеется 20 приборов, из которых 4 дефектные. Из упаковки достается 8 приборов. Определите вероятность того, что количество дефектных приборов в выборке не превысит 2. Найдите наиболее вероятное число дефектных приборов среди выбранных.

Вариант 24. Наработка гидравлического цилиндра на отказ имеет логарифмически нормальное распределение с параметрами $\mu = 4$, $\sigma = 1$. Определите вероятность безотказной работы цилиндра и интенсивность отказов в течение 150 ч работы.

Вариант 25. Число неисправностей, обнаруженных при техническом осмотре автомобиля, распределяется по закону Пуассона с параметром μ. Если неисправностей не обнаружено, то технический осмотр продолжается в среднем 2 ч. Если обнаружена одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится в среднем еще полчаса. Если обнаружено больше двух неисправностей, то машина ставится на профилактический ремонт, где она находится в среднем 4 ч. Определить закон распределения времени нахождения машины на стоянке технического обслуживания и его математическое ожидание.

Вариант 26. Наработка партии подшипников на отказ имеет двухпараметрическое распределение Вейбулла с параметром износа $b = 1{,}8$. Вероятность безотказной работы партии подшипников в течение $t = 100$ ч равна $\mathsf{P}(t) = 0{,}95$. Определить интенсивность отказов в в течение $t = 100$ ч и среднюю наработку на отказ.

Вариант 27. Плотность распределения абсолютной величины скорости молекулы массой m задается распределением Максвелла с плотностью $p(x) = \dfrac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/a^2}$, $x \geq 0$. Определить среднюю скорость молекулы и среднюю кинетическую энергию.

Вариант 28. Количество ошибок на странице, допускаемых машинисткой при наборе, распределено по закону Пуассона. Известно, что вероятность того, что она допустит хотя бы одну ошибку, равна 0,8647. Определите вероятность того, что на странице будет более двух ошибок. Найдите наиболее вероятное количество ошибок в документе из 5 страниц.

Вариант 29. На перекрестке установлен автоматический светофор, который периодически дает минуту зеленый свет и полминуты красный. Автомобиль подъезжает к светофору в случайный момент времени, не связанный с работой светофора. Определите вероятность того, что он проедет перекресток, не останавливаясь. Найдите закон распределения времени ожидания у перекрестка, его математическое ожидание и дисперсию.

Вариант 30. Диаметр шарика для подшипников — случайная величина, распределенная по нормальному закону. Если шарик не проходит через отверстие диаметром 2,5 *мм*, но проходит через отверстие диаметром 3 *мм*, то его размер считается приемлемым, в противном случае он бракуется. Известно, что средний размер шарика равен 2,75 *мм*, а брак составляет 10% выпуска. Определите среднеквадратичное отклонение для диаметра шарика.

Задача 2. МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (3 балла)

Случайный вектор $(\xi,\ \eta)$ распределен но нормальному закону $N(\overline{m},\ \Sigma)$. Запишите функцию плотности $f_{\xi\eta}(x,y)$ и найдите: а) плотности вероятностей $f_\xi(x)$ и $f_\eta(x)$; б) коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$; в) плотность случайной величины $\zeta = a\xi + b\eta$. Постройте графики найденных функций.

Вар.	$\overline{m}$	Σ	a	b	**Вар.**	$\overline{m}$	Σ	a	b	**Вар.**	$\overline{m}$	Σ	a	b
1.	$(1,-2)$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$	2	1	**11.**	$(3,-2)$	$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$	1	−2	**21.**	$(4,-2)$	$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$	−1	−1
2.	$(1,2)$	$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$	2	1	**12.**	$(3,2)$	$\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$	1	−1	**22.**	$(1,-2)$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$	1	−1
3.	$(2,-2)$	$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$	1	1	**13.**	$(1,-3)$	$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$	−2	3	**23.**	$(3,-2)$	$\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$	2	1
4.	$(2,2)$	$\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$	4	1	**14.**	$(2,-3)$	$\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	3	−4	**24.**	$(3,2)$	$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$	1	2
5.	$(1,-2)$	$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$	−1	1	**15.**	$(3,-2)$	$\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$	−1	2	**25.**	$(3,-3)$	$\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$	−2	−1
6.	$(1,2)$	$\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	−2	1	**16.**	$(3,2)$	$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$	1	−3	**26.**	$(4,-2)$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$	1	−1
7.	$(2,-2)$	$\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$	−1	2	**17.**	$(-1,2)$	$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$	2	1	**27.**	$(4,2)$	$\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$	−1	1
8.	$(2,2)$	$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$	−1	1	**18.**	$(3,-2)$	$\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$	1	1	**28.**	$(-4,1)$	$\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$	1	1
9.	$(1,-3)$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$	3	−1	**19.**	$(-1,-2)$	$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$	−1	−2	**29.**	$(-4,2)$	$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$	4	1
10.	$(2,-3)$	$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$	3	−1	**20.**	$(1,2)$	$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$	2	1	**30.**	$(4,3)$	$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$	1	4

Задача 3. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (3 балла)

Вариант 1. Независимые случайные величины X и Y имеют стандартное нормальное распределение. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X/Y$.

Вариант 2. Определите плотность вероятности суммы двух независимых случайных, равномерно распределенных на отрезке $[a,\ b]$.

Вариант 3. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X - Y$.

Вариант 4. Независимые случайные величины X и Y имеют плотности $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $|x| \le 1$, и $f_Y(x) = xe^{-x^2/2}$, $x \ge 0$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = XY$.

Вариант 5. Совместное распределение случайных величин X и Y задано плотностью распределения: $f_{XY}(x,y) = x+y$, $x \in [0,1]$, $y \in [0,\ 1]$. Найдите плотность распределения $Z = X+Y$.

Вариант 6. Даны независимые случайные величины $X \sim N(0,2)$ и $Y \sim N(0,2)$. Найдите закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Вариант 7. Независимые случайные величины X и Y имеют стандартное нормальное распределение. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = XY$.

Вариант 8. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 3]$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X - Y$.

Вариант 9. Случайная величина X распределена по показательному закону $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, с параметром $\lambda = 0{,}3$, а случайная величина Y распределена равномерно на отрезке $[0, 2]$ и не зависит от X. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Вариант 10. Независимые случайные величины X и Y имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda = 4$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X - Y$.

Вариант 11. Совместное распределение случайных величин X и Y задано плотностью распределения: $f_{XY}(x, y) = 1/\pi$, $x \in [0,\ 1]$, $y \in [0,\ \pi]$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Вариант 12. Независимые случайные величины X и Y распределены по показательному закону с параметром $\lambda = 5$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X/Y$.

Вариант 13. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на отрезках $[1,\ 7]$ и $[-7,\ -1]$ соответственно. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Вариант 14. Независимые случайные величины X и Y имеют нормальное распределение с параметрами m и σ. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = XY$.

Вариант 15. Случайные величины X и Y имеют совместную плотность распределения $f_{XY}(x, y) = 1/\pi$, $x \in [0,\ 1]$, $y \in [0,\ \pi]$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = Y/X$.

Вариант 16. Заданы плотности распределения вероятностей двух независимых случайных величин $f_X(x) = 0{,}25x$, $x \in [1,\ 3]$, и $f_Y(x) = 1$, $x \in [1,\ 2]$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Вариант 17. Случайная величина равномерно распределена на отрезке $[-6, 6]$, а случайная величина Y имеет функцию распределения $F(x)$. Полагая, что X и Y независимы, найдите функцию распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Вариант 18. Независимые случайные величины X и Y распределены по закону Пуассона с параметрами $\lambda = 3$ и $\lambda = 5$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X - Y$.

Вариант 19. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностью распределения: $f_X(x) = \dfrac{c}{1 + x^4}$ и $f_Y(x) = \dfrac{c}{1 + x^4}$. Найдите параметр c и закон распределения случайной величины $Z = X/Y$.

Вариант 20. Найдите плотность распределения суммы Z двух равномерно распределенных на отрезке $[-1,\ 1]$ независимых случайных величин X и Y. Чему равна $F_Z(x)$?

Вариант 21. Независимые случайные величины X и Y распределены по показательному закону с параметром $\lambda = 7$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X/Y$.

Вариант 22. Независимые случайные величины распределены по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1 = 3$ и $\lambda + 2 = 1$ соответственно. Найдите закон распределения случайной величины $X = X + Y$.

Вариант 23. Независимые случайные величины X и Y распределены равномерно на отрезке $[0,\ 5]$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X/Y$.

Вариант 24. Независимые случайные величины X и Y имеют плотности распределения $f_X(x) = \dfrac{1}{4} e^{-|x|/2}$ и $f_Y(x) = \dfrac{1}{4} e^{-|x|/2}$. Найдите закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Вариант 25. Независимые случайные величины X и Y имеют одинаковые функции распределения: $F_X(x) = F_Y(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$. Найдите функцию распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Вариант 26. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 8$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = |X - Y|$.

Вариант 27. Независимые случайные величины X и Y имеют нормальное распределение с параметрами $m = 0$, $\sigma = 4$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X+Y$.

Вариант 28. Случайные величины X и Y имеют совместную плотность распределения $f_{XY}(x, y) = x + y$, $x \in [0,\ 2]$, $y \in [0,\ 2]$. Найдите закон распределения случайной величины $Z = XY$.

Вариант 29. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ, а случайная величина Y распределена равномерно на отрезке $[a,\ b]$. Полагая, что X и Y независимы, найдите плотность вероятностей случайной величины $Z = X + Y$,

Вариант 30. Независимые случайные величины X и Y распределены равномерно на отрезках $[0, 3]$ и $[0, 8]$ соответственно. Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

Задача 4. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (3 балла)

Вариант 1. Случайная величина X подчиняется распределению Релея:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2}\exp\Bigl(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\Bigr), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \ln x$.

Вариант 2. Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Найти плотность распределения $f(y)$, если $Y = \operatorname{arctg} X$.

Вариант 3. Значения острого угла ромба со стороной a распределены равномерно в интервале $(0,\ \pi/2)$. Найти плотность распределения вероятностей площади ромба.

Вариант 4. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{2}\Bigr).$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(y)$, если $Y = X^3$.

Вариант 5. Случайная величина X распределена по закону

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4a}\Bigl(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\Bigr), & |x| \leq a; \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(y)$ случайной величины $Y = b^2 - X^2$, где $b > a$.

Вариант 6. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно на отрезке $[0,\ 1]$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по показательному закону $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y \geq 0$?

Вариант 7. Закон распределения измеренного значения радиуса круга — нормальный с математическим ожиданием $m = 50$ и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}25$. Найти закон распределения площади круга и его среднюю площадь.

Вариант 8. Найти закон распределения объема шара, если его радиус — случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с математическим ожиданием $m = 10$ и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}25$.

Вариант 9. Найти плотность распределения вероятностей объема куба, ребро которого — случайная величина X, распределенная равномерно в интервале $[0,\ a]$.

Вариант 10. Пусть X и Y — независимые случайные величины, плотности распределения вероятностей которых

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2},\ \ x \geq 0; \quad f_Y(y) = \frac{1}{3}e^{-y/3},\ \ y \geq 0.$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

Вариант 11. Диаметр цилиндрического вала имеет погрешность изготовления, поэтому его измеренное значение подчинено равномерному распределению на отрезке $[a,\ b]$. Найти плотность распределения вероятностей площади поперечного сечения вала.

Вариант 12. Прочность детали X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m_1 = 20$ и $\sigma_1 = 1$. На деталь действует нагрузка $Y \sim N(14, 2)$ (т.е. Y тоже имеет нормальное распределение с параметрами $m_2 = 14$ и $\sigma_2 = 2$). Найти вероятность неразрушения детали, т.е. вероятность события $A = (X > Y)$.

Вариант 13. На окружность радиуса R случайным образом брошены две точки. Считая, что длина хорды — случайная величина с равномерным распределением, найти плотность распределения вероятностей длины дуги между брошенными точками.

Вариант 14. Угол λ сноса самолета определяется формулой $\lambda = \arcsin\left(\frac{u}{v}\sin\varepsilon\right)$, где ε — угол действия ветра, u — скорость ветра, v — скорость самолета в воздухе. Значения угла действия ветра распределены равномерно на отрезке $[-\pi,\ \pi]$. Найти плотность распределения вероятностей угла сноса при $u = 20$ м/с, $v = 720$ км/ч.

Вариант 15. У центробежного регулятора стороны равны и составляют так называемый „параллелограмм“ регулятора, острый угол φ этого параллелограмма — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[\pi/6,\ \pi/4]$. Найти закон распределения диагоналей параллелограмма регулятора, если его сторона равна a.

Вариант 16. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(y)$ случайной величины $Y = kX$, $k > 0$.

Вариант 17. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно на отрезке $[0,\ \pi]$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по закону Коши $f(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$?

Вариант 18. Измеренное значение стороны квадрата — случайная величина X, распределенная по закону

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & x \in (0,\ \pi]; \\ 0, & x \in (\pi,\ 2\pi). \end{cases}$$

Найти плотность $f(y)$ распределения вероятностей площади квадрата.

Вариант 19. Абсолютное значение скорости молекул массы газа при абсолютной температуре T — случайная величина v, подчиняющаяся закону Максвелла — Больцмана: $f_v(x) = \lambda x^2 e^{-\beta x^2}$, $x \geq 0$, $\beta = \frac{m}{2kT}$ — константа Больцмана, λ — нормирующий множитель. Найти плотность распределения вероятностей $f_E(x)$ кинетической энергии молекул $E = \dfrac{1}{2}mv^2 = \gamma v^2$, где $\gamma = \dfrac{1}{2}m$. Показать, что $\lambda = \dfrac{4}{\pi}\beta^{3/2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\dfrac{m}{kT}\right)^{3/2}$.

Вариант 20. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,\, 2\pi]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: $Y = -4X$, $Z = X - Y$, $V = X + 2Y - 3Z - 1$.

Вариант 21. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,\, 20]$, а случайная величина Y имеет плотность распределения $f(y) = 0{,}5\, e^{-0{,}5y}$, $y \geq 0$. Найти математические ожидания и корреляционную матрицу случайных величин U и V, если $U = 2X - 3Y + 5$, $V = Y - 3X + 1$, а коэффициент корреляции между X и Y равен $\rho_{xy} = -0{,}8$.

Вариант 22. По сторонам прямого угла XOY скользит линейка AB длиной $l = 1$, занимая случайное положение, причем все значения абсциссы X, меняющиеся от 0 до 1 равновероятны. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния R от начала координат до линейки.

Вариант 23. Затраты C на обслуживание приборов обратно пропорциональны сроку их службы t, т.е. $C = \dfrac{1}{t}$. Найти закон распределения случайной величины C, если закон распределения t нормальный: $f_t(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{4/\pi}} \exp\left(-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

Вариант 24. Имеются две случайные величины X и Y, связанные соотношением $Y = 4 - 3X$. Величина X распределена равномерно на отрезке $[-1,\, 3]$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины Y, корреляционный момент величин X и Y и их коэффициент корреляции.

Вариант 25. Случайные величины U и V связаны со случайными величинами X и Y соотношениями $U = X + 3Y - 2$, $V = 2X - Y + 1$. Известно, что $M[X] = 1$, $D[X] = 5$, $M[Y] = -2$, $D[Y] = 4$, $K_{xy} = 3$. Найти математическое ожидание величин U и V и их корреляционную матрицу.

Вариант 26. На смежных сторонах прямоугольника со сторонами a и b выбраны наудачу две точки. Найти математическое ожидание квадрата расстояния между этими точками, а также его дисперсию.

Вариант 27. Имеется случайная величина X, распределенная по экспоненциальному закону $f(x) = 2e^{-2x}$, $x \geq 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = -2X$, $Z = X + Y - 1$, $V = X - 2Y - Z + 1$.

Вариант 28. Точка находится на окружности радиуса R. Радиус-вектор этой точки проектируется на полярную ось, и на этой проекции, как на стороне, строится квадрат. Определить математическое ожидание и дисперсию площади квадрата, если положение точки в месте окружности равновозможно.

Вариант 29. На плоскости с координатами $(x,\, y)$ дана случайная точка $(X,\, Y)$, причем $M[X] = 2$, $D[X] = 16$, $M[Y] = 4$, $D[Y] = 64$, $K_{xy} = 0$. Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния от начала координат до проекции точки на ось OZ, лежащую в плоскости XOY и образующую с осью OX угол $\lambda = 30°$.

Вариант 30. Через точку $B(0;\, b)$ проводится прямая BA под углом λ к оси ординат, причем $A(a;\, 0)$. Все значения угла λ равновероятны на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Найти плотность распределения вероятностей абсциссы a точки A.

Задача 5. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ (3 балла)

Вариант 1. Математическое ожидание числа солнечных дней в году для определенной местности равно 150 дням. Найти вероятность того, что в данном году здесь будет не менее 200 солнечных дней. Как изменится искомая вероятность, если будет известно, что среднее квадратичное отклонение числа солнечных дней равно 10?

Вариант 2. Математическое ожидание годового количества осадков для данной местности равно 600мм. Каково минимальное количество осадков за год с вероятностью, не превышающей величины 0,8?

Вариант 3. Математическое ожидание скорости ветра у земли в данной местности составляет 8 км/ч. Найти вероятности того, что: а) скорость ветра превысит 20 км/ч; она будет меньше 50 км/ч. Как изменятся искомые вероятности, если будет известно, что среднее квадратичное отклонение скорости ветра равно 2 км/ч?

Вариант 4. Ежегодная потребность в электроэнергии для НИИ составляет в среднем 500 кВтч. В каких пределах заключен расход электроэнергии в любой день недели с вероятностью не менее 0,85? Как изменится ответ задачи, если будет известно, что значение среднеквадратичного отклонения ежегодного расхода электроэнергии составит $50 кВтч$? Институт потребляет энергию 365 дней в году.

Вариант 5. Математическое ожидание скорости ветра на высоте 10 $км$ равно 30 км/ч, а среднее квадратичное отклонение — 5 км/ч. Какую скорость ветра на этой высоте можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,85?

Вариант 6. Генератор обеспечивает выходное напряжение, которое может отклоняться от номинального на значение, не превышающее 1В с вероятностью 0,95. Какие значения дисперсии выходного напряжения можно ожидать?

Вариант 7. Математическое ожидание суточного расхода воды в лаборатории составляет 10 м^3. Оценить вероятность того, что в некоторый день расход воды будет находиться в диапазоне $8 - 12$ $м^3$, если среднее квадратичное отклонение суточного расхода составит 1 м^3.

Вариант 8. Используя неравенство Чебышева, найти вероятность того, что частота появления грани с номером 6 при бросании правильной игральной кости 200 раз отклонится от вероятности ее появления не более, чем на 0,05. Найденный ответ сравнить с результатом, полученным с помощью интегральной теоремы Муавра — Лапласа.

Вариант 9. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что частота появления грани с четным номером при 10000 бросаниях правильной игральной кости отклонится от вероятности ее появления по абсолютной величине не более, чем на 0,01. Сравнить найденные значения с результатами, полученными с помощью интегральной теоремы Муавра — Лапласа.

Вариант 10. Произведено 200 измерений некоторой случайной величины. Известно, что дисперсия измерения этой случайной величины не превышает 4. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих измерений от среднего арифметического их математических ожиданий не превысит 0,2.

Вариант 11. Чтобы определить среднее сопротивление np-перехода транзистора, в партии из 50 одинаковых коробок проверено по одному транзистору из каждой коробки. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического значения сопротивления np-перехода в выбранной совокупности от среднего значения во всей партии не превысит 10 Ом, если среднее квадратичное отклонение значения сопротивления np-перехода не превышает 6 Ом.

Вариант 12. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое 500 измерений. Предполагая, что среднее квадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превышает 0,5, оценить вероятность того, что отклонение найденного таким образом значения величины от истинного не превысит 0,2.

Вариант 13. Каждая повторная передача сигнала по каналу связи увеличивает вероятность искажения сигнала на 0,1%. При передаче первого сигнала эта вероятность равна 0,05. Передано 100 сигналов. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9 заключено число переданных без искажения сигналов.

Вариант 14. В конденсаторе с вероятностью 0,01 возможен дефект диэлектрика и независимо от первого с вероятностью 0,005 дефект корпуса. Проверена партия в 1000 конденсаторов. В каких границах с вероятностью 0,997 заключается число бракованных конденсаторов? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

Вариант 15. В Москве рождается каждый день в среднем 335 детей, т.е. в год около 122500 детей. Считая вероятность рождения мальчика 0,51, найти вероятность того, что число мальчиков, которые родятся в Москве в текущем году, превысит число девочек не менее, чем на 1500.

Вариант 16. Пусть ξ_1 — число выпадений герба при 10 подбрасываниях монеты, а ξ_2 — число выпавших очков на грани тетраэдра (грани перенумерованы числами 1, 2, 3, 4) при его однократном подбрасывании. Оценить вероятность осуществления неравенства $\xi_1 + \xi_2 < 10$. Решить задачу, используя первое и второе неравенства Чебышева.

Вариант 17. Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах число попаданий будет не менее 85 и не более 95?

Вариант 18. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Случайная величина ξ_n задана следующим образом:

x_n	$-n\lambda$	0	$n\lambda$
$P(x_n)$	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

Можно ли применить к данной последовательности закон больших чисел?

Вариант 19. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Случайная величина ξ_n задана следующим образом:

x_n	$-n\lambda$	0	$n\lambda$
$P(x_n)$	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Можно ли применить к данной последовательности закон больших чисел?

Вариант 20. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Случайная величина ξ_n задана следующим образом:

x_n	$-\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$
$P(x_n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Можно ли применить к данной последовательности закон больших чисел?

Вариант 21. Правильная монета 1000 раз бросается вверх. Определить такое число N, чтобы с вероятностью 0,85 количество попыток, когда монета ляжет гербом вверх, заключалось между 400 и N.

Вариант 22. Среди изготовленных заводом электроламп 80% выдерживают гарантийный срок службы. Найти вероятность того, что в партии из 500 электроламп число изделий, выдержавших гарантийный срок службы, находится в пределах от 380 до 420. Использовать неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

Вариант 23. Вероятность случайного события равна 0,9. Выполнено 6400 испытаний. Какова вероятность того, что наблюдаемая частота появления случайного события лежит в интервале $0{,}9\pm0{,}01$? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

Вариант 24. Вероятность случайного события равна 0,81. Выполнено 5000 испытаний. В каком интервале с вероятностью 0,97 лежит наблюдаемая частота случайного события? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

Вариант 25. Вероятность случайного события равна 0,67. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что наблюдаемая частота случайного события отклонится от его вероятности не более чем на 0,01? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

Вариант 26. Вероятность появления бракованной детали в партии из 1000 деталей равна 0,05. Найти нижнюю и верхнюю границы числа дефектных деталей в этой партии с вероятностью 0,9.

Вариант 27. Стрельба по цели ведется поочередно из трех орудий, причем вероятности попадания в цель равны соответственно 0,2; 0,3 и 0,5. Произведено 300 выстрелов. Оценить снизу вероятность того, что при этих данных частота попаданий отличается от средней вероятности попадания по абсолютной величине не более чем на 0,1.