Федеральное агентство по образованию
Московский государственный технический университет ”МАМИ”
Кафедра “Прикладная и вычислительная математика”

Е.А. Коган

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Допущено УМО вузов РФ по образованию в области транспортных машин и транспортно-технологических комплексов в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальности Автомобиле - и тракторостроение

Москва 2007

УДК 517.91 (095)

Р е ц е н з е н т ы:
Кафедра “Теория вероятностей” Московского авиационного института
(Государственного технического университета)
(зав.кафедрой – д-р физ.- мат. наук, проф. А.И.Кибзун);
д-р техн. наук, проф. А.В.Бородин
(Московский государственный университет прикладной биотехнологии)

Коган Е.А. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Учебное пособие по дисциплине “математика” для студентов, обучающихся по специальности Автомобиле - и тракторостроение. М.: МАМИ. 2007.- 224 с.

Настоящее учебное пособие является математическим практикумом по разделам дисциплины ”математика”, посвященным теории вероятностей и математической статистике. Оно содержит в краткой форме основные понятия теории вероятностей, относящиеся к случайным событиям, случайным величинам и законам их распределения, а также к предельным теоремам, и изложение основных понятий и методов математической статистики, наиболее часто определяемых и используемых при статистической обработке опытных данных. В каждом разделе приведены иллюстративные примеры решения различных типовых задач. Даны 30 вариантов расчетно-графических работ по теории вероятностей и математической статистике. Пособие может быть использовано студентами в качестве руководства для самостоятельной работы и преподавателями для проведения практических занятий.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Часть первая

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть вторая

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Часть первая

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВВЕДЕНИЕ

Предметом теории вероятностей является изучение закономерностей, проявляющихся в массовых однородных случайных явлениях.

Систематическое исследование задач, относящихся к массовым однородным случайным явлениям, и зарождение теории вероятностей как математической дисциплины относится к XVII веку и связано, прежде всего, с попытками создания теории азартных игр. Они оказались исключительно наглядной моделью случайных явлений.

В последующие два века теория вероятностей применялась, главным образом, для создания теории страхования, теории ошибок наблюдений, теории стрельбы, к задачам статистики народонаселения.

Выдающаяся роль в развитии теории вероятностей принадлежит таким крупнейшим математикам, как Паскаль, Ферма, Муавр, Я.Бернулли, Лаплас, Гаусс, Пуассон.

Огромный вклад в развитие теории вероятностей в XIX веке внесен математиками знаменитой Петербургской математической школы: П.Л.Чебышёвым, А.А.Марковым, А.М.Ляпуновым и позднее С.Н.Бернштейном, А.Я.Хинчиным, А.Н.Колмогоровым, Б.В.Гнеденко и др.

Область применения вероятностных и статистических методов на современном этапе развития общества необычайно широка. Эти методы применяются в теоретической физике, особенно в ядерной физике и квантовой механике (где изучаемые закономерности объективно носят вероятностный характер), в метеорологии, в статистической теории радиосвязи, в теории надежности, в теории автоматического регулирования, при планировании и организации производства, при контроле качества продукции и др. К традиционным областям применения теории вероятностей и математической статистики в естественных науках и в технике добавились вероятностные задачи из области социологии, психологии, экономики и различных гуманитарных наук.

Поэтому изучение основных понятий и методов теории вероятностей и математической статистики является обязательной составной частью общеобразовательной математической инженерной подготовки.

Настоящее учебное пособие является руководством к решению задач по теории вероятностей и математической статистике и содержит изложение основных понятий в краткой справочной форме, необходимой для понимания сути применяемых методов. По этой причине основные понятия определяются в рамках так называемой элементарной теории вероятностей (в которой предполагается, что каждое испытание может заканчиваться только одним из исходов или, как говорят, одним из элементарных событий), и изложение в целом соответствует широко используемым учебникам Е.С.Вентцель и В.Е.Гмурмана [1-5]. Строгое изложение теории вероятностей на теоретико-множественной основе содержится, например, в курсах [6-9] и др.

Рассмотрение основных понятий и методов сопровождается иллюстративными примерами решения различных типовых задач. Дано большое количество задач для самостоятельного решения и проведения практических занятий, отражающих специфику специальностей автомеханического вуза. Приведены также варианты расчетно – графических работ по теории вероятностей и математической статистике.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Предметом теории вероятностей является изучение закономерностей в массовых однородных случайных явлениях (событиях).

Событием вообще называют качественный или количественный результат опыта, осуществленного при определенной совокупности условий. Различают события достоверные, невозможные и случайные.

Событие называется достоверным, если оно при осуществлении определенной совокупности условий произойдет обязательно и невозможным, если оно заведомо не может произойти.

Случайным называют событие, которое при осуществлении определенной совокупности условий может либо произойти, либо не произойти.

Случайные события могут быть несовместными, совместными, равновозможными, зависимыми и независимыми. Они могут быть подразделены также на элементарные (простые, неразложимые) и сложные.

Случайные события называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в том же опыте.

События называются **равновозможными**, если есть все основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое. Практически о равновозможности событий можно судить по тому, соблюдаются ли в опыте условия симметрии.

Несколько случайных событий образуют **полную группу**, если в результате испытания произойдет хотя бы одно из них.

Чтобы сравнивать события между собой по степени возможности их появления, связывают каждое событие с некоторым числом, которое тем больше, чем более возможно событие. Это число и называют вероятностью появления данного события A и обозначают через $P(A)$. Следовательно, вероятность - это числовая мера степени возможности появления случайного события.

1.1. Классическое определение вероятности

Существует целый класс опытов, которые заканчиваются только одним из возможных исходов (или, как говорят, одним из элементарных исходов), для которых возможен непосредственный подсчет вероятностей их возможных исходов. Эти опыты могут быть продемонстрированы на примере простейшей схемы урн (так называемой, урновой модели).

Пусть в урне находится n шаров разного цвета, например, m белых и (n-m) черных. Шары тщательно перемешаны, одинаковых размеров и массы, неразличимы наощупь. Проводится испытание, состоящее в извлечении наудачу одного шара из урны. Если A – случайное событие, состоящее в извлечении, например, белого шара из урны, то вероятность этого события может быть найдена на основе следующего определения:

Вероятностью события *A* называется отношение числа *m* элементарных исходов, благоприятствующих появлению данного события, к общему числу *n* всех равновозможных несовместных исходов, образующих полную группу:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Это определение называется классическим. Оно применимо лишь к испытаниям с конечным числом равновозможных исходов.

Свойства вероятности :

1. Вероятность достоверного события $A=U$ $P(U)=1$.
2. Вероятность невозможного события $A=V$ $P(V)=0$.
3. Вероятность любого события A есть неотрицательное число, удовлетворяющее двойному неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

Для непосредственного подсчета вероятности появления события на основе классического определения применяются, как правило, формулы комбинаторики (раздела математики, изучающего вопросы о том, сколько различных комбинаций (соединений) можно составить из заданного числа объектов).

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если элемент a из некоторого конечного множества можно выбрать m способами, а другой элемент b можно выбрать k способами, то выбор “или a, или b” можно осуществить $m+k$ способами.

При этом способы выбора элементов a и b не должны совпадать между собой. В противном случае будет $m+k-l$ способов выбора, где l – число совпадений.

Правило произведения. Пусть даны два упорядоченных множества элементов: A, содержащее m элементов $(a_1, a_2, ..., a_m) \in A$ и B, содержащее n элементов $(b_1, b_2, ..., b_n) \in B$. Тогда можно образовать ровно mn различных пар $a_i b_k$ $(i = 1,2,...,m; k = 1,2,...,n)$, содержащих по одному элементу из каждого множества.

Это правило можно обобщить на случай любого конечного числа упорядоченных множеств.

Пример. Имеются 3 партии деталей. В первой 10, во второй - 8, в третьей - 12 деталей. Сколько можно образовать комплектов из трех деталей, содержащих по одной детали из каждой партии ?

Полагая $n_1 = 10, n_2 = 8, n_3 = 12,$ по правилу произведения комбинаторики получим $N = n_1 n_2 n_3 = 10 \cdot 8 \cdot 12 = 960$ комплектов.

В комбинаторике в зависимости от способа выбора элементов из некоторого множества элементов различают три типа соединений (комбинаций): размещения, перестановки и сочетания.

Размещениями из n элементов по k элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо составом, либо порядком их расположения.

Число размещений из n различных элементов по k элементов равно

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} .$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения входящих в них элементов.

Число всевозможных перестановок из n элементов равно

$$P_n = n!$$

Сочетаниями из n элементов по k элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга лишь составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по k элементов равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Замечание. Приведенные формулы справедливы для случая, когда соединения не содержат одинаковых (повторяющихся) элементов.

Пример. Каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 написана на одной карточке. Последовательно наугад извлекаются 3 карточки. Найти вероятность того, что полученное трехзначное число окажется четным.

Решение. Число всевозможных элементарных исходов равно $n = A_6^3$, так как получающиеся трехзначные числа могут отличаться как цифрами, так и порядком их расположения. Трехзначное число будет четным, если последняя цифра его 2 или 4, или 6. Если последняя цифра 2, то стоящее перед ней двузначное число может быть составлено из оставшихся 5-ти цифр: 1, 3, 4, 5, 6 числом способов, равным A_5^2 . Еще столько же благоприятных исходов можно получить, если последней цифрой будет 4 или 6. Следовательно

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3A_5^2}{A_6^3} = 0{,}5.$$

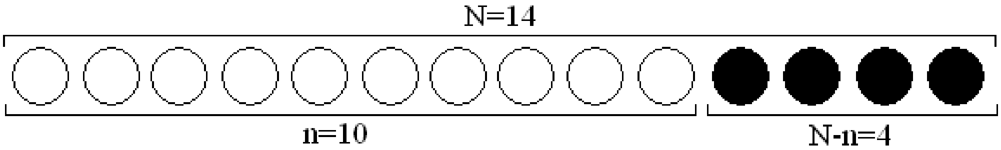
Пример. Из урны, в которой a белых и b черных шаров, вынимаются 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

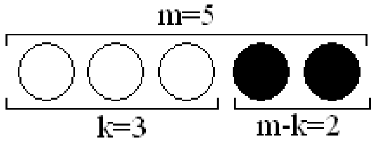
Решение. Число всевозможных элементарных исходов испытания равно $n = C_{a+b}^2$, так как каждое соединение из двух шаров может отличаться от любого другого лишь самими шарами (составом элементов), а порядок их извлечения безразличен. Аналогично рассуждая, получим, что число благоприятных исходов будет равно $m = C_a^2$.

Поэтому $$P = \frac{m}{n} = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}.$$

Пример. В партии из 14 деталей 10 стандартных, остальные – нестандартные. Наугад отобраны 5 деталей. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 3 стандартных ?

Решение. Пусть $N = 14$, $n = 10$, $m = 5$, $k = 3$. Для наглядности представим условие задачи схематично в следующем виде (белыми кружками условно изображаются стандартные детали, черными - нестандартные):





Общее число всевозможных элементарных исходов равно числу способов, каким можно отобрать любые 5 деталей из 14, причем безразлично в какой последовательности. Поэтому число всевозможных исходов равно C_{14}^{5}.

Исход окажется благоприятным, если среди отобранных пяти деталей будут три стандартных и две нестандартных детали. Три стандартных детали можно выбрать только из 10 стандартных числом способов, равным C_{10}^{3}. Для каждого из них недостающие две нестандартные детали можно выбрать только из 4-х нестандартных деталей C_4^2 способами.

Следовательно, общее число благоприятных исходов по правилу произведения комбинаторики будет равно $C_{10}^{3}\,C_4^2$, а искомая вероятность

$$P = \frac{C_{10}^{3}\,C_4^2}{C_{14}^{5}} = \frac{10!\,4!\,5!\,9!}{3!\,7!\,2!\,2!\,14!} = \frac{360}{1001}.$$

Замечание : В общем случае справедлива формула

$$P = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

В ней сумма нижних индексов в числителе должна быть всегда равна нижнему индексу в знаменателе, а сумма верхних индексов в числителе - верхнему индексу в знаменателе.

1.2. Статистическое определение вероятности

Статистической вероятностью или относительной частотой события A называется отношение числа M испытаний, в которых появилось событие A, к общему числу N фактически проведенных испытаний

$$W(A) = \frac{M}{N}.$$

Замечание. Если $P(A)$ - теоретическая характеристика степени возможности появления события, определяемая до проведения опыта (в котором может появиться событие A), то $W(A)$- эмпирическая характеристика, определяемая по результатам опытов.

Длительные наблюдения реальных случайных событий показывают что при большом числе однородных испытаний справедлив **принцип статистической устойчивости относительных частот**. Он проявляется в том, что относительная частота $W(A)$ колеблется около некоторого постоянного устойчивого числа, причем по мере увеличения числа опытов отклонения $W(A)$ от этого постоянного числа имеют тенденцию становиться все меньше. Оказывается, что это постоянное устойчивое число и будет вероятностью появления события $P(A)$.

Классическим примером, подтверждающим указанный принцип, являются приведенные в таблице 1 результаты опытов с многократным подбрасыванием монеты, выполненных французским естествоиспытателем Бюффоном и английским статистиком К. Пирсоном.

Таблица 1

Опыты	Число подбрасываний Монеты	Число появлений Герба	$W(A)$	$P(A)$
Бюффона	4040	2048	0,5080	0,5
К.Пирсона	12000	6019	0,5016	
К.Пирсона	24000	12012	0,5005	

Как видно, при большом числе испытаний относительная частота появления случайного события $W(A)$ может рассматриваться как приближенное значение вероятности события A. Это определение вероятности события A и называется статистическим.

1.3. Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом элементарных исходов. Задачи, связанные с такими испытаниями, сводятся к случайному бросанию точки в некоторую область.

Пусть на плоскости имеется некоторая область F и в ней подобласть f. Предполагая, что вероятность попадания случайной точки в область f не зависит ни от ее формы, ни от ее расположения в области F, а пропорциональна её площади, определим вероятность попадания случайной точки M в заданную подобласть как отношение мер областей:

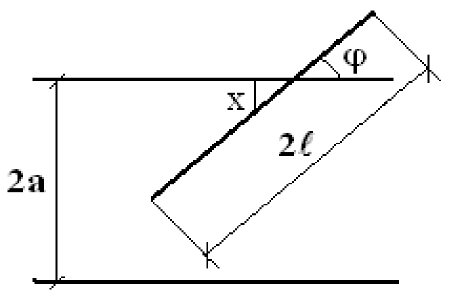
$$P(M \in f) = \frac{mes\, f}{mes\, F}.$$

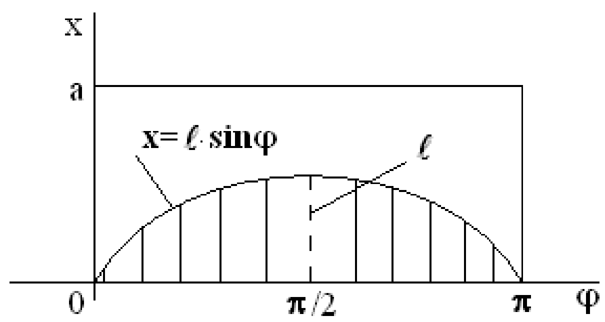
Здесь mes – мера области: в одномерном случае – длина отрезка, в двумерном – площадь, в трехмерном – объем. Определенная таким образом вероятность называется **геометрической вероятностью**.

Пример. (**Задача Бюффона**). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросается игла длиной 2ℓ $(\ell < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь параллель.

Решение. Пусть x - расстояние от центра иглы до ближайшей параллели, φ - угол между иглой и параллелью. Величины x и φ полностью определяют положение иглы на плоскости. Очевидно, $0 \le x \le a$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Поэтому всевозможные положения иглы изобразятся точками прямоугольника со сторонами a и π (см. рисунок). Для пересечения иглы с параллелью необходимо, чтобы $x \le \ell \cdot \sin \varphi$.





Предельная линия $x = \ell \cdot \sin\varphi$ показана на рисунке. Следовательно, благоприятные исходы изобразятся точками заштрихованной области. Искомая вероятность будет равна

$$P = \frac{\int_0^{\pi} \ell \sin\varphi \, d\varphi}{a\pi} = \frac{2\ell}{\pi a}.$$

1.4. Алгебра событий

Непосредственное вычисление вероятности на основе классического определения обычно затруднительно, и в теории вероятностей, как правило, применяются косвенные методы, позволяющие по известным вероятностям простых событий определять вероятности сложных событий, с ними связанных.

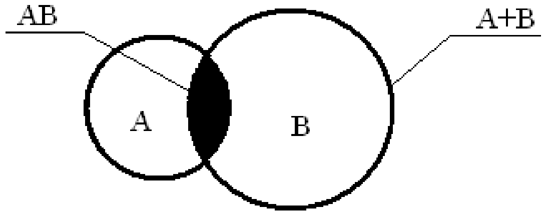
Раздел теории вероятностей, изучающий правила, которым подчиняются алгебраические операции над событиями, и называется **алгеброй событий** (ее иногда называют также алгеброй Буля или булевой алгеброй)**.**

В основе алгебры событий лежат понятия суммы и произведения событий.

Суммой событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. В частности, суммой двух событий A и B будет событие, состоящее в появлении или события A или события B, или обоих вместе. Если события A и B несовместны, то их сумма $A+B$ - событие, состоящее в появлении только одного из них (безразлично какого).

Произведением событий называется событие, состоящее в совместном их появлении. Произведение событий A и В обозначается знаком AB.

Геометрическая интерпретация суммы и произведения событий показана на так называемой диаграмме Венна. Если событие A - попадание случайной точки в левую область, B- попадание случайной точки в правую область, то сумма событий $(A+B)$- попадание наудачу брошенной точки в область, ограниченную внешним контуром, произведение событий AB- в зачернённую область:



Противоположными событиями называются два единственно возможных несовместных события, образующие полную группу.

Событие, противоположное событию A, обозначается через $\overline{A}$.

Очевидно $A+\overline{A}=U$ (U - достоверное событие), $A\overline{A}=V$ (V - невозможное событие) .

Если известны или могут быть непосредственно (на основе классического определения) найдены вероятности простых событий, то вероятности сложных событий вычисляются с помощью основных теорем теории вероятностей.

Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.

Вероятность суммы n попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Следствие 1. Сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу, равна единице

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Теорема сложения вероятностей для совместных событий. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема умножения вероятностей для зависимых событий. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Замечания:

1. События A и B называются зависимыми, если вероятность события B меняется в зависимости от того, произошло или нет событие A.

2. Условной вероятностью события B называется вероятность этого события, вычисленная в предположении, что ему предшествовало появление события A. Она обозначается так : $P_A(B)$.

Для n зависимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ теорема умножения вероятностей записывается в виде

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей для независимых событий. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Теорема о вероятности появления хотя бы одного события.

Если произведено n независимых испытаний, причем вероятности появления событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в каждом из них известны и равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n,$$

где q_i - вероятность противоположного события $\overline{A_i}$ $(i = 1, 2, \ldots n) : q_i = 1 - p_i$.

В частности, если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Пример. В каждом опыте событие A появляется с вероятностью $p = 0{,}75$. Сколько опытов необходимо провести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99 быть уверенным в том, что событие A произойдет хотя бы один раз?

Решение. По условию вероятность появления события хотя бы один раз в n независимых испытаниях

$P(A) = 1 - q^n \geq 0{,}99$, здесь $q = 1 - p = 0{,}25$.

Отсюда $1 - 0{,}25^n \geq 0{,}99$ или $0{,}01 \geq \dfrac{1}{4^n}$.

Непосредственным подбором найдем, что наименьшее допустимое $n = 4$.

Пример. Из партии, содержащей 100 деталей, последовательно одна за другой извлекаются 5 деталей и подвергаются контролю. Условием непригодности всей партии является появление хотя бы одной бракованной детали среди контролируемых. Какова вероятность того, что партия будет принята, если она содержит 5% неисправных деталей ?

Решение. Пусть A – искомое событие, A_k - событие, состоящее в том, что k – ая проверяемая деталь исправна ($k = 1,2,3,4,5$).

Очевидно, $P(A_1) = 0{,}95$, $P_{A_1}(A_2) = \dfrac{94}{99}$ - вероятность того, что вторая проверяемая деталь годная при условии, что первая деталь тоже годная. Аналогично $P_{A_1A_2}(A_3) = \dfrac{93}{98}$, $P_{A_1A_2A_3}(A_4) = \dfrac{92}{97}$, $P_{A_1A_2A_3A_4}(A_5) = \dfrac{91}{96}$.

Применяя теорему умножения вероятностей для зависимых событий, получим $P(A) = \dfrac{95}{100} \cdot \dfrac{94}{99} \cdot \dfrac{93}{98} \cdot \dfrac{92}{97} \cdot \dfrac{91}{96} = 0{,}77$.

Пример. Прибор состоит из 4-х узлов, которые за время работы t могут выходить из строя независимо друг от друга. Надежность (вероятность безотказной работы) i-го узла равна p_i, вероятность отказа $q_i = 1 - p_i$ $(i = 1,2,3,4)$.

Найти вероятности следующих событий: A - все узлы работают безотказно; B - первый узел отказал, остальные нет; C - один из узлов отказал, остальные нет; D - отказали два узла из 4-х; E - отказало не менее двух узлов; F - отказал хотя бы один узел.

Решение . Пусть A_i-работа i-го узла $(i=1,2,3,4)$, $\overline{A_i}$ - отказ i-го узла.

1). Событие A произойдет, если одновременно произойдут события A_1, A_2, A_3, A_4. Следовательно, оно является их произведением:

$$A = A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Применяя к этому равенству событий теорему умножения вероятностей для независимых событий, получим

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = p_1 p_2 p_3 p_4.$$

2). Событие В произойдет, если одновременно произойдут события $\overline{A}_1, A_2, A_3, A_4$. Следовательно $B = \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4$. Вероятность этого события будет равна

$$P(B) = P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = q_1 p_2 p_3 p_4.$$

3). Событие C может осуществиться, если откажет первый узел, а остальные три работают или, если откажет второй узел, а работают первый, третий и четвертый и т.д. Следовательно, C - сложное событие, представляющее собой сумму произведений простых событий:

$$C = \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4 + A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4 + A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4 + A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4.$$

Применяя к этому равенству сначала теорему сложения вероятностей для несовместных событий, а затем к каждому слагаемому теорему умножения вероятностей для независимых событий, получим

$$P(C) = P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(A_4) + P(A_1)P(A_2)\times$$
$$\times P(\overline{A}_3)P(A_4) + P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4) = q_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 +$$
$$+ p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 q_4.$$

4). D - событие, которое может осуществиться шестью различными способами:

$$D = \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4 + \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4 + A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4 + A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4 + A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4.$$

Поэтому

$$P(D)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(A_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)\times$$
$$\times(A_3)P(\overline{A}_4)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)+$$
$$+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)=q_1q_2p_3p_4+q_1p_2q_3p_4+q_1p_2p_3q_4+$$
$$+p_1q_2q_3p_4+p_1q_2p_3q_4+p_1p_2q_3q_4.$$

5). Для вычисления вероятности события E удобно предварительно перейти к противоположному событию $\overline{E}$ (отказ менее двух узлов). Событие $\overline{E}$ произойдет, если осуществится или событие A или событие C, то есть оно является их суммой: $\overline{E}=A+C$. Поэтому вероятность события $\overline{E}$ будет равна

$$P(\overline{E})=P(A)+P(C)=$$
$$p_1p_2p_3p_4+q_1p_2p_3p_4+p_1q_2p_3p_4+p_1p_2q_3q_4+p_1p_2p_3q_4.$$

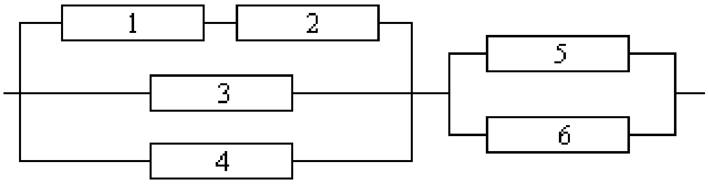
Согласно следствию 2 из теоремы сложения вероятностей

$$P(E)=1-P(\overline{E}).$$

6). Для вычисления вероятности события F применим теорему о вероятности появления хотя бы одного события. Тогда получим

$$P(F)=1-p_1p_2p_3p_4.$$

Пример. Найти вероятность безотказной работы функциональной цепи, состоящей из независимо работающих элементов, если вероятность работы каждого элемента цепи равна p.



Решение. Введем обозначения для всех возможных в данной задаче случайных событий. Пусть A - искомое событие (безотказная работа всей цепи); A_i - безотказная работа i- го элемента цепи (i =1,2,...,6); $\overline{A}_i$ - отказ i - го элемента цепи; C – работа верхнего участка, состоящего из элементов 1,2; B_1 - работа левого контура (элементы 1-4); B_2 - работа правого контура (элементы 5,6).

Тогда $\quad C=A_1A_2, \;\Rightarrow\; P(C)=P(A_1)P(A_2)=p^2, \quad \overline{C}=\overline{A_1A_2}. \quad\Rightarrow$

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - p^2$ - вероятность отказа верхнего участка цепи (1,2);

$\overline{B}_1 = \overline{C}\,\overline{A}_3\,\overline{A}_4; \quad \Rightarrow \quad P(\overline{B}_1) = P(\overline{C})P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4) = (1 - p^2)\,q^2$ - вероятность отказа левого контура, $P(B_1) = 1 - P(\overline{B}_1) = 1 - (1 - p^2)\,q^2$ - вероятность работы левого контура, $\overline{B}_2 = \overline{A}_5\,\overline{A}_6$, $P(\overline{B}_2) = P(\overline{A}_5)P(\overline{A}_6) = q^2$, $P(B_2) = 1 - q^2$ - вероятность работы правого контура.

Работа всей цепи $A = B_1 B_2$. Поэтому вероятность работы всей цепи равна

$$P(A) = P(B_1)P(B_2) = \left[1 - \left(1 - p^2\right)\left(1 - p\right)^2\right]\left[1 - (1 - p)^2\right].$$

<u>Замечания</u> .

1. Для упрощения расчета систем, содержащих параллельно и последовательно соединенные элементы, целесообразно при параллельном соединении элементов рассматривать предварительно состояние отказа, а при последовательном соединении - состояние работы элементов.

2. Как видно из решения, при увеличении числа параллельно соединенных элементов (при резервировании) повышается надежность (вероятность безотказной работы) системы, а при увеличении числа последовательно соединенных элементов надежность системы понижается.

1.5. Формула полной вероятности

Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления хотя бы одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A).$$

События B_i (i = 1, 2,...,n), появление одного из которых предшествует появлению события A, принято называть гипотезами (или априорными гипотезами).

<u>Пример.</u> Три автомата штампуют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности автоматов относятся как 2:3:5. Каждый из автоматов штампует нестандартных деталей в среднем 2,5%; 2% и 1,5% соответственно. Найти вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь окажется стандартной (событие A).

<u>Решение.</u> Пусть B_1 - гипотеза, состоящая в том, что наудачу взятая деталь изготовлена первым автоматом, B_2 - вторым, B_3 - третьим. Очевидно, вероятности осуществления гипотез пропорциональны производительности автоматов. Поэтому

$$P(B_1) = \frac{2}{2+3+5} = 0{,}2, \qquad P(B_2) = 0{,}3, \qquad P(B_3) = 0{,}5.$$

Вероятность того, что деталь стандартна при условии, что она изготовлена первым автоматом $P_{B_1}(A) = 0{,}975$ (так как первый автомат производит в среднем 97,5% стандартных деталей). Аналогично, $P_{B_2}(A) = 0{,}98$, $P_{B_3}(A) = 0{,}985$. Следовательно, вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь стандартна и изготовлена первым автоматом, по теореме умножения вероятностей для зависимых событий равна

$$P(B_1)\, P_{B_1}(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}975 = 0{,}195.$$

Аналогично.
$$P(B_2)\, P_{B_2}(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}98 = 0{,}294;$$
$$P(B_3)\, P_{B_3}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}985 = 0{,}493.$$

Полная вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь стандартна, равна

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)\, P_{B_i}(A) = 0{,}195 + 0{,}294 + 0{,}493 = 0{,}982.$$

<u>Пример.</u> Имеются 2 урны: в первой a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, а затем из второй урны в первую перекладывается один шар. После этого из первой урны берут наугад один шар. Найти вероятность того, что он будет белым.

<u>Решение.</u> Пусть A-искомое событие (извлеченный во второй раз из первой урны шар будет белым). Введем следующие гипотезы:

B_1 - состав шаров в первой урне не изменился (вынули белый шар и вернули белый или вынули черный шар и вернули черный),

B_2 - в первой урне белый шар заменен черным,

B_3 - в первой урне черный шар заменен белым.

Находим вероятности осуществления гипотез:

$$P(B_1)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{d+1}{c+d+1}=\frac{a(c+1)+b(d+1)}{(a+b)(c+d+1)},$$

$$P(B_2)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{d}{c+d+1},\qquad P(B_3)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d+1}.$$

Условные вероятности осуществления события A:

$$P_{B_1}(A)=\frac{a}{a+b},\qquad P_{B_2}(A)=\frac{a-1}{a+b},\qquad P_{B_3}(A)=\frac{a+1}{a+b}.$$

По формуле полной вероятности получим

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P_{B_i}(A)=\frac{a[a(c+1)+b(d+1)]+ad(a-1)+bc(a+1)}{(a+b)^2(c+d+1)}.$$

Замечание. При решении задач на применение формулы полной вероятности следует контролировать правильность определения вероятностей гипотез. Их сумма всегда должна быть равна единице, так как гипотезы образуют полную группу событий, и появление одной из них есть событие достоверное.

1.6. Формула Бейеса

Так как при формулировке теоремы умножения вероятностей безразлично, какое событие считать "первым", а какое "вторым", то

$$P(AB_i)=P(A)\cdot P_A(B_i)=P(B_i)\cdot P_{B_i}(A).$$

Отсюда
$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{Bi}(A)}{P(A)}.$$

Подставляя вместо $P(A)$ ее значение по формуле полной вероятности, получим, так называемую, формулу Бейеса

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\,P_{Bi}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\,P_{Bi}(A)}\qquad (i=1,2,\cdots n).$$

Формула Бейеса позволяет переоценить вероятности гипотез $B_1, B_2, \ldots B_n$ после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A, то есть позволяет вычислить вероятности гипотез после опыта (так называемых, апостериорных гипотез).

Пример. Детали попадают на проверку стандартности к одному из двух контролёров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролёру равна 0,7; ко второму – 0,3. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролёром, равна 0,94; вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной (событие А). Найти вероятность того, что ее проверял первый контролёр.

Решение. Возможны 2 гипотезы:

B_1 - деталь проверял первый контролёр,

B_2 - деталь проверял второй контролёр.

По условию задачи $P(B_1) = 0{,}7, \quad P(B_2) = 0{,}3.$

Условные вероятности $P_{B_1}(A) = 0{,}94, \quad P_{B_2}(A) = 0{,}98$.

Вероятность того, что признанную стандартной годную деталь проверял первый контролёр, равна

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}94}{0{,}7 \cdot 0{,}94 + 0{,}3 \cdot 0{,}98} = 0{,}69.$$

1.7. Формула Бернулли

В практических приложениях теории вероятности часто используется схема повторяющихся независимых испытаний с двумя возможными исходами в каждом испытании (биномиальная схема или схема Бернулли).

Если вероятность появления события A в каждом отдельном испытании постоянна и равна p, то вероятность $P_n(k)$ появления события k раз в n независимых испытаниях (следовательно, непоявления события $n-k$ раз с вероятностью $q = 1 - p$) определяется по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Замечание. Вероятность того, что событие A в n независимых испытаниях наступит: а) менее k раз; б) не менее k раз; в) более k раз; г) не более k раз находят, применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий по формулам:

а) $P_n(<k) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k-1),$

б) $P_n(\geq k) = P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n),$

в) $P_n(> k) = P(k+1) + P(k+2) + ... + P_n(n),$

г) $P(\leq k) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k).$

Пример. Вероятность изготовления стандартной детали при изготовлении партии однотипных деталей равна 0,9. Что вероятнее: появление не более одной бракованной детали в партии из шести деталей или не более двух бракованных деталей в партии из 12 деталей ?

Решение. Пусть A - появление не более одной бракованной детали в партии из шести деталей, A_1 - событие, состоящее в том, что все детали годные (0 бракованных), A_2 - одна бракованная деталь в малой партии. Тогда

$$A = A_1 + A_2.$$

По теореме сложения вероятностей для несовместных событий

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2).$$

Изготовление каждой отдельной детали и проверка ее качества могут рассматриваться как отдельное независимое испытание.

Поэтому $\qquad P(A) = P_6(\leq 1) = P_6(0) + P_6(1).$

Так как вероятность появления интересующего нас события: бракованной детали $p = 0{,}1$, то применяя к каждому слагаемому формулу Бернулли при $q = 0{,}9,\quad n = 6,$ получим

$$P(A) = P_6(\leq 1) = q^6 + C_6^1 pq^5 = q^5(q + 6p) = 0{,}9^5(0{,}9 + 6 \cdot 0{,}1) = 0{,}8857.$$

Аналогично вычисляя вероятность события B-появления не более двух бракованных деталей в партии из 12-ти деталей, находим

$$P(B) = P_{12}(\leq 2) = P_{12}(0) + P_{12}(1) + P_{12}(2) = q^{12} + C_{12}^1 pq^{11} + C_{12}^2 p^2 q^{10} =$$
$$= 0{,}9^{10}(0{,}9^2 + 12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 66 \cdot 0{,}1^2) = 0{,}8891.$$

Следовательно, $\quad P_{12}(\leq 2) > P_6(\leq 1).$

1.8. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

При больших значениях n непосредственное применение формулы Бернулли затруднительно из-за вычислительных трудностей. В этом случае применяют локальную теорему Лапласа, которая справедлива, если число испытаний *n* достаточно велико (практически при $n \geq 20$).

Если вероятность *p* появления случайного события *A* в каждом испытании постоянна, то вероятность появления события *k* раз в *n* испытаниях приближенно (тем точнее, чем больше *n*) равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ для удобства вычислений табулирована (см. приложение 1). Так как функция $\varphi(x)$ четная, то в таблице приведены значения $\varphi(x)$, соответствующие положительным значениям аргумента.

Обобщением локальной теоремы Лапласа является интегральная теорема Лапласа. Она позволяет найти вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие *A* появится не менее k_1 и не более k_2 раз (при тех же ограничениях)

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz,$$

где
$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Интегральную формулу Лапласа можно представить в виде, удобном для вычислений:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где функция $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ называется **функцией Лапласа.** Она также табулирована (см. приложение 2), причем в таблице приведены значения функции *Φ(x)* для положительных значений аргумента. Но при пользовании таблицей следует иметь в виду, что функция Лапласа нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример. Найти вероятность того, что событие A (переключение передач) наступит 70 раз на трассе длиной 256 км, если вероятность переключения на каждом км этой трассы равна 0,25.

Решение. Число испытаний n соответствует числу км на трассе. Так как $n=256$ велико, применим локальную теорему Лапласа. По условию $p=0{,}25;\ q=0{,}75;\ k=70.$

Тогда $$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-256\cdot 0{,}25}{\sqrt{256\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}8660.$$

По таблице находим $\varphi(0{,}8660)=0{,}2742.$ Искомая вероятность равна

$$P_{256}(70)=\frac{1}{\sqrt{256\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}\varphi(0{,}8660)=0{,}0396.$$

Пример. Вероятность появления события A в каждом из 200 независимых испытаний постоянна и равна $p=0{,}8.$ Найти вероятность того, что событие A появится: а) не менее 150 раз и не более 180 раз; б) не менее 150 раз; в) не более 149 раз.

Решение. Так как n велико и заданы интервалы изменения k, применим интегральную теорему Лапласа.

а) по условию $n=200,\quad p=0{,}8,\quad q=0{,}2,\quad k_1=150,\quad k_2=180.$

Вычислим $$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{150-200\cdot 0{,}8}{\sqrt{200\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-1{,}77,$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{180-200\cdot 0{,}8}{\sqrt{200\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=3{,}54,$$

Искомая вероятность равна

$$P_{200}(150{,}180)=\Phi(3{,}54)-\Phi(-1{,}77)=\Phi(3{,}54)+\Phi(1{,}77).$$

По таблице приложения 2 линейной интерполяцией найдем $\Phi(3{,}54)=0{,}4997,\ \Phi(1{,}77)=0{,}4616,$ следовательно,

$$P_{200}(150{,}180)=0{,}4997+0{,}4616=0{,}9613.$$

б) В рассматриваемом случае следует принять $k_1=150,\ k_2=n=200.$

Поэтому $x_1 = -1{,}77, \quad x_2 = \dfrac{200 - 200 \cdot 0{,}8}{\sqrt{200 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 7{,}08$

и по таблице приложения 2 $\Phi(7{,}08) = 0{,}5.$ Поэтому

$$P_{200}(150{,}200) = \Phi(7{,}08) + \Phi(1{,}77) = 0{,}5 + 0{,}4616 = 0{,}9616.$$

в) События "A появилось не менее 150 раз" и "A появилось не более 149 раз" противоположны. Поэтому

$$P(0,\, 149) = 1 - P_{200}(150{,}200) = 1 - 0{,}9616 = 0{,}0384.$$

<u>Пример.</u> Вероятность изготовления годной детали на станке равна 0,9. Сколько нужно обработать деталей, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 деталей будут годными?

<u>Решение.</u>

По условию $p = 0{,}9,\ q = 0{,}1,\ k_1 = 150,\ k_2 = n,\ P_n(150, n) = 0{,}98.$

Применяя интегральную формулу Лапласа, получим

$$P_n(k_1, n) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

или

$$0{,}98 = \Phi\left(\frac{n - 0{,}9n}{\sqrt{n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0{,}9n}{\sqrt{n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right)..$$

Так как заведомо $n > 150$, то $\sqrt{n}/3 > \sqrt{150}/3 \approx 4{,}1.$ Функция Лапласа возрастающая и $\Phi(4) \approx 0{,}5.$ Поэтому можно принять $\Phi(\sqrt{n}/3) \approx 0{,}5.$ Тогда

$$0{,}98 = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{150 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) \quad \text{или} \quad \Phi\left(\frac{150 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) = -0{,}48.$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2{,}06) = 0{,}48.$ Учитывая, что функция Лапласа нечетная, получим

$$\frac{150 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}} = -2{,}06 \quad \text{или} \quad 0{,}9n - 0{,}618\sqrt{n} - 150 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{n}$, находим $\sqrt{n} \approx 13{,}3.$ Окончательно, требуемое количество деталей $n = 177.$

Задачи для самостоятельного решения

1. (Задача Даламбера). Испытание состоит в двукратном подбрасывании монеты. Какова вероятность того, что в результате испытания герб выпадет хотя бы один раз ?
2. Сколькими способами можно распределить 6 различных предметов между тремя лицами так, чтобы каждый получил по два предмета ?
3. Лотерея выпущена на общую сумму n рублей. Цена одного билета r рублей. Ценные выигрыши падают на c билетов. Найти вероятность ценного выигрыша на один билет.
4. Задумано двузначное число, цифры которого различны. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется:

   а) случайно названное двузначное число;

   б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.
5. Брошены 3 монеты. Найти вероятность того, что выпадут 2 герба.
6. За круглый стол в случайном порядке рассаживаются 4 мужчин и 4 женщины. Найти вероятность того, что никакие два лица одинакового пола не окажутся рядом.
7. Студенты данного курса изучают 8 предметов. В расписание занятий можно поставить 4 предмета в день. Сколько существует различных вариантов составления расписания на день ?
8. Каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5 написана на одной карточке. Извлекаются наугад три карточки. Найти вероятность того, что составленное из них трехзначное число окажется четным.
9. В замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.
10. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.
11. При наборе телефонного номер абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, помня только, что они нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

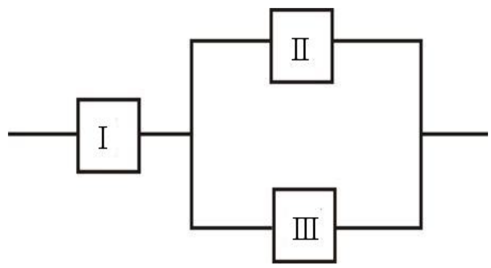
12. На стеллаже 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены 3 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей:
   а) нет бракованных; б) нет годных.
13. Из последовательности чисел $1,2,\ldots,n$ наудачу выбираются 2 числа. Найти вероятность того, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1 < k < n$ - произвольное целое число.
14. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются в две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что:
   а) два наиболее сильных участника будут играть в разных группах;
   б) четыре наиболее сильных участника попадут по два в разные группы.
15. При перевозке 8 изделий одного типа и 12 изделий другого типа повреждены два изделия. Какое событие более вероятно:
   а) повреждены изделия одного типа; б) разных типов.
16. В комплекте m стандартных и n нестандартных деталей. Наугад три раза извлекают деталь. Найти вероятность того, что все три извлеченных детали окажутся стандартными, если: а) - после каждого извлечения деталь возвращают в комплект; б) - извлеченные детали назад не возвращаются.
17. В урне a белых и b черных шаров. Из нее наугад 2 раза извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что оба извлеченных шара будут одинакового цвета, если первый шар в урну: а) возвращают; б) не возвращают.
18. Студент знает 20 из 30 вопросов программы. В выбранном им наугад экзаменационном билете 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент: а) не сдаст экзамен (не ответит ни на один вопрос); б) сдаст на “удовлетворительно” (ответит на один вопрос); в) сдаст на “хорошо” (ответит на 2 вопроса); г) сдаст на “отлично” (ответит на все три вопроса).
19. Некто купил карточку “Спортлото” и отметил в ней 6 из имеющихся 49 номеров, после чего в тираже разыгрывались 6 “выигравших” номеров из 49. Найти вероятности следующих событий:
   A_1 - верно угаданы 3 выигравших номера из 49; A_2 - верно угаданы 4 выигравших номера из 49; A_3 - верно угаданы 5 выигравших номера из 49; A_4 - верно угаданы 6 выигравших номера из 49.

20. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:
 а) все пассажиры выйдут на 4-ом этаже; б) все пассажиры выйдут одновременно; в) все пассажиры выйдут на различных этажах
21. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника в) правильного шестиугольника. (Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения внутри круга).
22. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан круг. Наудачу брошена точка. Найти вероятность попадания точки в область треугольника, не принадлежащую кругу.
23. В ромб со стороной a и углом при вершине основания 60° вписан круг. Наудачу брошена точка. Найти вероятность попадания точки в круг.
24. В круг радиуса R вписан квадрат. Найти вероятность того, что брошенные наугад внутрь круга 2 точки окажутся внутри квадрата.
25. Полет космического корабля можно считать застрахованным от столкновения с метеоритными частицами, если вероятность такой “встречи” $P_0 \le 0{,}001$. Корабль летит со скоростью $V = 11$ км/сек. Площадь его поперечного сечения S =23 м^2. В космическом пространстве на каждые $N_0 = 29 \cdot 10^6$ км^3 приходится одна опасная метеоритная частица. Какова максимально допустимая продолжительность полета корабля ?
26. Два лица договорились о встрече между 18 и 19 часами с условием, что пришедший раньше ждет другого в течение 15 мин, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если приход каждого из лиц в течение указанного часа может произойти в любое время.
27. На отрезке OA длины L числовой оси Ox поставлены две точки $B(x_1)$ и $C(x_2)$, причем $x_2 \ge x_1$. Какова вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB ?
28. При движении автомобиля под его левые и правые колеса попадают препятствия (выступы и впадины дорожного полотна). Пусть A – событие, состоящее в попадании препятствия под левое колесо, B – под правое. Какой смысл имеют события: a) $A+B$; b) AB, c) $\overline{A+B}$, d) $\overline{AB}$?
29. К механизмам управления автомобилем относятся рулевое управление и две тормозные системы. Событие A – исправно рулевое управление,

B_k $(k=1,2)$ - исправна k – ая тормозная система. Автомобиль работоспособен (событие С), если исправно рулевое управление и хотя бы одна тормозная система. Выразить события C и $\overline{C}$ через A и B_k.

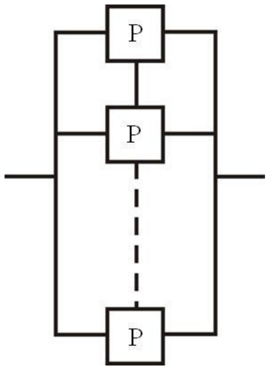
30. Пусть A_1, A_2, A_3 - дефекты, приводящие к опасному перегреву двигателя (A_1 - большое отложение слоя накипи на стенках, A_2 - подтекание воды из радиатора, A_3 - неисправность термостата). Найти выражения для следующих событий: A – ни одного отказа двигателя за время работы, B - только один отказ двигателя, C - 2 отказа двигателя, D - 3 отказа двигателя, E - хотя бы один отказ, F - не менее двух отказов.
31. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью p. Найти: а) вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания; б) вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включить зажигание не более двух раз.
32. К автобусной остановке каждые 6 мин. подходит автобус маршрута a и каждые 9 мин. - автобус маршрута b. Предполагая моменты прихода на остановку автобусов независимыми, найти вероятность того, что:
а) первый подошедший автобус окажется автобусом маршрута a; б) автобус какого – либо маршрута подойдет к остановке в течение 3-х минут.
33. Студент знает 20 из 30 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент даст правильный ответ на три последовательно предложенные ему один за другим вопроса программы.
34. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него меньше: когда он тащит билет первым или последним ?
35. 20 человек, разыгрывая одну вещь, по очереди тянут жребий. Какова вероятность выиграть у первого второго и т. д. участников ?
36. Имеются две урны: в первой a белых и b черных шаров, во второй - c белых и d черных шаров. Из каждой урны наугад выбирают по одному шару. Определить вероятности следующих событий:
а) – оба шара разных цветов; б) – оба шара одного цвета.
37. В урне один белый и два черных шара. Из урны два игрока поочередно наугад извлекают шар, причем после каждого извлечения шар возвращается в урну. Выигравшим считается тот, кто первым извлечет белый шар. Найти вероятность выигрыша для первого игрока, если максимальное число попыток равно трем.

38. В урне 2 белых и 4 черных шара. Два игрока поочередно извлекают шар (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша для каждого участника игры.
39. В одной коробке 5 коротких и 10 длинных болтов, в другой коробке 10 коротких и 5 длинных болтов. Найти вероятность того, что хотя бы из одной коробки будет вынут один короткий болт, если из каждой коробки вынуть по одному болту.
40. Производятся испытания некоторого устройства. При каждом испытании устройство выходит из строя с вероятностью p. После первого выхода из строя устройство ремонтируется, после второго – признается негодным. Найти вероятность того, что устройство окончательно выйдет из строя в точности при k- ом испытании.
41. Прибор состоит из трех узлов. В первом узле n_1 элементов, во втором - n_2 и в третьем n_3 элементов. Для работы прибора безусловно необходим узел I; два других узла II и III дублируют друг друга (см. рис.). Вероятность работы каждого элемента одна и та же и равна p. Выход из строя одного элемента означает выход из строя всего узла. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность безотказной работы прибора.



42. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью p_0 (независимо от других) оказывается дефектным. При осмотре дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p. Для контроля из продукции завода отбираются n изделий. Найти вероятность следующих событий: A – ни в одном из изделий не будет обнаружено дефекта; B – среди n изделий ровно в двух будет обнаружен дефект; C – среди n изделий не менее чем в двух будет обнаружен дефект.
43. Для повышения надежности устройства оно дублируется (n-1) другими такими же устройствами (см. рис.). Надежность (вероятность безотказной работы) каждого устройства равна p. Найти надежность систе-

мы. Сколько надо взять устройств, чтобы повысить надежность системы до заданной величины P_0 ?

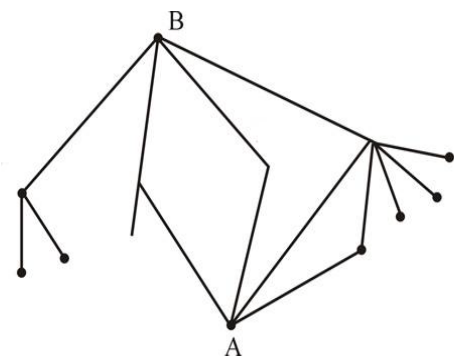


44. В течение времени t эксплуатировалось N автомашин. Каждая из них имеет надежность p и выходит из строя независимо от других. Найти вероятность того, что механик, приступающий по окончании времени t к ремонту неисправных автомашин, не справится со своей задачей за время τ, если на ремонт каждой из неисправных автомашин ему требуется время τ_0.
45. Автомашину с преступниками преследуют две милицейские машины. Преступники начинают стрельбу и производят по одному выстрелу по милицейским машинам, подбивая их с вероятностью p_0. Если милицейская машина не подбита, то она независимо от другой стреляет по преступникам и подбивает их машину с вероятностью p. Найти вероятность того, что будет подбита: а) ровно одна машина (любая); б) хотя бы одна машина (любая).
46. Какова вероятность того, что хотя бы один из трех основных узлов (рама, передняя и задняя оси, подвеска) ходовой части автомобиля останется исправным после 10000 км пробега, если известно, что для каждого узла такая вероятность равна 0,4 ?
47. Игральная кость брошена n раз. Чему равна вероятность того, что:
    а) шестерка выпадет один раз; б) шестерка выпадет хотя бы один раз;
    в) шестерка выпадет не менее двух раз.
48. Электрическая цепь состоит из восьми параллельно включенных потребителей. Вероятность работы каждого из них равна 0,8. Взаимное влияние в цепи отсутствует. Найти вероятность того, что откажет не менее половины потребителей. Сколько потребителей надо включить параллельно, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99 быть уверенным в том, что не откажет хотя бы один из них ?

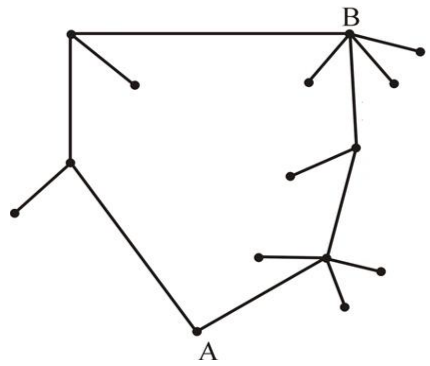
49. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,1. Сколько выстрелов надо произвести, чтобы с вероятностью 0,9 быть уверенным в том, что число попаданий будет не менее 10 ?

50. На рисунках а) и б) изображены схемы дорог, Турист выходит из пункта *B,* выбирая наугад на разветвлении дорог один из возможных маршрутов. Какова вероятность того, что он беспрепятственно (то есть не заходя ни в один тупик) попадет в пункт *A* ?

а)



б)



51. Из урны, содержащей M белых и N-M черных шаров, один шар неизвестного цвета утерян. Какова вероятность извлечь наудачу из урны белый шар ?

52. Имеются две урны: в первой a белых и b черных шаров, во второй c белых и d черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. Затем из второй урны извлекают наудачу один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

53. В автобусе едут n пассажиров На следующей остановке каждый из них выходит с вероятностью p. Кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир, а с вероятностью $(1\text{-}\ p_0)$ – один новый пассажир. Найти вероятность того, что когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем будет по-прежнему n пассажиров.

54. Группа студентов состоит из 4-х отличников, 6-ти хорошо успевающих и 15 занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается наугад один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

55. Имеются два комплекта деталей: в первом 5 стандартных и 3 нестандартных детали, во втором 6 стандартных и 2 нестандартных детали. Из первого комплекта во второй переложили, не глядя, две детали, а затем из второго комплекта взяли одну деталь. Какова вероятность того, что она будет стандартной ?
56. Имеются N лунок, по которым случайным образом разбрасываются M шариков. Найти вероятность того, что в данную лунку попадет k шариков.
57. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что при пяти испытаниях ровно в трех появится в точности по две шестерки.
58. Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0,4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель (выводит ее из строя) с вероятностью 0,3; если два снаряда, они поражают цель с вероятностью 0,7; если три снаряда – с вероятностью 0,9. Найти полную вероятность поражения цели.
59. Колонна из трех грузовых машин и ведущего тягача послана для доставки грузов на военный объект. Без тягача выход к объекту невозможен. В пути автомашины проходят через зону обстрела, в которой каждая из них может быть подбита с вероятностью 0,3. После прибытия на объект все 4 машины разгружаются независимо. Вероятность полной разгрузки каждой из них за заданное время равна 0,7. Какова вероятность того, что весь груз будет благополучно передан на объект ?
60. Имеются 3 урны: в первой a белых шаров и b черных, во второй - c белых и d черных шаров, в третьей k белых шаров (черных нет). Выбирается наудачу одна из урн и из нее вынимается шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой, второй или третьей урны.
61. Монета брошена N раз (N велико!). Найти вероятность того, что герб выпадет ровно $N/2$ раз.
62. Производство дает 1% брака. Найти вероятность того, что из взятых для контроля 1100 деталей будет забраковано не более 17.
63. Имеется 100 станков, работающих независимо друг от друга, одинаковой мощности и одного и того же режима работы, при котором их привод включен в течение 0,8 всего рабочего времени. Найти веро-

ятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков.

64. Изделия испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытание равны p_0 и независимы. Испытания проводятся до тех пор, пока какое – либо изделие не выйдет из строя. Вывести формулу для распределения вероятностей числа испытаний.

Ответы

1. 0,75. **2**. $P_3C_6^2=90$. **3.** $\dfrac{cr}{n}$. **4.** а) $\dfrac{1}{90}$; б) $\dfrac{1}{81}$. **5.** $\dfrac{3}{8}$. **6.** $P=\dfrac{2P_4P_4}{P_8}=\dfrac{1}{35}$.

7. 1680. **8.** 0,4. **9.** $\dfrac{1}{1296}$. **10.** 0,096. **11.** 0,05. **12**. а) $P\approx 0{,}727$;

б) $P\approx 0{,}00074$. **13.** $\dfrac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$. **14.** а) $\dfrac{10}{19}$; б) $\dfrac{135}{323}$. **15.** а) $\dfrac{47}{95}$;

б) $\dfrac{48}{95}$; более вероятно повреждение изделий разных типов.

16. а) $\left(\dfrac{m}{m+n}\right)^3$; б) $\dfrac{m}{m+n}\cdot\dfrac{m-1}{m+n-1}\cdot\dfrac{m-2}{m+n-2}$.

17. а) $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^2$; б) $\dfrac{a}{a+b}\cdot\dfrac{a-1}{a+b-1}+\dfrac{b}{a+b}\cdot\dfrac{b-1}{a+b-1}$.

18. а) $\dfrac{6}{203}$; б) $\dfrac{45}{203}$; в) $\dfrac{95}{203}$; г) $\dfrac{57}{203}$. **19.** $P(A_1)\approx 0{,}0177$;

$P(A_2)\approx 0{,}969\cdot 10^{-3}$; $P(A_3)\approx 0{,}185\cdot 10^{-4}$; $P(A_4)\approx 0{,}715\cdot 10^{-7}$.

20. а) $\dfrac{1}{216}$; б) $\dfrac{1}{36}$; в) $\dfrac{5}{54}$. **21.** а) $\dfrac{2}{\pi}$; б) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; в) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$. **22.** $\dfrac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{3+2\sqrt{2}}$.

23. $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{8}$. **24.** $\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2\approx 0{,}405$. **25.** $t\le\dfrac{P_0N_0}{SV}\approx$ 3 годам и 5 месяцам.

26. $\dfrac{7}{16}$. **27.** 0,5. **31.** а) $(1-p)p$; б) $p(2-p)$. **32.** а) 0,6; б) $\dfrac{2}{3}$.

33. $\dfrac{57}{115}$. **34.** Безразлично. **35.** Одинакова и равна 0,05.

36. а) $\dfrac{ad+bc}{(a+b)(c+d)}$; б) $\dfrac{ac+bd}{(a+b)(c+d)}$. **37.** $\dfrac{133}{243}$. **38.** $P_1=0{,}6$; $P_2=0{,}4$.

39. $\frac{7}{9}$. **40.** $(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$. **41.** $p^{n_1}\left[1-\left(1-p^{n_1}\right)\left(1-p^{n_2}\right)\right]$

42. $P(A)=\left(1-p_0p\right)^n$; $P(B)=C_n^2\left(p_0p\right)^2\left(1-p_0p\right)^{n-2}$;

$P(C)=1-\left(1-p_0p\right)^{n-1}(1-p_0p+np_0p)$.

43. $P=1-(1-p)^n$; $n\geq\frac{\lg(1-P_0)}{\lg(1-p)}$. **44.** $\sum_{m=l+1}^{N}C_N^m(1-p)^m p^{N-m}$. *Указание*: мастер не справится со своей задачей, если число неисправных автомобилей больше, чем $l=\left[\frac{\tau}{\tau_0}\right]$, где $\left[\frac{\tau}{\tau_0}\right]$ - наибольшее целое число, заключенное в $\frac{\tau}{\tau_0}$. **45.** а) $(1-p_0)^2\left[1-(1-p)^2\right]+2p_0(1-p_0)(1-p)$;

б) $1-(1-p_0)^2(1-p)^2$. **46.** 0,784. **47.** а) $\left(\frac{1}{6}\right)^n$; б) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$;

в) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$. **48.** $P=0{,}056$; $n=3$. **49.** 136. **50.** а) $\frac{67}{120}$; б) $\frac{3}{40}$.

51. $\frac{M}{N}$. **52.** $\frac{a(c+1)+cb}{(a+b)(c+d+1)}$. **53.** $p_0(1-p)^n+(1-p_0)np(1-p)^{n-1}$.

54. 0,6. **55.** $\frac{29}{40}$. **56.** $C_M^k\left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)^{M-k}$. **57.** $C_5^3\left(\frac{5}{72}\right)^3\left(\frac{67}{72}\right)^2\approx 0{,}0029$.

58. 0,389. **59.** $P\approx 0{,}672$. **60.** $P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}$;

$$P_A(B_2)=\frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1};\qquad P_A(B_3)=\frac{1}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}.$$

Указание: Так как результат опыта уже известен, следует применить формулы Бейеса. Событие A – появление белого шара. Априорные гипотезы: B_i - выбор i–ой урны (i=1,2,3), $P(B_i)=1/3$.

61. $0{,}7978/\sqrt{N}$. *Указание*: так как N велико и испытания независимы, то следует применить локальную теорему Лапласа. **62.** $P\approx 0{,}965$. **63.** $P\approx 0{,}927$. **64.** Если испытания закончатся на k – ом изделии (k = ,2,3,…), то $P(k)=p_0^{k-1}(1-p_0)$.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной называется переменная величина, которая в результате опыта принимает то или иное значение, заранее неизвестно, какое именно.

Случайные величины принято обозначать заглавными латинскими буквами: X, Y, Z,..., а их возможные значения - соответствующими строчными буквами: x, y, z,...

Различают два типа случайных величин: *дискретные и непрерывные*.

Случайная величина называется **дискретной**, если её возможные значения образуют последовательность отдельных, изолированных друг от друга значений, которые можно перечислить, и **непрерывной**, если её возможные значения непрерывно заполняют некоторый интервал.

Примеры случайных величин:

- дискретных: число попаданий или промахов в серии выстрелов, число выпадений герба или решки при подбрасывании монеты, в схеме Бернулли повторяющихся независимых испытаний - число появлений события при n испытаниях и т.п.;

- непрерывных: отклонение размера детали от номинального, ресурс (время безотказной работы) системы, физические параметры системы (температура, давление, влажность), длина тормозного пути автомобиля, продолжительность жизни человека и т.п.

2.1. Закон распределения случайной величины

Случайная величина полностью определена с вероятностной точки зрения, если известен ее закон распределения.

Законом распределения случайной величины называется соотношение между возможными значениями этой величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения может быть задан таблично, графически или аналитически.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины является таблица, состоящая из двух строк, в первой из которых перечислены возможные значения случайной величины X, а второй - соответствующие им вероятности.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Такая таблица называется *рядом распределения*, а ее графическое изображение - *многоугольником распределения*.

Заметим, что сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины должна быть равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1.$$

Ряд распределения может быть построен только для дискретных случайных величин.

Пример. В партии, содержащей 12 изделий, имеются 3 бракованных. Выбраны случайным образом 4 изделия для проверки их качества. Найти закон распределения случайной величины X - числа бракованных изделий среди отобранных.

Решение. Число бракованных изделий среди отобранных - это заранее неизвестная дискретная случайная величина, возможные значения которой $x_i = 0, 1, 2, 3.$

$$P(X = x_i) = \frac{C_n^{x_i} C_{N-n}^{m-x_i}}{C_N^m}.$$

Здесь N=12, m=4, n=3, поэтому

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_9^4}{C_{12}^4} = \frac{14}{55}, \quad P(X=1) = \frac{C_3^1 C_9^3}{C_{12}^4} = \frac{28}{55},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_9^2}{C_{12}^4} = \frac{12}{55}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3 C_9^1}{C_{12}^4} = \frac{1}{55}.$$

В результате получим

X	0	1	2	3
P	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

$$\sum p_i = 1$$

Пример. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлены 3 светофора, дающие независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 30 сек., желтый - в течение 5 сек., красный – в течение 25 сек. Построить закон распределения числа остановок автомобиля.

Решение. Число остановок автомобиля X - дискретная случайная величина, возможные значения которой $X_k = 0; 1; 2; 3$. Вероятность остановки перед каждым светофором

$$P = \frac{25+5}{30+25+5} = 0{,}5,$$

следовательно, вероятность проезда $q = 1 - p = 0{,}5$.
Проезд автомобиля мимо каждого светофора можно рассматривать как отдельное независимое испытание. По формуле Бернулли находим

$$P(X = k) = C_3^k p^x q^{3-x} \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Поэтому ряд распределения числа остановок автомобиля будет иметь вид

$X=k$	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

2.2. Функциональные характеристики случайной величины

Для аналитического описания закона распределения случайной величины применяют интегральную функцию распределения вероятностей или дифференциальную функцию распределения вероятностей случайной величины (её также называют плотностью распределения вероятностей или плотностью вероятностей).

Интегральная функция распределения вероятностей случайной величины

Интегральной функцией распределения вероятностей случайной величины F(x) называется вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, меньшее произвольно заданного числа x, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

$F(x)$ - универсальная характеристика, существующая и для дискретных и для непрерывных случайных величин.

Свойства F(x).

1. $0 \le F(x) \le 1,$ так как *F(x)* – вероятность.
2. $F(-\infty) = 0,$ так как $(X < -\infty)$ - невозможное событие.
   $F(+\infty) = 1,$ так как $(X < +\infty)$ - достоверное событие .
3. Если возможные значения $X \in (a, b),$ то $F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le a, \\ 1 & при \quad x \ge b. \end{cases}$
4. $F(x)$ - неубывающая функция, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.
5. Вероятность попадания случайной величины X на конечный интервал $[a,b)$ равна приращению интегральной функции на этом интервале

$$P[a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

6. В пределе, при стягивании интервала в точку

$$P(X = a) = \lim_{b \to a} P(a \le X < b) = \lim_{b \to a} [F(b) - F(a)] = F(a+0) - F(a) =$$
$$= \begin{cases} 0 & при \quad F(a+0) = F(a), \\ P > 0 & при \quad F(a+0) \ne F(a). \end{cases}$$

Следовательно, если X - непрерывная случайная величина, то *F(x)*-непрерывная функция, и вероятность того, что X примет одно определенное значение (то есть вероятность попадания X в точку a), равна нулю. Поэтому для непрерывной случайной величины X справедливы равенства

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b).$$

Если *F(x)* разрывна в точке a, то скачок функции *F(x)* в этой точке равен вероятности попадания X в неё. Поэтому для дискретных случайных величин

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k,$$

где суммирование распространяется на все те значения x_k, которые меньше *x,* и график функции распределения дискретной случайной величины представляет собой ступенчатую функцию, непрерывную слева.

Пример. Ряд распределения дискретной случайной величины имеет вид

X	1	2	3
P	0,3	0,5	0,2

Найти интегральную функцию распределения и построить ее график.

Решение. По теореме сложения вероятностей для несовместных событий найдем:

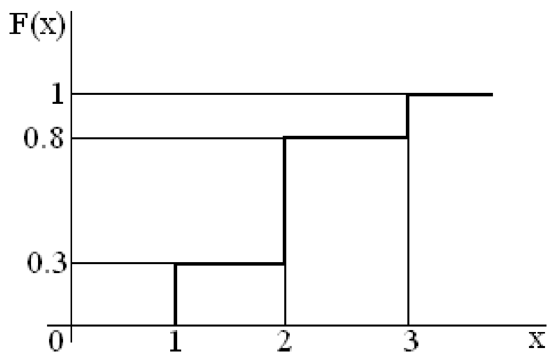
Для $x \le 1$ $F(x) = P(X < x) = 0$, так как значения $x < 1$ случайная величина X не принимает;

при $1 < x \le 2$ $F(x) = P(X < x) = 0{,}3$, так как X может принять значение 1 с вероятностью 0,3;

при $2 < x \le 3$ $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$.

Если $x > 3$, то $F(x) = 1$, так как событие $X \le 3$ достоверно, и его вероятность равна единице.

Следовательно, искомая функция распределения имеет вид



$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1, \\ 0{,}3 & при \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}8 & при \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & при \quad x > 3. \end{cases}$$

Пример. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ x^2 & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате трех независимых испытаний величина X дважды примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,75).

Решение. Вероятность попадания X на интервал (0,25; 0,75) в одном испытании равна

$$P(0{,}25 < X < 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) = 0{,}75^2 - 0{,}25^2 = 0{,}5 .$$

По формуле Бернулли $P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 0{,}375.$

Плотность вероятностей

Пусть X – непрерывная случайная величина с функцией распределения *F(x)*, которую будем предполагать не только непрерывной, но и дифференцируемой. Вероятность попадания X на малый интервал Δx равна

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Отношение этой вероятности к длине участка Δx в пределе при $\Delta x \to 0$ обозначают через *f(x)*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x).$$

Функция $f(x) = F'(x)$ - первая производная от интегральной функции распределения $F(x)$ называется **плотностью вероятностей** или дифференциальной функцией распределения. График плотности вероятностей называется *кривой распределения*.

В отличие от *F(x)* плотность вероятностей не является универсальной характеристикой распределения, а существует только для непрерывных случайных величин.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины на конечный интервал (α, β) равна определенному интегралу от плотности вероятностей, взятому в пределах от α до β:

$$P(a < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx..$$

Полагая в этой формуле $\alpha = -\infty$, $\beta = x$ и учитывая определение *F(x)*, получим

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

то есть определение интегральной функции распределения $F(x)$ по известной плотности вероятностей сводится к вычислению интеграла с переменным верхним пределом.

Свойства *f(x)*.

1. $f(x)\ge 0$, то есть *f(x)* - неотрицательная функция.

2. Условие нормировки $f(x)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Следовательно, площадь, ограниченная графиком плотности вероятностей и осью OX, равна единице.

3. Если все возможные значения $x\in(a,b)$, то $\int_{a}^{b} f(x)dx=1$.

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x\le 0, \\ a\sin x & \textit{при} \quad 0<x\le\pi, \\ 0 & \textit{при} \quad x>\pi. \end{cases}$$

Найти: параметр a; интегральную функцию распределения *F(x)*; вероятность попадания X на интервал $(\pi/3;2\pi/3)$.

Решение.

По условию нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=a\int_{0}^{\pi}\sin xdx=1$, отсюда

$$a=\frac{1}{\int_{0}^{\pi}\sin xdx}=\frac{1}{-\cos x\big|_{0}^{\pi}}=\frac{1}{2}.$$

При $x\le 0$ $f(x)=0$, поэтому $F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx=0.$

При $0<x\le\pi$ $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}\sin xdx=-\frac{1}{2}\cos x\big|_{0}^{x}=\frac{1}{2}(1-\cos x)$.

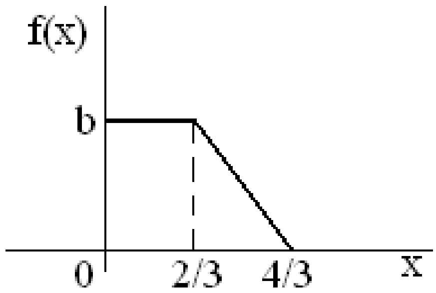
При $x > \pi$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx + \int\limits_{\pi}^{x} 0 \cdot dx = -\frac{\cos x}{2}\Big|_{0}^{\pi} = 1.$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}5(1 - \cos x) & \textit{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 1 & \textit{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

3). $P(\pi/3 < X < 2\pi/3) = F(2\pi/3) - F(\pi/3) = 0{,}5.$

Пример. Плотность вероятностей задана графически с точностью до неизвестного параметра *b* (см. рис.). Найти: полное аналитическое выражение для *f(x); F(x);* $P(1/3 < X < 1)$.



Решение.

1). Так как площадь под кривой распределения по условию нормировки равна единице, то $S = b\frac{2}{3} + \frac{1}{2}b\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) = 1,$ откуда $b = 1$. Поэтому

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0, \\ 1 & \textit{при} \quad 0 < x \le 2/3, \\ -3x/2 + 2 & \textit{при} \quad 2/3 < x \le 4/3, \\ 0 & \textit{при} \quad x > 4/3. \end{cases}$$

2). Интегральная функция распределения будет равна:

при $x \le 0$ $\quad F(x) = 0,$

при $0 < x \le 2/3$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{x} 1 \cdot dx = x,$

при $2/3 < x \le 4/3$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{2/3} 1 \cdot dx + \int\limits_{2/3}^{x} [(-3/2) \cdot x + 2] dx = -3 \cdot x^2/4 + 2x - 1/3,$$

при $x > 4/3$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{2/3} 1 \cdot dx + \int_{2/3}^{4.3} [(-3/2) \cdot x + 2] dx + \int_{4.3}^{ч} 0 \cdot dx = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ x & при \quad 0 < x \le 2/3, \\ -\dfrac{3x^2}{4} + 2x - \dfrac{1}{3} & при \quad 2/3 < x \le 4/3, \\ 1 & при \quad x > 4/3. \end{cases}$$

3). $P(1/3 < x < 1) = F(1) - F(1/3) = 7/12$.

Замечание. Так как для непрерывной случайной величины *F(x)* - непрерывная функция, то ее значения не должны претерпевать разрывов на границах интервалов изменения *x*. Это должно служить контролем правильности вычислений *F(x)*.

2.3. Числовые характеристики случайной величины

Задание закона распределения аналитически - с помощью функций *F(x)* или *f(x)* позволяет полностью и однозначно описать случайную величину. Но во многих случаях в этом либо нет необходимости, либо закон распределения бывает неизвестен. Тогда ограничиваются меньшими сведениями, а именно некоторыми характерными неслучайными числами, каждое из которых характеризует то или иное свойство распределения случайной величины.

Такие числа, позволяющие отразить наиболее существенные особенности распределения случайной величины, называются *числовыми характеристиками случайной величины*. Важнейшими из них являются математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием (или средним значением) дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на соответствуюшие им вероятности

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

M(X) называют еще центром распределения или характеристикой положения случайной величины на числовой оси. *Это среднее значение, вокруг которого группируются остальные возможные значения случайной величины.*

Для непрерывной случайной величины

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx.$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины $X \in (a,b)$, то

$$M(X) = \int_{a}^{b} x f(x) dx.$$

Свойства *M*(*X*)

1. $M(C) = C$, где $C = \mathrm{const}$.

2. $M(CX) = C\,M(X)$.

3. $M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i)$.

4. Для независимых случайных величин X, Y $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Дисперсия - *это характеристика рассеивания (разбросанности) возможных значений случайной величины относительно ее среднего значения.* Она определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2.$$

Для вычисления дисперсии удобно пользоваться формулой

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Для дискретных случайных величин $D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 p_i$,

для непрерывных случайных величин

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - M(X)\right]^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X).$$

Если возможные значения X принадлежат интервалу (a,b), то

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)dx=\int_a^b x^2 f(x)dx-M^2(X).$$

Свойства *D(X)*

1. $D(C) = 0$, так как постоянная величина C рассеивания не имеет.

2. $D(CX) = C^2\, D(X)$, то есть постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ - для независимых случайных величин.

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины X, что неудобно. Поэтому на практике часто применяют числовую характеристику $\sigma=\sqrt{D(X)}$, размерность которой совпадает с размерностью X. Величина $\sigma=\sqrt{D(X)}$ называется **средним квадратическим отклонением.**

Пример. Производится одно испытание. Вероятность появления события A в этом испытании равна p. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появлений события A.

Решение. Число появлений события A при одном испытании X – дискретная случайная величина, ряд распределения которой имеет вид

X	0	1
P	q	P

Поэтому

$$M(X)=\sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 0\cdot q + 1\cdot p = p,$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{2}\left[x_i - M(X)\right]^2 p_i = (0-p)^2 q + (1-p)^2 p = pq.$$

Пример. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределения:

X	-2	1	3	5
P	0,1	0,3	0,2	…

Y	-1	1	2	4
P	0,3	0,4	0,2	…

Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины $Z = 3X - 2Y^2$.

Решение. По свойствам дисперсии

$$D(Z) = D(3X - 2Y^2) = D(3X) + D(2Y^2) = 9D(X) + 4D(Y^2).$$

Так как сумма вероятностей возможных значений случайной величины равна единице, то

$$P(X = 5) = 1 - (0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2) = 0{,}4,$$

$$P(Y = 4) = 1 - (0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2) = 0{,}1.$$

По определению дисперсии

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum x_i^2 p_i - (\sum x_i p_i)^2,$$

$$D(Y^2) = M(Y^4) - M^2(Y^2) = \sum y_i^4 p_i - (\sum y_i^2 p_i)^2.$$

Составим ряды распределения случайных величин X^2, Y^2, Y^4:

X^2	4	1	9	25
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Y^2	1	4	16
P	0,7	0,2	0,1

Y^4	1	16	256
P	0,7	0,2	0,1

Поэтому $M(X) = (-2)\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}4 = 2{,}7,$

$$M(X^2) = 4\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}2 + 25\cdot 0{,}4 = 12{,}5,$$

$$M(Y^2) = 1\cdot 0{,}7 + 4\cdot 0{,}2 + 16\cdot 0{,}1 = 3{,}1,$$

$$M(Y^4) = 1\cdot 0{,}7 + 16\cdot 0{,}2 + 256\cdot 0{,}1 = 29{,}5.$$

Следовательно, $D(X) = 12{,}5 - 2{,}7^2 = 5{,}21, \quad D(Y^2) = 29{,}5 - 3{,}1^2 = 19{,}89,$

$$D(Z) = 9D(X) + 4D(Y^2) = 9\cdot 5{,}21 + 4\cdot 19{,}89 = 126{,}45.$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = 11{,}24.$$

Пример. Случайная величина X задана рядом распределения

X	-2	1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Найти дисперсию случайной величины $Z = 3X^2 - 2X + 1$.

Решение. Так как случайные величины X и X^2 не являются независимыми, то составляем ряд распределения случайной величины Z:

Z	17	2	9	22
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Поэтому ряд распределения Z^2 будет иметь вид

Z^2	289	4	81	484
P	0,2	0,3	0,4	0,1

В результате получим

$$D(Z) = M(Z^2) - M^2(Z) = 289 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 81 \cdot 0{,}4 + 484 \cdot 0{,}1 - (17 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}4 + 22 \cdot 0{,}1)^2 = 139{,}8 - 9{,}8^2 = 43{,}76.$$

Кроме основных характеристик распределения – центра (математического ожидания) и рассеивания (дисперсии) на практике часто нужно описать и другие важные числовые характеристики распределения. Наиболее употребительные из них: мода, медиана, коэффициенты асимметрии, эксцесса.

Модой дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, модой непрерывной случайной величины - то ее значение, при котором плотность вероятности максимальна.

Медианой Me случайной величины называется такое ее значение, для которого $P(X < Me) = P(X > Me)$.

В случае симметричного распределения медиана, математическое ожидание и мода совпадают.

Для характеристики асимметрии (или “скошенности”) распределения используется величина “**коэффициента асимметрии**’

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

где μ_3 - третий центральный момент.

В общем случае в теории вероятностей центральным моментом k –го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k –

ой степени так называемой центрированной случайной величины $X - M(X)$:

$$\mu_k = M\left\{\left[X - M(X)\right]^k\right\}.$$

Поэтому третий центральный момент равен

для дискретной случайной величины $\qquad \mu_3 = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i - M(X)\right]^3 p_i,$

для непрерывной случайной величины $\qquad \mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x - M(X)\right]^3 f(x)dx.$

Если распределение симметрично относительно среднего значения, то $\mu_3 = A_s = 0$.

“**Крутовершинность**” (или островершинность, плосковершинность) распределения характеризуется величиной эксцесса

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

где μ_4 - четвертый центральный момент [3]. Для наиболее распространенного нормального закона распределения (см. ниже), который является как бы эталоном, с которым сравнивают другие распределения, $E_k = 0$.

3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1. Биномиальный закон распределения

К биномиальному закону приводит задача о повторении независимых испытаний.

Биномиальным законом распределения называется распределение вероятностей дискретной случайной величины $X = k$ - числа появлений события в n независимых испытаниях, описываемое формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Ряд распределения биномиального закона имеет вид

$X = k$	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Справедливы теоремы:

1. При биномиальном распределении математическое ожидание (среднее значение) числа появлений события равно произведению числа испытаний на вероятность p появления события в одном испытании

$$M(k) = np,$$

а дисперсия равна

$$D(k) = npq.$$

2. *Наивероятнейшее число появлений события* в n независимых испытаниях (такое число k^*, которое при данном n имеет наибольшую вероятность) удовлетворяет двойному неравенству

$$np - q \le k^* \le np + p\ .$$

Если $(np - q)$ - дробное число, то существует единственное значение k^*, если $(np - q)$ - целое число, то k^* может принимать два значения.

Пример. Произведено 6 выстрелов по цели. Вероятность промаха при каждом выстреле одинакова и равна 0,4. Найти наивероятнейшее число попаданий и его вероятность; вероятность разрушения цели, если для этого требуется не менее двух попаданий. Построить ряд распределения числа попаданий.

Решение. Каждый выстрел можно рассматривать как отдельное независимое испытание. Поэтому применима схема повторяющихся независимых испытаний. По условию *n = 6, p = 0,6; q = 0,4*. Поэтому *np - q = 3,2; np + p = 4,2*. Следовательно, k* = 4.

Вероятность 4-х попаданий равна $P_6(4) = C_6^4 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}31$.

Пусть A - событие, состоящее в том , что будет не менее двух попаданий при 6 выстрелах. Удобно перейти к противоположному ему событию $\overline{A}$ - менее двух попаданий (либо 0 – событие A_1, либо 1 - событие A_2).

Очевидно, $$\overline{A} = A_1 + A_2.$$

Так как события A_1 и A_2 несовместны, то $P(\overline{A}) = P(A_1) + P(A_2)$ или

$$P_6(<2) = P_6(0) + P_6(1) = 0{,}4^6 + C_6^1 \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^5 = 0{,}041.$$

Искомая вероятность $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}041 = 0{,}959$.

Число попаданий при шести выстрелах $X = k$ –дискретная случайная величина, возможные значения которой $k =$ 0,1,2,…6. Последовательно применяя формулу Бернулли $P(X = k) = C_6^k p^k q^{6-k}$, получим ряд распределения в виде

X=k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
P	*0,0041*	*0,0369*	*0,1382*	*0,2765*	*0,3110*	*0,1866*	*0,0467*

3.2. Закон распределения Пуассона

В предельном случае биномиального распределения, когда число испытаний *n* очень велико, а вероятность появления события в каждом отдельном испытании очень мала, вероятность появления события *k* раз в *n* независимых испытаниях может быть определена по приближенной формуле

$$P_n(k) \approx \frac{m^k e^{-m}}{k!},$$

где *m = np = const* - среднее число появлений события в различных сериях испытаний, предполагаемое постоянным.

Эта формула выражает закон распределения вероятностей дискретной случайной величины k - числа появлений события в n независимых испытаниях (в случае массовых, но редких событий), называемый законом распределения Пуассона.

Замечание. Практически формулой Пуассона с достаточной степенью точности можно пользоваться при $p < 0{,}1;\ m < 10$.

Пример. При массовом производстве шестерен вероятность изготовления годной шестерни равна 0,9975. Найти вероятность того, что из 800 наугад взятых шестерен более двух будут бракованными.

Решение. Пусть A - искомое событие, $\overline{A}$ - событие, состоящее в том, что не более двух шестерен окажутся бракованными (или 0 или 1, или 2). По условию вероятность изготовления бракованной шестерни равна p=1-0,9975 = 0,0025 << 0,1; n = 800 - велико, $m = np$ = 2 < 10.

Применяя формулу Пуассона и теорему сложения вероятностей для несовместных событий, найдем

$$P(\overline{A}) = P_{800}(0) + P_{800}(1) + P_{800}(2) \approx \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0{,}68\,.$$

Следовательно, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}32.$

Одним из основных понятий теории массового обслуживания и надежности является понятие простейшего (пуассоновского) потока событий.

Потоком событий называется последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени. Примерами могут служить вызовы на АТС, число отказов в определенный период времени, прибытие автомашин на стоянку и т. п.

Простейшим называется поток, обладающий свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности [1].

При этом *интенсивностью потока* λ *называется среднее число событий, которые появляются в единицу времени.* Если λ известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \qquad (k = 0,1,2,...,n).$$

<u>Пример.</u> Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за две мин. поступит: а) пять вызовов; б) менее пяти вызовов.

<u>Решение</u>. По условию $\lambda = 3,\quad t = 2,\quad k = 5$. Поэтому $\lambda t = 6$ и

$$P_2(5) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = \frac{6^5 e^{-6}}{5!} \approx 0{,}160.$$

$$P_2(<5) = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) + P_2(3) + P_2(4) = e^{-6} + \frac{6 \cdot e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 e^{-6}}{2!} +$$

$$+ \frac{6^3 e^{-6}}{3!} + \frac{6^4 e^{-6}}{4!} \approx 0{,}285.$$

3.3. Геометрическое распределение

Пусть производится ряд независимых испытаний (”попыток”) для достижения некоторого результата (события A), и при каждой попытке событие A может появиться с вероятностью p. Тогда число попыток X до появления события A, включая удавшуюся, - дискретная случайная величина, возможные значения которой 1,2… m… . Вероятности их по теореме умножения вероятностей для независимых событий равны

$$P(X = m) = pq^{m-1} \qquad (m = 1,2,...),$$

где $0 < p < 1, \quad q = 1 - p$.

Вероятности $P_m = P(X = m)$ образуют для ряда последовательных значений m бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q (поэтому распределение называется геометрическим).

Ряд распределения X имеет вид

X	1	2	3	….	m	…
P	p	pq	pq^2	….	pq^{m-1}	…

Математическое ожидание и дисперсия X равны

$$M(X)=\frac{1}{p},\qquad D(X)=\frac{q}{p^2}.$$

Пример. Производится ряд попыток включить двигатель. Каждая занимает время t и заканчивается успешно независимо от других с вероятностью p. Построить ряд распределения общего времени T, которое потребуется для включения двигателя, найти его математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Число попыток X - дискретная случайная величина с возможными значениями $1,2,...m,...$. Поэтому общее время $T=tX$ - тоже случайная величина, подчиненная геометрическому закону распределения, и ее ряд распределения будет иметь вид

T	t	$2t$	$3t$	$\ldots$	mt	$\ldots$
P	p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^{m-1}	$\ldots$

По свойствам математического ожидания и дисперсии

$$M(T)=M(tX)=t\cdot M(X)=t/p^2,\qquad D(T)=D(tX)=t^2D(X)=t^2q/p^2.$$

Пример. Имеется n лампочек; каждая из них с вероятностью $q=0{,}1$ имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон и включается ток; при этом дефектная лампочка сразу же перегорает и заменяется новой. Построить ряд распределения числа лампочек X, которое будет испробовано и найти вероятность того, что свет появится при третьем включении.

Решение. По условию $p=0{,}9;$ $q=0{,}1,$ $m=3$. Ряд распределения X:

X	1	2	3	$\ldots$	m	$\ldots$	n
P	p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^{m-1}	$\ldots$	pq^{n-1}

$$P(X=3)=pq^2=0{,}9\cdot 0{,}1^2=0{,}009.$$

3.4. Гипергеометрическое распределение

Пусть в урне N шаров, из них n белых, остальные черные. Случайно отбирают m шаров, причем отобранный шар перед отбором следующего не возвращается обратно (поэтому формула Бернулли неприменима).

Пусть $X = k$ - число белых шаров среди отобранных. Очевидно, это дискретная случайная величина. Ее возможные значения: $0,1,2,...,\min(n,m)$.

Как известно, вероятность того, что из m отобранных шаров ровно k белых равна

$$P(X=k)=\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

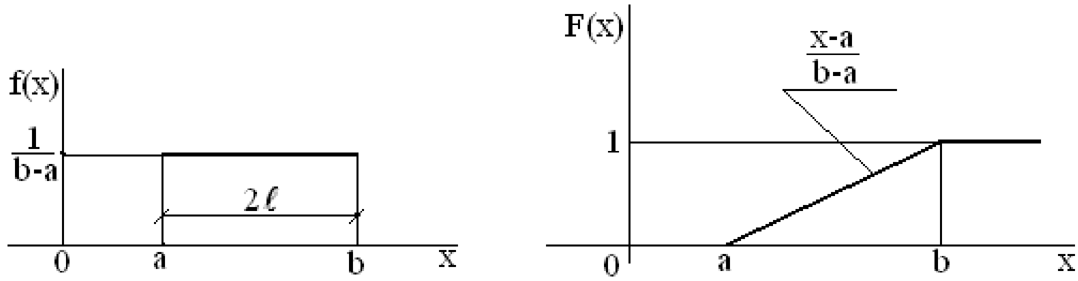
Эта формула определяет распределение случайной величины k, называемое **гипергеометрическим**. Оно характеризуется тремя параметрами: *N, m, n.* Пример построения гипергеометрического закона распределения приведен на стр. 40.

3.5. Закон равномерного распределения вероятностей

Непрерывная случайная величина X подчинена закону равномерного распределения вероятностей, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения X, плотность вероятностей постоянна и равна

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Графики плотности вероятностей равномерно распределенной случайной величины X и функции распределения *F(x)* показаны на рисунке.



Обычно вместо параметров a и b используют математическое ожидание X и половину ширины ℓ области возможных значений случайной величины.

Очевидно, $\ell=\dfrac{b-a}{2},\qquad M(X)=\int\limits_a^b \dfrac{1}{b-a}x\,dx=\dfrac{b+a}{2}.$

Дисперсия закона равномерного распределения $D(x)=\dfrac{l^2}{3}$.

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины на интервал (α,β), принадлежащий (a,b), равна

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

<u>Пример.</u> Поезда метрополитена идут с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в некоторый момент времени. Найти среднее значение времени ожидания поезда, его дисперсию и вероятность того, что пассажир будет ожидать очередной поезд не более 0,5 мин.

<u>Решение.</u> Пусть T - время ожидания поезда. Это непрерывная случайная величина, равномерно распределенная в интервале (0,2). Следовательно,

$$M(T)=\frac{b+a}{2}=1\text{ мин.},\quad D(T)=\frac{\ell^2}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\text{ мин.};$$

$$P(\alpha\le T\le\beta)=P(0\le T\le 0{,}5)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}=\frac{0{,}5}{2}=0{,}25.$$

<u>Пример.</u> Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,05.

<u>Решение.</u> Ошибку округления можно рассматривать как непрерывную случайную величину X, распределенную равномерно в интервале между двумя соседними делениями. В рассматриваемой задаче длина интервала $(b-a)$, в котором заключены возможные значения X, равна 0,2. Поэтому плотность равномерного распределения вероятностей $f(x)=1/0{,}2=5$, вне этого интервала $f(x)=0$.

Ошибка округления превышает 0,05, если она заключена в интервале $(0{,}05;0{,}15)$. Так как $P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$, то

$$P(0{,}05<X<0{,}15)=\int_{0{,}05}^{0{,}15}5dx=0{,}5.$$

3.6. Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Показательное распределение широко применяется в теории надежности, в теории массового обслуживания.

Непрерывная случайная величина подчинена показательному закону распределения, если ее плотность вероятностей равна

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ \lambda\, e^{-\lambda x} & при \quad x\geq 0.\end{cases}$$

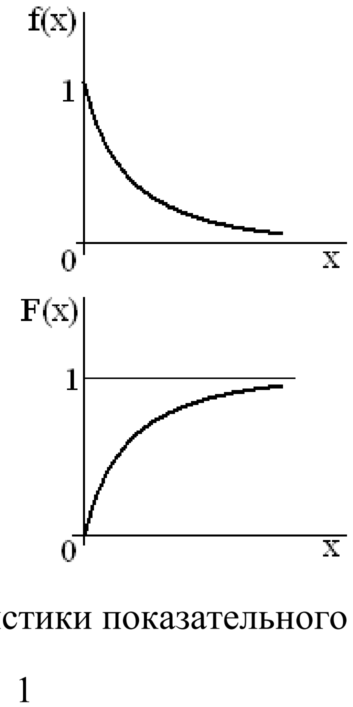
Интегральная функция распределения показательного закона:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & при \quad x\geq 0.\end{cases}$$

Вероятность попадания на конечный интервал (a, b) случайной величины, распределённой по показательному закону, равна

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Графики $f(x)$ и $F(x)$ показаны на рисунке.



Числовые характеристики показательного распределения

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \text{следовательно,}\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\lambda}.$$

Поэтому математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению. Это равенство является характерным признаком показательного распределения.

Пусть T- время безотказной работы элемента (непрерывная случайная величина), а t- время, по прошествии которого происходит отказ. Тогда функция распределения $F(t) = P(T < t)$ определяет вероятность отказа за время t. Поэтому вероятность противоположного события $T \geq t$, то есть вероятность безотказной работы за время t будет равна

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - P(T < t).$$

Эту функцию называют *функцией надежности*.

Показательному распределению с интегральной функцией $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ подчинена длительность безотказной работы системы на интервале времени t(λ- постоянная положительная величина, имеющая смысл интенсивности отказов).

Пример. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найти вероятность того, что за время t= 6 час. откажут оба элемента; оба элемента будут работать; откажет только один элемент.

Решение. Вероятность отказа первого элемента за 6 часов равна

$$q_1 = F_1(6) = 1 - e^{-0,02 \cdot 6} = 1 - e^{-0,12} = 0,113.$$

Вероятность отказа второго элемента за то же время

$$q_2 = F_2(6) = 1 - e^{-0,05 \cdot 6} = 1 - e^{-0,3} = 0,259.$$

Вероятность отказа двух элементов по теореме умножения вероятностей равна

$$q_1 q_2 = 0,113 \cdot 0,259 = 0,029.$$

Вероятности безотказной работы каждого элемента

$$p_1 = 1 - F_1(6) = 1 - 0,113 = 0,887; \quad p_2 = 1 - F_2(6) = 0,741.$$

Поэтому вероятность отказа только одного элемента будет равна

$$p_1 q_2 + p_2 q_1 = 0,887 \cdot 0,259 + 0,741 \cdot 0,113 = 0,310.$$

3.7. Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина подчинена нормальному закону распределения (закону распределения Гаусса), если ее плотность вероятностей равна

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

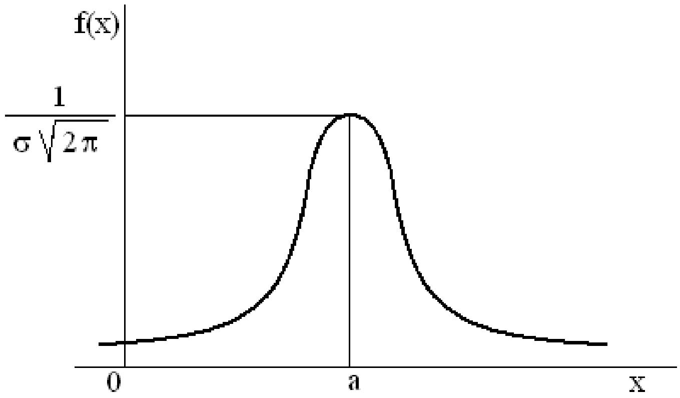
Здесь a и σ-параметры, вероятностный смысл которых таков:
$a = M(X)$ – математическое ожидание. $\sigma = \sqrt{D(X)}$ - среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины *X*.

Нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ называется нормированным. Плотность вероятностей нормированного нормального распределения равна

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Эта функция табулирована (см. Приложение 1).

График плотности вероятностей нормально распределенной случайной величины (называемый нормальной или гауссовой кривой) показан на рисунке.



Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на произвольный конечный интервал (α, β) равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2/2}dz$ - функция Лапласа (см. приложение 2).

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на интервал, симметричный относительно среднего значения, равна

$$P(|X-a|<\delta)=P(a-\delta<X<a+\delta)=2\cdot\Phi(\delta/\sigma).$$

В частности, при $\delta=3\sigma$ $P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973.$ Поэтому вероятность противоположного события: $P(|X-a|\geq 3\sigma)=0{,}0027.$ Такой малой вероятностью можно пренебречь. На этом и базируется важное для приложений **правило трех сигм:**

Если случайная величина распределена по нормальному закону, то с вероятностью, близкой к достоверности, можно считать, что практически все рассеивание укладывается на интервале $(a-3\sigma,\quad a+3\sigma)$ *от центра распределения, то есть можно пренебречь вероятностью попадания случайной величины вне интервала* $(a-3\sigma,\quad a+3\sigma)$.

Пример. На станке изготовляется партия однотипных деталей. Длина детали X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=18\,см,\ \sigma=0{,}2\,см.$ Найти:

вероятность того, что длина наудачу взятой детали заключена между 17,7 см и 18,4 см; какое отклонение длины детали от номинального размера можно гарантировать с вероятностью 0,95? В каких пределах будут заключены практически все длины деталей ?

Решение.

$$P(17{,}7<X<18{,}4)=\Phi\left(\frac{18{,}4-18}{0{,}2}\right)-\Phi\left(\frac{17{,}7-18}{0{,}2}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1{,}5)=$$
$$=\Phi(2)+\Phi(1{,}5)=0{,}4772+0{,}4332=0{,}9104.$$

Воспользуемся формулой $P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)$. По условию $P(|X-18|<\delta)=0{,}95$. Поэтому $2\cdot\Phi(\delta/0{,}2)=0{,}95$ или $\Phi(\delta/0{,}2)=0{,}475.$ По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $\delta/0{,}2=1{,}96$, откуда $\delta=0{,}392$.

Следовательно, $|X-18|<0{,}392$ или $17{,}608<X<18{,}392.$

По правилу трех сигм можно считать, что практически все длины деталей с вероятностью 0,9973 будут заключены в интервале $(a-3\sigma;\quad a+3\sigma)$, т.е. $P(|X-18|<3\cdot 0{,}2)=0{,}9973$, откуда $17{,}4<X<18{,}6$.

Пример. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектной длиной), равным 60 мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 58 мм и не более 62 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 61 мм; б) меньше 60,5 мм.

Решение. Предварительно найдем неизвестный параметр нормального распределения σ из условия $P(58<X<62)=1$ или

$$\Phi\left(\frac{62-60}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{58-60}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=1.$$

откуда $\Phi(2/\sigma)=0{,}5$ и по таблицам функции Лапласа находим $2/\sigma=5$. Следовательно, $\sigma=0{,}4$. Поэтому

$$P(61<X<62)=\Phi\left(\frac{62-60}{0{,}4}\right)-\Phi\left(\frac{61-60}{0{,}4}\right)=\Phi(5)-\Phi(2{,}5)=0{,}0062,$$

$$P(58<X<60{,}5)=\Phi\left(\frac{60{,}5-60}{0{,}4}\right)-\Phi\left(\frac{58-60}{0{,}4}\right)=\Phi(1{,}25)-\Phi(-5)=0{,}8944.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В коробке, содержащей 10 дискет, три заполнены некоторой информацией, остальные – “чистые”. Наудачу вынуты четыре дискеты. Составить закон распределения числа заполненных дискет среди отобранных.
2. Построить ряд распределения случайной величины X - суммы очков, выпадающих при бросании двух игральных костей; найти среднее значение этой суммы.
3. Построить ряд распределения случайной величины Y – произведения очков, выпадающих при бросании двух игральных костей; найти среднее значение этой суммы.

4. Имеются 5 различных ключей, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения числа опробованных ключей, если опробованный ключ в последующих попытках не используется.
5. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго p_2. Построить ряд распределения случайной величины $Z = X_1 - X_2$, где X_1- число попаданий первого стрелка, X_2 - число попаданий второго стрелка. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$.
6. В лотерее на 100 билетов разыгрываются 2 выигрыша на сумму 1000 и 100 рублей. Стоимость билета – 10 рублей. Составить закон распределения суммы чистого выигрыша S для лица, имеющего два билета.
7. Имеются семь биллиардных шаров, перенумерованных числами от 1 до 7. Эти шары располагаются случайным образом вдоль борта. Найти закон распределения и математическое ожидание числа шаров с четными номерами, предшествующих первому в последовательности шару с нечетным номером.
8. Написать закон распределения вероятностей числа переключений передач при трех заездах автомобиля, если вероятность переключения $p = 0{,}4$ (считать, что в одном заезде одно переключение). Найти среднее значение числа переключений.
9. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Найти число испытаний *n,* при котором наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях равно 30.
10. Два баскетболиста по очереди бросают мяч в корзину. Вероятность попадания при каждом броске для первого баскетболиста равна 0,8; для второго 0,7. Составить закон распределения общего числа попаданий.
11. В авторалли участвуют 25 машин. Вероятность того, что машина не дойдет до финиша равна 0,2. Найти вероятность того, что число машин, не дошедших до финиша, будет отличаться от своего математического ожидания не более чем на одно среднее квадратическое отклонение.
12. Случайные величины X и Y независимы. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 2X - 3Y$, если известно, что $D(X) = 3$, $D(Y) = 2$.

13. При сборке прибора для наиболее точной подгонки основной детали может потребоваться (в зависимости от удачи) 1, 2, 3, 4 или 5 проб соответственно с вероятностями 0,1, 0,2, 0,5, 0,15, 0,05. Требуется обеспечить сборщика необходимым количеством деталей для сборки 20 приборов. Сколько деталей надо отпустить сборщику ?
14. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}$$

(закон распределения Коши). Найти: коэффициент a, интегральную функцию распределения $F(x)$, $P(-1 < X < 1)$.

15. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & при \quad x \geq 0, \\ 0 & при \quad x < 0 \end{cases}$$

(закон распределения Релея – применяется в радиотехнике). Найти: $M(x)$, $D(x)$.

16. Непрерывная случайная величина задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^n},$$

где α - некоторая константа, n – целое положительное число (закон распределения Вейбулла – часто применяется в теории надежности технических систем, в статистической теории прочности). Найти: плотность $f(x)$, $M(x)$ и $D(x)$.

17. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей (гамма – распределение)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta} & при \quad x \geq 0, \\ 0 & при \quad x < 0, \end{cases} \qquad (\alpha > -1, \quad \beta > 0).$$

Найти: $M(x)$, $D(x)$.

18. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей $f(x) = ae^{-\lambda|x|}$, где λ - положительный параметр (закон распределения Лапласа). Найти: коэффициент a; интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(x)$, $D(x)$,

19. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти интегральную функцию распределения $F(x)$, математическое значение и дисперсию расстояния от точки до центра круга.
20. Найти среднее число лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 50 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,02.
21. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 4 мин поступит: а) три вызова; б) менее трех вызовов; в) не менее трех вызовов.
22. Среднее число автомобилей, подъезжающих к стоянке за один час, равно 4. Найти вероятность того, что за 2,5 часа к стоянке подъедут более 8 автомашин.
23. Через железнодорожный переезд в течение 10 мин в среднем проходит 2 поезда. Найти вероятность того, что за полчаса переезд будет закрываться: а) три раза; б) не более двух раз; в) не будет закрываться вообще.
24. Гидравлическая система автомобиля насчитывает 100 клапанов. Надежность каждого клапана 0,98. Какова вероятность того, что за время испытания откажут не менее двух клапанов, если считать отказ каждого из них независимым от состояния других.
25. По каналу связи передают 1000 знаков Каждый знак может быть искажен независимо от других с вероятностью 0,003. Найти вероятность того, что будет искажено не более трех знаков.
26. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,005. Найти наиболее вероятное число опоздавших пассажиров из 600 и его вероятность.
27. При движении по проселочной дороге автомобиль испытывает в среднем 60 толчков в течение одного часа. Какова вероятность того, что за 30 сек. не будет ни одного толчка ?
28. Автомашина проходит технический осмотр и обслуживание. Число неисправностей, обнаруженных во время осмотра, распределяется по закону Пуассона с параметром a. Если неисправностей не обнаружено,

техническое обслуживание машины продолжается в среднем 2 часа. Если обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится в среднем еще полчаса. Если обнаружено больше двух неисправностей, то машина ставится на профилактический ремонт, где она находится в среднем 4 часа. Составить закон распределения среднего времени обслуживания T и ремонта машины и его математическое ожидание $M(T)$.

29. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них либо запрещает дальнейшее движение автомашине с вероятностью 0,4, либо разрешает движение с вероятностью 0,6. Построить ряд распределения случайной величины X - пройденных автомашиной светофоров до первой остановки.
30. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованное изделие с вероятностью p. Переналадка линии производится сразу после первого же бракованного изделия. Найти среднее число всех изделий, изготовляемых между двумя переналадками линии.
31. Проводится испытание трех приборов, работающих независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы приборов распределена по показательному закону: для первого прибора $F_1(t) = 1 - 0{,}1e^{-0{,}1t}$, для второго - $F_2(t) = 1 - 0{,}2e^{-0{,}2t}$, для третьего $F_3(t) = 1 - 0{,}3e^{-0{,}3t}$. Найти вероятность того, что в течение пяти часов откажут: а) только один прибор; б) два прибора; в) все три прибора; г) хотя бы один прибор; д) не менее двух приборов.
32. На дороге находится контрольный пункт для проверки технического состояния автомашин. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины T – времени ожидания очередной машины контролером, если поток машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону $f(t) = 6e^{-6t}$.
33. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения – 10 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее трех минут и среднее время ожидания автобуса.

34. Ребро куба x измерено приближенно, причем $a \le x \le b$. Рассматривая длину ребра как случайную величину, распределенную равномерно в интервале (a, b), найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.
35. Колесу придается вращение, которое затухает вследствие трения. Фиксированный радиус R при этом, останавливаясь, образует с горизонтом случайный угол φ, который распределяется по равномерному закону в пределах от $0°$ до $360°$. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение расстояния конца радиуса от горизонтального диаметра.
36. На перекрестке стоит автоматический светофор, в котором 1 мин. горит зеленый свет, 0,5 мин. – красный, затем опять 1 мин. – зеленый, 0,5 мин. – красный и т.д. Некто подъезжает к перекрестку на машине в случайный момент времени, не связанный с работой светофора. Найти:
   а) вероятность того, что он проедет перекресток, не останавливаясь;
   б) закон распределения и математическое ожидание времени ожидания у перекрестка.
37. Автомат изготовляет подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по абсолютной величине не превосходит 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если X распределена нормально с $\sigma = 0{,}4$ мм ?
38. Случайная величина X подчинена нормированному нормальному распределению ($a = 0$, $\sigma = 1$). Что больше: $P(-0{,}6 \le X \le -0{,}1)$ или $P(1 \le X \le 2)$?
39. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических (одного знака) погрешностей. Случайные погрешности взвешивания подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с погрешностью, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.
40. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a = 50$ мм и $\sigma = 1$ мм. Найти вероятность того, что X

попадет на интервал (49,5; 50,2) не менее трех раз при четырех независимых испытаниях ?

41. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что из четырех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 3 мм.
42. Диаметр отверстия X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a = 50$ мм, $\sigma = 1$ мм. Диаметр вала равен 49,5 мм. Найти вероятность того, что вал войдет в отверстие.
43. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое – либо из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика D есть нормальная случайная величина с $M(D) = \dfrac{d_1 + d_2}{2}$, $\sigma(D) = \dfrac{d_2 - d_1}{4}$. Найти вероятность того, что шарик будет забракован. Какова вероятность того, что из восьми шариков менее двух будут забракованы ?
44. При 10000 бросаний монеты герб выпал 5500 раз. Следует ли считать, что монета несимметрична ?

Ответы

1.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

2.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3.

X	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$

4.

X	1	2	3	4	5
P	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

5. $M(Z) = p_1 - p_2$; $D(Z) = p_1q_1 + p_2q_2$.

Z	-1	0	1
P	q_1p_1	$q_1q_2 + p_1p_2$	p_1q_2

6.

X	0	1		2
P	0,9602	0,0396		0,0002
S	0	94	994	1080

7. $M(X) = 0{,}6.$

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

8. $M(X)$=1,2; $D(X)$=0,72

X	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

9. $99 \le n \le 102.$

10.

X	0	1	2	3
P	0,012	0,124	0,416	0,448

11. $P \approx 0{,}546.$ **12.** $\sqrt{30}.$ **13.** 57.

14. $a = \frac{1}{\pi}$; $F(x) = \frac{1}{\pi} arctg x + \frac{1}{2}$; $P(-1 < x < 1) = \frac{1}{2}.$ **15.** $M(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$;

$D(X) = \frac{4-\pi}{2}.$ **16.** $f(x) = n\alpha x^{n-1} e^{-\alpha x^n}$; $M(X) = \alpha^{-1/n} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

$D(X) = \alpha^{-2/n}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$, где $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ - гамма-функция. **17.** $M(X) = (1+\alpha)\beta$; $D(X) = (1+\alpha)\beta^2$. *Указание*: Сделать подстановку $y = x/\beta$ и использовать гамма – функцию.

18. $a = \frac{\lambda}{2}$; $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & при \quad x \le 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & при \quad x > 0; \end{cases}$ $M(X) = 0$; $D(X) = \frac{2}{\lambda^2}.$

19. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ x^2/R^2 & при \quad 0<x<R,\\ 1 & при \quad x>R,\end{cases}$ $M(X)=\dfrac{2R}{3}$; $D(X)=\dfrac{R^2}{18}$. Здесь

случайная величина $0\le X\le R$ - расстояние от произвольной точки до центра круга. **17.** 1. **18.** а) 0,0256; б) 0,0123; в) 0,9877.

22. $P_{2,5}(>8)\approx 0{,}667$. **23.** а) 0,0890; б) 0,0620; в) 0,0025. **24.** 0,366.

25. 0,647. **26.** 0,224. **27.** $P_{30}(0)\approx 0{,}61$.

28. $M(T)=6-e^{-a}\left(4+3{,}5a+1{,}5a^2\right)$.

t_i	2	2,5	3	6
P	e^{-a}	ae^{-a}	$\dfrac{a^2}{2}e^{-a}$	$1-e^{-a}\left(1+a+\dfrac{a^2}{2}\right)$

29.

X	0	1	2	3	4
P	0,4	0,24	0,144	0,0864	0,1296

30. $M(k)=p\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(1-p)^k=\dfrac{1-p}{p}$, где случайная величина k – число годных изделий, изготовляемых линией до появления брака. *Указание*: Для вычисления суммы можно воспользоваться известным равенством :

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ *для* $|x|<1$, получающимся путем дифференцирования суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k=\dfrac{1}{1-x}$.

31. а) $P\approx 0{,}291$; б) $P\approx 0{,}466$; в) $P\approx 0{,}190$; г) $P\approx 0{,}950$; д) $P\approx 0{,}656$.

32. $M(t)=\sigma(t)=\dfrac{1}{6}$ часа. *Указание*: время ожидания машины контролером и время прохождения машин через контрольный пункт распределены одинаково. **33.** $P=0{,}3$; $M(T)=5$. **34.** $M=\dfrac{(b+a)\left(b^2+a^2\right)}{4}$;

$D(X^3) = \dfrac{b^7 - a^7}{7(b-a)} - \left[\dfrac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^4$. **35.** $M = \dfrac{2R}{\pi}$; $\sigma = R\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}}$.

36. $P = \dfrac{2}{3}$. *Указание*: момент проезда машины через перекресток распределен равномерно в интервале, равном периоду смены цветов в светофоре, то есть 1,5 мин. Время ожидания $T_{ож}$ - смешанная случайная величина: с вероятностью 2/3 она равна 0, а с вероятностью 1/3 она может принимать с одинаковой плотностью вероятности любое значение между 0 и 0,5 мин.

Поэтому $M(T_{ож}) = 0 \cdot \dfrac{2}{3} + 0{,}25 \cdot \dfrac{1}{3} \approx 0{,}083$. **37.** $n = 95$.

38. $P(-0{,}6 \le X \le -0{,}1) = 0{,}1859$; $P(1 \le X \le 2) = 0{,}1359$. **39.** 0,383.

40. 0,0633. **41.** 0,398. **42.** 0,6915. **43.** $P = 1 - P(d_1 < d < d_2) = 0{,}0456$; $P_8(<2) \approx 0{,}9515$. **44.** Почти наверняка. *Указание:* применить правило “трех сигм”.

4. ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

На практике часто возникает необходимость решения задач, в которых результат опыта описывается не одной, а одновременно двумя случайными величинами, образующими систему двух случайных величин.

Простейшим и естественным примером является стрельба по площадям: точка падения снаряда определяется двумя координатами на плоскости.

Случайные величины, возможные значения которых определяются двумя числами, называются двумерными и обозначаются через (X,Y). Говорят также, что они образуют систему двух случайных величин. Каждая из величин X,Y называется составляющей (компонентой) двумерной случайной величины.

4.1. Закон распределения двумерной случайной величины

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) называется соотношение между возможными значениями этой величины те есть парами чисел (x_i, y_j) и соответствующими им вероятностями $p(x_i, y_j) = p_{ij}$ (i=1,2,…,n; j=1,2,…,m). Он задается таблично (см. таблицу 2) или аналитически.

Таблица 2

Y	X					
	x_1	x_2		x_i		x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_i, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	…	$p(x_i, y_2)$	…	$p(x_n, y_2)$
…	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$		$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_n, y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_i, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

Так как события $(X = x_i, Y = y_j)$ (i=1,2,…,n; j=1,2,…,m) образуют полную группу, то сумма вероятностей, помещенных во всех клетках таблицы $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1.$

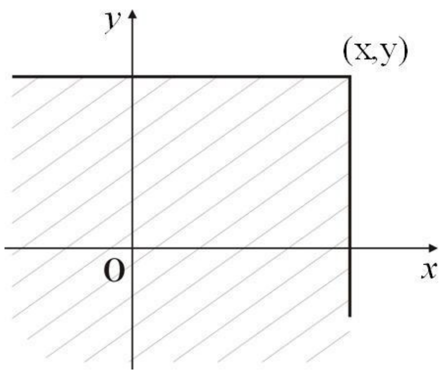
Зная закон распределения двумерной случайной величины, можно найти законы распределения каждой из составляющих.

Действительно, $P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)$, то есть вероятность того, что X примет значение x_i, равна сумме вероятностей столбца x_i. Аналогично $P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j)$.

Интегральной функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины (X,Y) называется функция $F(x, y)$, определяющая для каждой пары чисел (x, y) вероятность совместного выполнения двух неравенств $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Геометрически это означает, что $F(x, y)$ равна вероятности попадания случайной точки (X,Y) в полубесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины (см. рис.).



Свойства $F(x, y)$

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.
2. $F(x, y)$ - неубывающая функция обоих своих аргументов, то есть

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y) \quad при \quad x_2 > x_1,$$
$$F(x, y_2) \ge F(x, y_1) \quad при \quad y_2 > y_1.$$

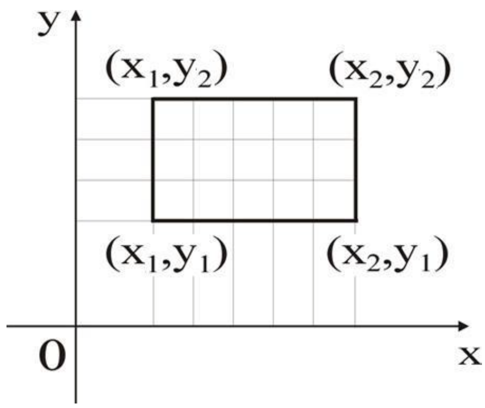
3. Предельные соотношения:

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0, \quad F(\infty, \infty) = 1.$$

4. $F(x,\infty)=F_1(x)$, то есть при значении аргумента $y=\infty$ функция распределения системы становится функцией распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу. Аналогично

$$F(\infty,y)=F_2(y).$$

Зная функцию распределения двумерной случайной величины, можно найти вероятность попадания в прямоугольную область



$$P\left(x_1 \le X \le x_2,\, y_1 \le Y \le y_2\right)=\left[F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)\right]-\left[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\right].$$

Функция $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, равная второй смешанной частной производной от интегральной функции распределения системы двух случайных величин, называется **двумерной плотностью вероятностей (или плотностью распределения системы)**.

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-[F(x,y+\Delta y)-F(x,y)]}{\Delta x\Delta y},$$

то есть плотность распределения системы равна пределу отношения вероятности попадания в малый прямоугольник к площади этого прямоугольника, когда длины обеих сторон стремятся к нулю.

График $f(x,y)$ называют поверхностью распределения.

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D равна

$$P\big((X,Y)\subset D\big)=\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy.$$

Зная двумерную плотность вероятностей, можно найти интегральную функцию распределения системы по формуле

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy.$$

Свойства $f(x,y)$

1. $f(x,y)\geq 0$, то есть $f(x,y)$ - функция неотрицательная.

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$, то есть объем тела, ограниченного поверхностью распределения и плоскостью xOy, равен единице.

3. Если возможные значения $(X,Y)\subset D$, то $\iint_{D}f(x,y)dxdy=1$.

Зная закон распределения системы, можно найти закон распределения каждой из составляющих системы по формулам

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy,\qquad f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx.$$

Для решения обратной задачи – отыскания закона распределения системы по известным законам распределения составляющих X и Y необходимо знать зависимость между этими величинами. Эта зависимость в общем случае характеризуется с помощью так называемых условных законов распределения.

4.2. Условные законы распределения составляющих

Условным законом распределения составляющей X называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина Y приняла определенное значение $Y=y_j$.

Условный закон распределения задается или функцией распределения или плотностью. Условная функция распределения обозначается $F(x|y)$, условная плотность распределения $f(x|y)$.

Для дискретной двумерной случайной величины условные вероятности составляющих X и Y вычисляют по формулам

$$p\left(x_j|y_i\right)=\frac{p(x_i,y_j)}{p(y_j)},\qquad p\left(y_j|x_i\right)=\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)}.$$

Для непрерывной двумерной случайной величины условные плотности распределения составляющих X и Y определяются по формулам

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}, \qquad f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}.$$

Пример. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины задано таблицей

Y	X			
	10	15	20	25
5	0,08	0,12	0,13	0,05
7	0,07	0,10	0,08	0,03
9	0,06	0,14	0,10	0,04

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих; б) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1=5$; в) условный закон распределения составляющей Y при условии, что составляющая $X=x_2=15$.

Решение. а) Складывая вероятности по “столбцам”, получим
$P(X=10)=P(X=10,Y=5)+P(X=10,Y=7)+P(X=10,Y=9)=0{,}08+0{,}07+$
$+0{,}06=0{,}21,$
аналогично $P(X=15)=0{,}36,\quad P(X=20)=0{,}31,\quad P(X=25)=0{,}12.$

Следовательно, закон распределения составляющей X имеет вид

X	10	15	20	25
P	0,21	0,36	0,31	0,12

Складывая вероятности по “строкам”, найдем

$$P(Y=5)=0{,}38,\quad P(Y=7)=0{,}28,\quad P(Y=9)=0{,}34.$$

Поэтому закон распределения составляющей Y будет

Y	5	7	9
P	0,38	0,28	0,34

б) Условные вероятности возможных значений X при условии, что $Y = y_1 = 5$ равны

$$P(x_1|y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}08}{0{,}38} = \frac{4}{19}, \qquad P(x_2|y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}12}{0{,}38} = \frac{6}{19},$$

$$P(x_3|y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}13}{0{,}38} = \frac{13}{38}, \qquad P(x_4|y_1) = \frac{p(x_4, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}05}{0{,}38} = \frac{5}{38}.$$

Искомый условный закон распределения составляющей X

X	10	15	20	25
$P(x_1\|y_1)$	$\frac{4}{19}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{13}{38}$	$\frac{5}{38}$

Аналогично находим условный закон распределения составляющей Y при $X = x_2 = 15$:

$$P(y_1|x_2) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(x_2)} = \frac{0{,}12}{0{,}36} = \frac{1}{3}, \qquad P(y_2|x_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(x_2)} = \frac{0{,}10}{0{,}36} = \frac{5}{18},$$

$$P(y_3|x_2) = \frac{p(x_2, y_3)}{p(x_2)} = \frac{0{,}14}{0{,}36} = \frac{7}{18}.$$

Следовательно,

Y	5	7	9
$P(y\|x_2)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$

<u>Пример.</u> Распределение непрерывной случайной величины (X,Y) задано двумерной плотностью вероятностей

$f(x, y) = \dfrac{a}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}$. Найти: а) коэффициент a; б) плотности вероятностей составляющих $f_1(x)$, $f_2(x)$ и установить, являются ли величины X и Y независимыми; в) интегральную функцию распределения системы $F(x, y)$; г) вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрат D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

<u>Решение.</u> а) Так как

$$f(x,y)=\frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}=\frac{a}{1+x^2+y^2\left(1+x^2\right)}=\frac{a}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)},$$

то из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$ находим a:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}dxdy=a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}dy=a\cdot arctg\,x\Big|_{-\infty}^{\infty}arctg\,y\Big|_{-\infty}^{\infty}=a\pi^2=1,$$

следовательно, $a=\dfrac{1}{\pi^2}$.

б) Так как $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\dfrac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}=f_1(x)f_2(y)$, где $f_1(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$,

$f_2(y)=\dfrac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}$, то величины X и Y независимы.

в)

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dx}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}arctg\,x\Big|_{-\infty}^{x}arctg\,y\Big|_{-\infty}^{y}=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctgy+\frac{1}{2}\right).$$

г)

$$P\big((X,Y)\subset D\big)=\iint\limits_{(D)}f(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{dxdy}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=\frac{1}{\pi^2}arctg\,x\Big|_0^1arctg\,y\Big|_0^1=\frac{1}{16}.$$

4.3. Зависимые и независимые случайные величины

Случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина.

Для независимых случайных величин условные плотности распре-
деления равны их безусловным плотностям, то есть $f(x|y)=f_1(x)$, $f(y|x)=f_2(y)$. Поэтому необходимое и достаточное условие независимости случайных величин X и Y состоит в том, что для них интегральная

функция распределения двумерной случайной величины (X,Y) равна произведению функций распределения составляющих

$$F(x,y)=F_1(x)F_2(y).$$

В частности, для непрерывных двумерных случайных величин

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y).$$

Пример. Имеются две независимые непрерывные случайные величины X и Y, подчиненные каждая показательному закону

$$f_1(x)=\begin{cases}0 & \textit{при} \quad x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \textit{при} \quad x>0,\end{cases} \qquad f_2(y)=\begin{cases}0 & \textit{при} \quad y<0,\\ \mu e^{-\mu y} & \textit{при} \quad y>0.\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения системы; б) интегральную функцию распределения системы.

Решение.

а) $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)=\begin{cases}0 & \textit{при} \quad x<0 \quad \textit{или} \quad y<0,\\ \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)} & \textit{при} \quad x>0 \quad \textit{и} \quad y>0.\end{cases}$

б) $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{0} 0dxdy+\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y}\lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}dxdy=$
$=\left(e^{-\lambda x}-1\right)\left(e^{-\mu y}-1\right).$

Итак, $F(x,y)=\begin{cases}0 & \textit{при} \quad x\le 0 \quad \textit{или} \quad y\le 0,\\ \left(1-e^{-\lambda x}\right)\left(1-e^{-\mu y}\right) & \textit{при} \quad x>0 \quad \textit{и} \quad y>0.\end{cases}$

Количественными числовыми характеристиками системы двух случайных величин являются так называемые начальные и центральные моменты различных порядков, прежде всего, математическое ожидание, дисперсия и корреляционный момент.

Начальным моментом порядка *k,s* системы (X,Y) называется математическое ожидание произведения X^k на Y^s:

$$\alpha_{k,s}=M(X^kY^s),$$

в частности, $\alpha_{1,0} = M(X)$, $\alpha_{0,1} = M(Y)$ - математические ожидания составляющих системы.

Центральным моментом порядка *k,s* системы (X,Y) называется математическое ожидания произведения центрированных величин:

$$\mu_{k,s} = M\left\{ [X - M(X)]^k [Y - M(Y)]^s \right\},$$

в частности, $\mu_{2,0} = D(X)$, $\mu_{0,2} = D(Y)$ - дисперсии составляющих X и Y, характеризующие рассеивание случайной точки в направлении осей Ox и Oy.

Формулы для непосредственного подсчета моментов являются обобщением соответствующих формул для одномерных случайных величин.

Для дискретных двумерных случайных величин

$$\alpha_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}, \qquad \mu_{k,s} = \sum_i \sum_j [x_i - M(X)]^k [y_j - M(Y)]^s p_{ij},$$

Для непрерывных двумерных случайных величин

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y) dxdy,$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^k [y - M(Y)]^s f(x,y) dxdy.$$

Особую роль как характеристика системы играет второй смешанный центральный момент $\mu_{1,1} = K_{xy}$, называемый **корреляционным моментом** (или моментом связи):

$$K_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}.$$

Для дискретных двумерных случайных величин

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j [x_i - M(X)][y_j - M(Y)] p_{ij},$$

Для непрерывных двумерных случайных величин

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)] f(x,y) dxdy.$$

Корреляционный момент помимо рассеивания случайных величин X и Y характеризует зависимость между ними.

Для независимых случайных величин X и Y $K_{xy}=0.$ Случайные величины, для которых $K_{xy}=0$, называются **некоррелированными**.

Если $K_{xy}\neq 0,$ то это есть признак наличия зависимости между ними.

На практике для характеристики связи между случайными величинами удобно использовать безразмерную величину

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y},$$

называемую **коэффициентом корреляции**. Можно показать, что $\left|k_{xy}\right|\leq 1.$

Коэффициент корреляции служит для характеристики степени тесноты линейной зависимости между случайными величинами. В предельном случае когда величины X и Y связаны между собой линейной функциональной зависимостью $Y=kX+b,$ то $r_{xy}=\pm 1.$

Пример. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью распределения $f(x,y)=\cos x\cos y$ в квадрате $0\leq x\leq\frac{\pi}{2},$ $0\leq y\leq\frac{\pi}{2},$ вне его $f(x,y)=0.$ Найти математические ожидания и дисперсии составляющих. Доказать, что величины X и Y некоррелированны.

Решение.

$$M(X)=\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cos y dxdy=\frac{\pi}{2}-1,$$

$$D(X)=\iint\limits_{(D)}\left[x-M(X)\right]^2 f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D)} x^2 f(x,y)dxdy-M^2(X)=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} x^2\cos x\cos y dxdy-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2=\pi-3.$$

Из условия симметрии функции $f(x,y)$ следует, что $M(Y)=\frac{\pi}{2}-1,$ $D(Y)=\pi-3.$

$$K(x,y)=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}[x-M(X)][y-M(Y)]f(x,y)dxdy=\int_0^{\pi/2}\left[x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]\cos x dx\cdot$$
$$\cdot\int_0^{\pi/2}\left[y-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]\cos y dy=0.$$

Следовательно, величины X и Y некоррелированны.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предельные теоремы делятся на две группы. Теоремы первой группы, объединенные общим названием “**закон больших чисел**”, устанавливают условия, при которых среднее арифметическое случайных величин приближается к некоторым неслучайным (детерминированным) величинам.

Теоремы второй группы, объединенные общим названием **“центральная предельная теорема”**, устанавливают условия, при которых закон распределения суммы случайных величин приближается к нормальному закону.

5.1. Закон больших чисел

Как показывает опыт, при некоторых сравнительно широких условиях сумма достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает характер случайной величины и может быть предсказана с большой степенью определенности. Это, так называемое, *свойство устойчивости массовых случайных явлений* объясняется тем, что случайные отклонения от среднего, неизбежные в каждом отдельном опыте, в массе опытов взаимно погашаются. Именно эта устойчивость средних значений и составляет физическое содержание закона больших чисел.

Основными теоремами закона больших чисел являются теоремы Чебышёва и Бернулли. Их доказательство базируется на весьма общей лемме, известной под названием неравенства Чебышёва.

Неравенство Чебышёва

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$ по абсолютной величине меньше малого положительного числа ε, больше или равна $1-D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\ .$$

Неравенство Чебышёва дает верхнюю оценку для вероятности отклонения значений случайной величины от своего математического ожидания.

Пусть имеется последовательность независимых случайных величин

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ \dots X_n, \dots \equiv \{X_n\}.$$

Говорят, что последовательность $\{X_n\}$ сходится по вероятности к величине a (случайной или неслучайной), если при любом $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\, P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1.$$

Теорема Чебышёва

Если $\{X_n\}$ - последовательность попарно независимых случайных величин, дисперсии которых равномерно ограничены одним и тем же постоянным числом С : $D(X_1) \le C,\ D(X_2) \le C, \dots D(X_n) \le C, \dots$, то каково бы ни было малое положительное число ε, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

то есть при $n \to \infty$ среднее арифметическое случайных величин $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ сходится по вероятности к их общему математическому ожиданию.

Хотя случайные отклонения отдельных величин X_k от своих математических ожиданий могут быть существенны и разного знака (как больше, так и меньше нуля), но в среднем арифметическом (это тоже случайная величина), они взаимно погашаются. Поэтому при достаточно большом n среднее арифметическое значение случайных величин $\overline{X}$ практически уже не случайно и с вероятностью, близкой к достоверности, может приниматься в качестве приближенной оценки математического ожидания $M(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)$. Этим и объясняется рекомендуемый в практической деятельности способ многократного измерения изучаемой случайной вели-чины с тем, чтобы получить ее значение, близкое к истинному.

Теорема Бернулли

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события постоянна, то с вероятностью, близкой к достоверности, можно утверждать, что при неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота W появления события сходится по вероятности к его вероятности p:

$$\lim_{n\to\infty} P(|W - p| < \varepsilon = 1.$$

Следовательно, теоремой Бернулли доказывается свойство устойчивости относительной частоты, которое раньше (см. пример с многократным подбрасыванием монеты) рассматривалось как эмпирический факт.

<u>Пример.</u> Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a,\ \sigma$. Оценить по неравенству Чебышёва $P(|X - a| > 2\sigma)$. Сравнить с точным значением этой вероятности.

<u>Решение.</u> Из неравенства Чебышёва следует, что

$$P(|X - a| > \varepsilon) \geq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

В рассматриваемом случае $\varepsilon = 2\sigma,\quad D(X) = \sigma^2$, следовательно,

$$P(|X - a| > \varepsilon) \geq \sigma^2 / 4\sigma^2 = 0{,}25\,.$$

По точной формуле $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta / \sigma)$ имеем

$$P(|X - a| > \delta) = 1 - 2\Phi(\delta / \sigma) = 1 - 2\Phi(2\sigma / \sigma) = 1 - 2\Phi(2) = 0{,}045.$$

<u>Пример.</u> Событие A происходит в каждом опыте с вероятностью 0,2. Оценить (с помощью неравенства Чебышёва) вероятность того, что число появлений события A в 1000 независимых опытов будет заключено в пределах от 200 до 300.

<u>Решение.</u> Число появлений события A в 1000 независимых испытаний – случайная величина X с математическим ожиданием

$$M(x) = np = 1000 \cdot \frac{1}{5} = 200 \quad \text{и дисперсией} \quad D(x) = npq = 1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 160\,.$$

Наибольшая разность между заданным числом появлений события *A* и его средним значением *M(X)* равна $\varepsilon = 300 - 200 = 100$.

Применяя неравенство Чебышёва, получим

$$P(|X - 200| < 100) \geq 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}, \qquad P(|X - 200| < 100) \geq 1 - \frac{160}{100^2} = 0{,}984\,.$$

<u>Пример.</u> Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия 0,1. Пользуясь неравенством Чебышёва, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5 см (в поле допуска).

<u>Решение.</u> По условию $\varepsilon = 0{,}5$.

$$P(|X - 50| < 0{,}5) \geq 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}1}{0{,}5^2} = 0{,}6\,.$$

<u>Пример.</u> Оценить вероятность того, что $|X - M(X)| > 0{,}8$, если X – дискретная случайная величина, имеющая ряд распределения

X	1	2	3
P	0,5	0,3	0,2

<u>Решение.</u> Находим *M(X)* и *D(X)*:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}7\,,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = (1 \cdot 0{,}5 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}2) - 1{,}7^2 = 0{,}61\,.$$

Поэтому $$P(|X - M(X)| > 0{,}8) \geq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = \frac{0{,}61}{0{,}8^2} = 0{,}95\,.$$

5.2. Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова)

В отличие от закона больших чисел, объектом рассмотрения которого являются случайные величины, центральная предельная теорема рассматривает их законы распределения и устанавливает условия, при которых возникает нормальный закон распределения:

Если случайная величина X представляет собой сумму большого числа взаимно независимых случайных величин, распределенных по различным законам, причем влияние каждой из них на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

В частности, если $X_1, X_2, \dots X_n$ - независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения (не важно какой) с математическим ожиданием *M(X)* и *D(X),* то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ неограниченно приближается к нормальному с параметрами $a = nM(X)$, $\sigma = \sqrt{nD(X)}$.

Условия справедливости центральной предельной теоремы выполняются очень часто, например, в теории ошибок измерений, теории стрельбы и т.д., что и объясняет особую роль нормального закона.

В практических задачах центральная предельная теорема часто применяется для вычисления вероятности того, что сумма нескольких случайных величин окажется в заданных пределах.

Если $\{X_k\}$ -последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями $M_1, M_2, \dots M_n$ и дисперсиями $D_1, D_2, \dots D_n$, причем n достаточно велико, а величины $X_1, X_2, \dots X_n$ сравнимы по порядку своего влияния на сумму, то вероятность попадания случайной величины $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ на интервал (α, β) равна

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_y}{\sigma_y}\right),$$

где $m_y = \sum_{i=1}^{n} M(X_i)$, $\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}$, *Φ(x)* – функция Лапласа.

Часть вторая

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ВВЕДЕНИЕ

Математические законы теории вероятностей отражают реальные закономерности, существующие в массовых случайных явлениях природы. Теория вероятностей позволяет определить теоретическим путем вероятностные характеристики одних явлений по известным характеристикам других, найденным в результате опыта, и тем самым прямо или косвенно опирается на экспериментальные данные.

Предметом математической статистики как науки и является разработка методов регистрации и анализа статистических экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений.

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей, на предельных теоремах которой базируется большинство ее выводов.

Математическую статистику нередко определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности. Объясняется это тем, что, например, для определения закона распределения случайной величины необходимо располагать большим количеством опытных данных. Но на практике из-за сложности постановки и проведения экспериментов, их дороговизны, ограниченности сроков исследования объем необходимой информации может быть весьма ограниченным. Методы математической статистики позволяют, тем не менее, с оцениваемой точностью получить необходимые сведения об изучаемых величинах по имеющейся неполной ограниченной информации.

В зависимости от характера решаемых практических задач и объема имеющихся экспериментальных данных различают следующие основные задачи математической статистики:

1. *Оценка неизвестного закона распределения случайной величины.*

Она ставится так: известно, какие значения принимает случайная величина в результате опытов. Требуется оценить неизвестную функцию распределения.

2. *Оценка неизвестных параметров распределения.*

Нередко из-за крайне ограниченного объема опытных данных задача оценки неизвестного закона распределения исследуемой случайной величины вообще не ставится. С другой стороны, характер закона распределения качественно может быть известен еще до опытов. Например, если удовлетворяются условия теоремы Ляпунова, можно утверждать, что случайная величина подчинена нормальному закону, параметры которого – математическое ожидание и дисперсия – неизвестны.

Поэтому вторая задача ставится так: известна функция распределения случайной величины с точностью до k неизвестных параметров, от которых она зависит. Требуется по данным наблюдений случайной величины найти эти параметры.

3. Проверка правдоподобия статистических гипотез.

На основании некоторых соображений можно предположить, что случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$. Требуется выяснить, совместима ли принятая гипотеза о распределении X с наблюдаемыми в опытах значениями случайной величины, то есть действительно ли $F(x)$ будет функцией распределения случайной величины.

Содержание математической статистики далеко не исчерпывается вышеперечисленными основными задачами. Ввиду большой важности для практических приложений в математической статистике развиваются и такие разделы, как *корреляционный анализ и регрессионный анализ* (изучающие зависимость между случайными величинами), *дисперсионный анализ* (выявляющий влияние значимости отдельных качественных факторов на результат эксперимента), *дискриминантный анализ* (решающий задачу различения, то есть позволяющий определить, основываясь на результатах наблюдений, какой из нескольких возможных совокупностей принадлежит объект, случайно извлеченный из одной из них), *последовательный анализ* (разрабатывающий способы определения числа необходимых испытаний в ходе исследования), *теория планирования многофакторных экспериментов, статистический анализ случайных процессов* и др.

В настоящем пособии рассмотрены основные понятия математической статистики, наиболее часто используемые и определяемые в процессе статистической обработки опытных данных. Даны 30 вариантов домашнего задания для самостоятельной работы студентов.

6. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

6.1. Понятие о выборочном методе Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется найти распределение некоторого качественного или количественного признака, характеризующего совокупность однородных объектов. Исследуемый признак - это случайная величина, значение которой от объекта к объекту меняется. Чтобы составить представление о распределении признака или о параметрах этого распределения, проводят либо сплошное изучение объектов совокупности, либо, чаще, случайным образом отбирают для изучения из всей совокупности только ограниченное число объектов.

Например, при контроле качества некоторой партии автомобилей (или отдельных их агрегатов: двигателя, кузова и т.п.) контроль каждого автомобиля в отдельности, очевидно, даст наилучший эффект. Но, с другой стороны, такой контроль будет весьма длительным и дорогостоящим, если размер партии велик. Кроме того, суждение о качестве может быть связано с физическим уничтожением объекта, например, при испытаниях автомобиля на прочность или на пассивную безопасность (испытаниях на фронтальное столкновение с жесткой преградой, на удар сзади, боковой удар, на опрокидывание) или при определении ресурса работы двигателя, износостойкости отдельных узлов и т. п., так что до потребителя объект уже не дойдет. Поэтому о качестве партии автомобилей судят по результатам испытаний относительно малой совокупности автомобилей, определенным случайным образом отобранных из всей партии.

Выборочной совокупностью (или просто выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность однородных объектов, из которой по определенному правилу производится выборка.

При этом, чтобы по данным выборки можно было надежно судить о характеристиках всей партии изделий, необходимо, чтобы выборка была образована случайно и была **репрезентативной (представительной)**, то есть правильно отражала пропорции генеральной совокупности. Согласно закону больших чисел, по мере увеличения объема выборки ее характеристики будут сходиться по вероятности к соответствующим характеристикам генеральной совокупности.

6.2. Характеристики генеральной совокупности

Пусть распределение признака объектов задано таблицей 3.

Таблица 3

Значения признака X	Частоты
x_1	n_1
$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_i
$\vdots$	$\vdots$
x_m	n_m
Всего	N

Частотой n_i называется число наблюдений каждого отдельного значения признака x_i.

Средняя арифметическая $\bar{x}_0$ значений признака в генеральной совокупности называется **генеральной средней.** Если все значения признака x_i различны, то

$$\bar{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}.$$

Если среди значений признака x_i есть повторяющиеся с частотами n_i (см. таблицу 3), то генеральная средняя определяется как средняя взвешенная значений признака по формуле

$$\bar{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{N},$$

Дисперсия σ_0^2 распределения признака в генеральной совокупности называется **генеральной дисперсией** и равна:

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x}_0)^2 n_i}{N}.$$

6.3. Классификация выборок

В зависимости от способа отбора объектов различают: собственно случайную повторную выборку, собственно случайную бесповторную выборку, типическую, механическую и серийную выборки.

Собственно случайная повторная выборка образуется следующим образом: из генеральной совокупности случайно выбирается один элемент; после изучения он возвращается в генеральную совокупность и результаты фиксируются; затем снова случайным образом извлекается один элемент и после изучения возвращается обратно. Так производится n извлечений. В результате образуется выборка объема n, в которой один и тот же элемент может встречаться несколько раз.

Собственно случайная бесповторная выборка. При образовании этой выборки, в отличие от повторной, отобранный элемент обратно не возвращается. Выборка без повторений образуется также, если из генеральной совокупности сразу взято нужное число элементов.

Типическая выборка формируется так: генеральная совокупность разбивается на непересекающиеся группы. Затем из каждой группы по схеме повторной или бесповторной выборок отбирают определенное число элементов, которые в совокупности и образуют типическую выборку. Например, для контроля качества продукции цеха, в котором работают 100 станков, производящих однотипную продукцию, можно отбирать часть изделий от каждого станка. Все изделия, отобранные от 100 станков, в совокупности образуют типическую выборку.

Механической называется выборка, которая получается при делении генеральной совокупности на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, и отборе из каждой группы по одному объекту. Примером механической выборки может служить 10%-ая выборка деталей со станка такая, что каждая десятая деталь со станка идет на проверку (при этом нужно, чтобы интервалы переналадки станка не были бы кратными интервалам, через которые отбирают детали, иначе в выборке могут оказаться только наиболее точно изготовленные детали или наоборот).

Серийная выборка формируется следующим образом: генеральная совокупность разбивается на непересекающиеся группы (серии). Затем случайным образом отбираются серии, все элементы которых в совокупности образуют серийную выборку. Например, для контроля качества продукции цеха, в котором работают 100 станков, производящих однотипную продукцию, можно случайным образом (по схеме повторной или бесповторной выборок) отобрать, например, 15 станков, вся продукция которых и составит серийную выборку.

6.4. Вариационный ряд. Варианты

Пусть произведена выборка объема n из генеральной совокупности и получены значения признака $x_1, x_2, \ldots x_m$, причем значение x_1 наблюдалось n_1 раз, $x_2 - n_2$ раз и т. д. Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

Составим таблицу, в первую строку которой поместим наблюдавшиеся значения признака X, расположенные в возрастающем порядке, а во вторую строку – соответствующие им относительные частоты $W_i = \dfrac{n_i}{n}$ $(i = 1,2,\ldots,m)$.

X	x_1	x_2	. . .	x_m
W	W_1	W_2	. . .	W_m

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{m} W_i = 1$. Такая таблица называется **эмпирическим законом распределения признака** X или **статистическим распределением выборки.**

Эмпирический закон распределения признака является статистическим аналогом теоретического закона распределения дискретной случайной величины в теории вероятностей. Совокупность значений признака, расположенных в порядке их возрастания, называется в статистике

вариационным рядом, а сами значения признака называют нередко **вариантами**.

6.5. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно распределение частот некоторого количественного признака X. Обозначим через n_x число опытов, при которых наблюдалось значение признака X, меньшее x, то есть частоту события $X < x$, n – общее число наблюдений (объем выборки).

Эмпирической функцией распределения (или функцией распределения выборки) называется функция

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

равная для каждого значения X относительной частоте события $X < x$.

В отличие от $F^*(x)$ интегральную функцию распределения генеральной совокупности $F(x)$ называют теоретической функцией распределения. $F(x)$, как известно, определяет вероятность, то есть степень возможности осуществления события $X < x$.

Согласно теореме Бернулли $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|F(x) - F^*(x)\right| < \varepsilon\ \right\} = 1$.

Поэтому эмпирическая функция распределения используется для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности, это аналог последней в статистике.

Свойства $F^*(x)$.

1. $O \leq F^*(x) \leq 1$.

2. $F^*(x)$ - неубывающая функция.

3. Если x- наименьшее из наблюдавшихся значений признака, то при $X < x$ $F^*(x) = 0$; если x - наибольшее значение признака, то при $X > x$ $F^*(x) = 1$.

<u>Пример.</u> Построить эмпирическую функцию распределения по данному статистическому распределению выборки :

x_i	-3	1	6	10
n_i	10	12	18	20

Найдем объем выборки $n = \sum n_i = 60$.

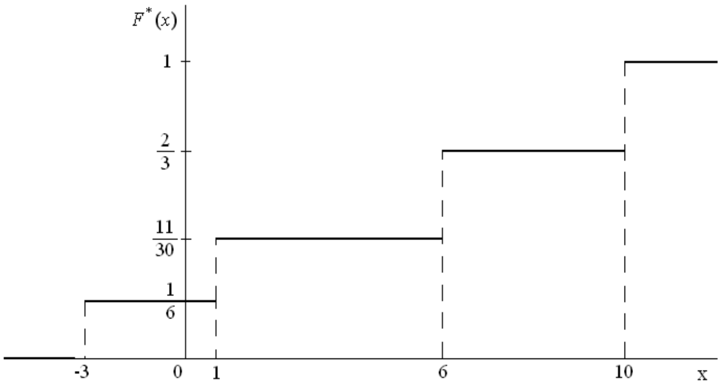
Относительные частоты, соответствующие наблюдавшимся значениям признака, будут равны

x_i	-3	1	6	10
W_i	1/6	0,2	0,3	1/3

По определению $F^*(x)$ имеем: $F^*(-3)=0$, так как значения X<-3 не наблюдались; $F^*(1)=\frac{1}{6}$, так как значения $X<1$, то есть $X=-3$, наблюдались 10 раз. Значения $X<6$, а именно $x_1=-3$ и $x_2=1$ наблюдались $10+12=22$ раза, следовательно, при $X\le 6$ $F^*(x)=11/30$ и т.д. Так как $x=10$ - наибольшее значение, то $F^*(x)=1$ при $x>10$. В результате получим

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -3, \\ \frac{1}{6} & \text{при} \quad -3<x\le 1, \\ \frac{11}{30} & \text{при} \quad 1<x\le 6, \\ \frac{2}{3} & \text{при} \quad 6<x\le 10, \\ 1 & \text{при} \quad x>10. \end{cases}$$

График $F^*(x)$ показан на рисунке. Эмпирическая функция распределения всегда ступенчатая. Как видно, эмпирическая функция распределения может быть построена как нарастающая сумма относительных частот.



6.6. Полигон и гистограмма частот

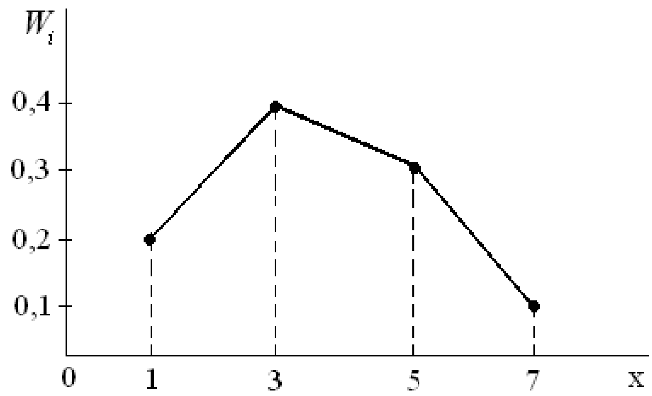
Для наглядности в статистике часто пользуются геометрической интер-претацией статистического распределения выборки, строя, так называемые, полигон и гистограмму частот (или относительных частот).

Для построения полигона частот (или относительных частот) при дискретном распределении признака по оси абсцисс откладывают значения признака x_i , а по оси ординат – частоты n_i (или соответственно относительные частоты W_i). Точки с координатами (x_i , n_i) (или (x_i , W_i)) соединяют отрезками прямых. Полигон частот дает представление о том, насколько часто встречаются те или иные значения исследуемого признака.

<u>Пример.</u> Для распределения

X	1	3	5	7
W_i	0,2	0,4	0,3	0,1

полигон относительных частот имеет вид, показанный на рисунке.



Полигон относительных частот – это статистический аналог многоугольника распределения дискретной случайной величины в теории вероятностей.

Если исследуемый признак – непрерывная случайная величина, то целесообразно строить гистограмму частот. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдавшиеся значения признака, делят на ряд частичных интервалов одинаковой длиныΔ. Далее находят n_i - сумму частот значений признака, попавших в i - ый частичный интервал, и строят ступенчатую фигуру из прямоугольников с основанием, равным Δ, и площадью, равной n_i.

Если значения признака совпадают с границей интервала, то их включают в сумму частот значений признака, принадлежащих соседним интервалам с частотами, равными половине частоты этого признака.

Полученный график называется гистограммой частот.

Площадь гистограммы частот равна сумме частот всех наблюдавшихся значений признака, то есть объему выборки.

Гистограмма относительных частот строится точно также, отличаясь от гистограммы частот лишь масштабом по оси ординат, а именно, по оси ординат откладывается плотность относительной частоты W_i/Δ. Поэтому площадь i –го прямоугольника будет равна W_i – относительной частоте значений признака, попавших в i – ый интервал, а площадь гистограммы относительных частот будет равна сумме всех W_i, то есть единице.

Число интервалов r гистограммы определяют приближенно по формуле Старджесса для выборки объема n (округляя r до ближайшего целого значения):

$$r = 1 + 3{,}3\lg n.$$

Пример. Произведено 100 измерений диаметров валиков, результаты которых представлены в таблице 4.

Таблица 4

15,23	15,37	15,48	15,48	15,43	15,35	15,36	15,40	15,45	15,29
15,48	15,58	15,44	15,56	15,28	15,59	15,47	15,41	15,54	15,20
15,38	15,43	15,35	15,56	15,51	15,47	15,40	15,29	15,20	15,46
15,42	15,44	15,41	15,29	15,48	15,39	15,50	15,38	15,45	15,50
15,45	15,42	15,29	15,53	15,34	15,55	15,33	15,32	15,44	15,46
15,32	15,46	15,32	15,48	15,38	15,43	15,51	15,43	15,60	15,44
15,55	15,29	15,31	15,44	15,43	15,44	15,31	15,58	15,28	15,24
15,34	15,49	15,50	15,38	15,48	15,43	15,37	15,29	15,54	15,33
15,36	15,46	15,23	15,44	15,38	15,27	15,52	15,40	15,26	15,37
15,59	15,48	15,46	15,40	15,24	15,41	15,34	15,43	15,38	15,50

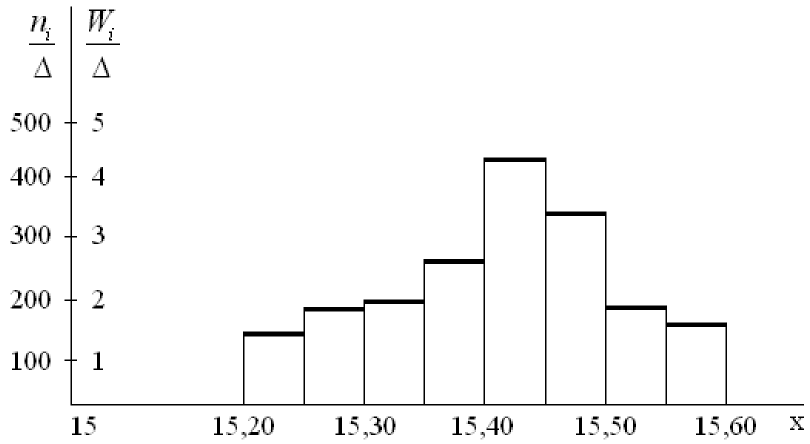
Построить гистограммы частот и относительных частот этого распределения.

Как видно из таблицы, наименьшее значение диаметра-15,20 мм, наи-большее-15,60 мм, длина этого промежутка - 0,4 мм. Число частичных интервалов принимаем по правилу Старджесса, равным восьми. Подсчитываем число значений признака, попадавших в каждый интервал. Для построения гистограмм частот (и относительных частот) составим таблицу 5.

Таблица 5

Частичный интервал $\Delta = 0,05$	Сумма частот значений признака в частичном интервале n_i	Плотность частоты n_i / Δ	W_i	Плотность относитель ной частоты W_i / Δ
15,20-15,25	6	120	0,06	1,2
15,25-15,30	10	200	0,10	2,0
15,30-15,35	11	220	0,11	2,2
15,35-15,40	15	300	0,15	3,0
15,40-15,45	22,5	450	0,225	4,5
15,45-15,50	18,5	370	0,185	3,7
15,50-15,55	9	180	0,09	1,8
15,55-15,60	8	160	0,08	1,6
	N= 100			

Соответствующие гистограммы изображены на рисунке.



При увеличении объема выборочной совокупности гистограмма относительных частот приближается к дифференциальному закону распределения признака в генеральной совокупности, то есть гистограмма относительных частот является статистическим аналогом плотности вероятностей *f(x)* непрерывной случайной величины.

7. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

7.1. Точечные оценки

Любое значение неизвестного параметра, от которого зависит закон распределения случайной величины, вычисленное по опытным данным, всегда является приближенным.

Оценкой параметра и называется в статистике его приближенное случайное значение, вычисленное на основе ограниченного числа опытов. Если оценка параметра характеризуется одним числом, то она называется **точечной**.

Пусть из генеральной совокупности произведена выборка объема n для изучения некоторого признака X. Обозначим неизвестный параметр теоретического распределения интересующего нас признака объектов генеральной совокупности через θ. Требуется по данным выборки найти “подходящую” оценку θ^* для параметра θ.

Очевидно, для некоторой другой выборки оценка θ^* будет принимать иное значение, то есть θ^* - случайная величина, зависящая от данных опытов и их числа n.

Чтобы оценка θ^* давала близкое приближение к оцениваемому параметру, она должна удовлетворять определенным требованиям.

1. При увеличении n оценка θ^* должна сходиться по вероятности к параметру θ, то есть должно выполняться равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Оценка, обладающая таким свойством, называется **состоятельной** .

2. Необходимо, чтобы пользуясь θ^* вместо θ, мы не допускали систематической (неслучайной) ошибки в сторону занижения или завышения действительного значения оцениваемого параметра, то есть, чтобы $M(\theta^*) = \theta$.

Оценка θ^*, математическое ожидание которой равна оцениваемому параметру, называется **несмещенной.**

3. Оценка θ^* должна обладать по сравнению с другими возможными оценками наименьшей дисперсией: $D(\theta^*) = \min$.

Оценка, обладающая таким свойством, называется **эффективной.**

Ниже рассмотрены повторные и бесповторные выборки и точечные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии, удовлетворяющие указанным требованиям.

7.2. Оценка генеральной средней повторной выборки

Пусть распределение признака X в генеральной совокупности характе-ризуется таблицей 3. Для оценки неизвестной генеральной средней X производится повторная выборка объема n. При этом каждый отобранный объект вновь возвращается в генеральную совокупность и, следовательно, состав ее восстанавливается. Поэтому результат отбора любого объекта в выборку не будет влиять на результаты следующих отборов, то есть справедлива схема независимых повторяющихся испытаний.

Пусть X_i - случайная величина, значение которой совпадает со значением интересующего нас признака x_i при i-ом наблюдении ($i = 1,2 \ldots n$). Величины X_i можно рассматривать как n независимых и одинаково распределенных случайных величин с параметрами

$$M(X_i) = \bar{x}_0, \quad D(X_i) = \sigma_0^2.$$

Если все X_i различны, то для определения генеральной средней используется в качестве оценки средняя арифметическая наблюдавшихся значений x_i**:**

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

называемая **выборочной средней**.

Если среди значений x_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ есть повторяющиеся значения с частотами n_i, причем $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, то

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i\,. \qquad (7.1)$$

Выборочная средняя является статистическим аналогом математического ожидания случайной величины в теории вероятностей.

1. Так как величины X_i удовлетворяют условиям теоремы Чебышёва (они независимы, их дисперсии ограничены одной и той же постоянной $C = \sigma_0^2$), то для выборки достаточно большого объема

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{x}_в - \bar{x}_0| < \varepsilon) = 1,$$

то есть оценка $\bar{x}_в$ является состоятельной. Поэтому для различных выборок достаточно большого объема из одной и той же генеральной совокупности выборочные средние будут практически совпадать между собой. В этом проявляется, так называемое, **свойство устойчивости выборочных средних**.

2. Выборочная средняя $\bar{x}_в$ является несмещенной оценкой $\bar{x}_0$, так как

$$M(\bar{x}_в) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i) = \bar{x}_0.$$

Дисперсия $\bar{x}_в$ равна

$$D(\bar{x}_в) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(x_i) = \frac{n\sigma_0^2}{n^2} = \frac{\sigma_0^2}{n}.$$

Следовательно, с увеличением числа наблюдений n $D(\bar{x}_в) \to 0$, то есть разброс значений $\bar{x}_в$ относительно $\bar{x}_0$ уменьшается.

3. Можно показать также, что $\bar{x}_в$ является эффективной оценкой, и при увеличении объема выборки закон распределения величины $\bar{x}_в$, как суммы одинаково распределенных независимых случайных величин, приближается к нормальному закону распределения с параметрами

$$M(X) = a = \bar{x}_0, \qquad \sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}. \qquad (7.2)$$

Поэтому

$$P(|\bar{x}_в - \bar{x}_0| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \qquad (7.3)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ - функция Лапласа.

7.3. Оценка генеральной средней бесповторной выборки

Пусть, как и выше, Y_i – случайная величина, значение которой совпадает со значением интересующего нас признака y_i при отборе i- го элемента.

Так как выбор каждого отдельного элемента по схеме бесповторной выборки будет влиять на исход последующих выборов, то $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ - зависимые случайные величины. Можно показать, что Y_i распределены по одному и тому же закону с параметрами

$$M(Y_i) = \bar{y}_0, \qquad D(Y_i) = \sigma_0^2.$$

Выборочной средней бесповторной выборки называется средняя арифметическая значений y_i :

$$\bar{y}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

Оценка $\bar{y}_в$ - несмещенная оценка генеральной средней $\bar{y}_0$, так как

$$M(\bar{y}_в) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(y_i) = \bar{y}_0.$$

Можно показать, что дисперсия выборочной средней равна

$$D(\bar{y}_в) = \frac{\sigma_0^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

Так как величины Y_i зависимые, то условия применимости теоремы Чебышёва к последовательности случайных величин $\{Y_i\}$ не соблюдаются. Применяя поэтому к выборочной средней неравенство Чебышёва, можно записать

$$P(|\bar{y}_в - \bar{y}_0| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(\bar{y}_в)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma_0^2}{n\varepsilon^2} \cdot \frac{N-n}{N-1},$$

следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\bar{y}_в - \bar{y}_0| < \varepsilon) = 1$, то есть $\bar{y}_в$ - состоятельная оценка $\bar{y}_0$.

Оценка $\bar{y}_в$ является также эффективной оценкой генеральной средней. С увеличением объема выборки закон распределения $\bar{y}_в$ приближается к нормальному. Поэтому $P(|\bar{y}_в - \bar{y}_0| < \varepsilon) = 2\Phi\,(\varepsilon/\sigma)$, где

$$\sigma = \sqrt{D(\bar{y}_в)} = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)}.$$

Так как объем генеральной совокупности N, как правило, весьма большой, то

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}. \qquad (7.4)$$

Замечание. Сопоставляя формулы (7.2) и (7.4) можно заключить, что средние квадратичные отклонения выборочной средней бесповторной выборки всегда меньше аналогичной характеристики повторной выборки того же объема. Следовательно, бесповторная выборка точнее повторной выборки того же объема. Но различие между ними существенно лишь, если объем выборки велик по сравнению с объемом генеральной совокупности N. В противном случае точечные оценки параметров распределения для повторной и бесповторной выборок практически совпадают.

7.4. Определение генеральной дисперсии

7.4.1. Повторная выборка

Если в выражениях для дисперсии случайной величины X

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^2) - M^2(X)$$

заменить математическое ожидание его аналогом в статистике - выборочной средней $\bar{x}_в$, то получим статистический аналог дисперсии:

$$D^*(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}_в^2 \qquad (7.5)$$

Величина $D^*(X)$ называется **выборочной дисперсией**.

Если значения признака $x_1, x_2,...,x_m$ повторяющиеся с частотами соответственно $n_1, n_2,...,n_m$, причем $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, то выборочная дисперсия вычисляется по формуле

$$D^*(X) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 n_i}{n}$$

или

$$D^*(X) = \overline{x^2} - \overline{x}_в^2,$$

где $\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n}$ - средняя квадратов значений признака.

Оценка $D^*(X)$ является состоятельной. Действительно, первый член в правой части формулы (7.5) – среднее арифметическое n значений x_i^2 и, следовательно, сходится по вероятности к $M(X^2)$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|D^*(X) - D(X)\right| < \varepsilon) = 1.$$

Можно показать, что

$$M\left(D^*\right) = \sigma_0^2 \frac{n-1}{n}.$$

Следовательно, D^* - смещенная оценка параметра σ_0^2. Ее использование приводит к систематической ошибке в определении генеральной дисперсии, давая заниженное значение σ_0^2.

Умножая $D^*(X)$ на поправочный множитель $\frac{n}{n-1}$, получим так называемую, **исправленную дисперсию**

$$\overline{D}\left(X\right) = \frac{n}{n-1} D^*\left(X\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2}{n-1} \qquad (7.6)$$

или для случая, когда имеются повторяющиеся значения признака

$$\overline{D}(X)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}_в\right)^2 n_i}{n-1}.$$

Очевидно, исправленная дисперсия является несмещенной оценкой дисперсии в генеральной совокупности. На практике ею пользуются, если
$n < 30$. При бóльших n, естественно, обе оценки (7.5) и (7.6) отличаются друг от друга очень мало.

Оценка $\overline{D}$ в общем случае не является эффективной. Однако для наиболее распространенного на практике нормального закона она оказывается асимптотически эффективной (то есть при больших n отношение ее дисперсии к минимально возможной дисперсии неограниченно приближается к единице).

7.4.2. Бесповторная выборка

Как и для повторной выборки, можно показать, что величина

$$D_1^*(Y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}_в\right)^2}{n}$$

является смещенной оценкой генеральной дисперсии при бесповторной выборке:

$$M\left(D_1^*\right)=\frac{n-1}{n}\,\frac{N}{N-1}\,\sigma_0^2.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии при этом будет исправленная дисперсия

$$\overline{D}_1=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{N-1}{N}\,D_1^*.$$

Замечание. Дисперсии оценок генеральных средних $\overline{x}_0,\overline{y}_0$ зависят от $\overline{x}_0,\overline{y}_0$ (так как σ_0 выражается через $\overline{x}_0$ или $\overline{y}_0$). Но $\overline{x}_0,\overline{y}_0$ являются неизвестными параметрами, иначе бы отпала необходимость в применении выборочного метода. Чтобы преодолеть это противоречие на практике, в формулах для дисперсий величин $\overline{x}_в, \overline{y}_в$ генеральную дисперсию σ_0^2 заменяют выборочной (или исправленной) дисперсией.

Рассмотрим примеры определения точечных оценок.

Пример. При обработке наружного диаметра 15 карданных валов были получены следующие размеры в мм (см. таблицу 6). Определить несмещенные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения диаметров, полагая, что обработанные диаметры имеют нормальное распределение.

Результаты вычислений представлены в таблице 6.

Таблица 6

№	x_i $[мм]$	$\lvert x_i - \overline{x}_в \rvert$	$\lvert x_i - \overline{x}_в \rvert^2$
1	42,22	0,047	0,0022
2	41,87	0,397	0,1576
3	42,56	0,293	0,0858
4	42,03	0,237	0,0562
5	42,48	0,213	0,0454
6	42,31	0,043	0,0018
7	40,15	2,117	4,4817
8	42,82	0,553	0,3058
9	43,83	1,563	2,4430
10	43,40	1,133	1,2837
11	41,13	1,137	1,2928
12	41,72	0,547	0,2992
13	41,35	0,917	0,8409
14	44,13	1,863	3,4708
15	42,00	0,267	0,0712
	$\sum_{i=1}^{15} x_i = 634$		$\sum_{i=1}^{15} (x_i - \overline{x}_в)^2 = 14{,}8381$

По данным таблицы находим

$$\overline{x}_в = \frac{1}{15} \cdot \sum_{i=1}^{15} x_i = 42{,}27, \quad \overline{D}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i - \overline{x}_в)^2}{n-1} = 1{,}06, \quad \overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}(X)} = 1{,}03.$$

Пример. Объем генеральной совокупности $N = 10000$, объем выборки n=1000. В результате измерения интересующего нас признака X получено: $\bar{x}_в = 15{,}5$, $\overline{D}(X) = 3{,}15$. Найти вероятность того, что среднее значение признака X отличается от своей оценки на величину $\varepsilon \le 0{,}1$, если выборка повторная; бесповторная.

Выборка повторная:

По формуле (7.3) имеем

$$P\left(\left|\bar{x}_в - \bar{x}_0\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

где $\sigma = \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$.

Заменяя неизвестное σ, его оценкой, получим

$$\sigma_0 \approx \bar{\sigma} = \sqrt{\overline{D}(X)} = \sqrt{3{,}15} = 1{,}775,$$

следовательно,

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}775}{\sqrt{1000}} = 0{,}056 \quad \text{и} \quad P\left(\left|15{,}5 - \bar{x}_0\right| \le 0{,}1\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{0{,}056}\right) = 0{,}9265.$$

Выборка бесповторная.

При этом

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sigma_0^{*}}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{3{,}15}{1000}\left(1 - \frac{1000}{10000}\right)} = 0{,}053 \quad \text{и}$$

$$P\left(\left|15{,}5 - \bar{x}_0\right| \le 0{,}1\right) = 2\,\Phi\left(\frac{0{,}1}{0{,}053}\right) = 0{,}9412.$$

7.5. Метод максимального правдоподобия

Для построения точечных оценок в статистике применяют различные методы: метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов. Ограничимся первым из них.

Пусть X – случайная величина, которая в результате n независимых опытов приняла значения: $x_1, x_2, ..., x_n$, и пусть закон распределения X известен, но с точностью до некоторого параметра a, от которого он зависит. Требуется найти подходящую точечную оценку $\overline{a}$ параметра a.

Введем обозначение: $P(X = x_i) = P(x_i, a)$ и составим функцию L, равную произведению вероятностей независимых событий $X = x_1, ..., X = x_n$, то есть вероятности их совместного осуществления:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, a) = P(x_1, a) \cdot P(x_2, a) \cdot ... \cdot P(x_n, a).$$

Функция $L(x_1, x_2, ..., x_n, a)$ аргумента a (x_i – фиксированные числа) называется **функцией правдоподобия** дискретной случайной величины X.

Идея метода заключается в том, что в качестве точечной оценки параметра a принимается такое значение $\overline{a}$, при котором функция правдоподобия принимает максимальное значение. Действительно, в экспериментах реализуются обычно именно те значения $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины X, вероятность которых максимальна.

Оценку $\overline{a}$ называют **оценкой максимального правдоподобия**.

Для отыскания максимума функции правдоподобия применяются обычные правила отыскания экстремума функции:

Решается уравнение $\dfrac{dL}{da} = 0$ (его называют **уравнением правдоподобия**), затем вычисляется вторая производная $\dfrac{d^2L}{da^2}$. Если она при $a = \overline{a}$ отрицательна, то $\overline{a}$ - точка максимума. Найденную точку максимума $\overline{a}$ и принимают за оценку наибольшего правдоподобия параметра a.

Замечания.

1. Функции L и lnL достигают максимума при одном и том же значении параметра a Поэтому вместо отыскания максимума функции L часто ищут максимум функции lnL – логарифмической функции правдоподобия, что оказывается удобнее.
2. Для непрерывной случайной величины X функцией правдоподобия называется функция параметра a вида:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, a) = f(x_1, a) \cdot f(x_2, a) \cdot ... \cdot f(x_n, a),$$

где $f(x_i, a)$ - плотность вероятностей.

Оценка максимального правдоподобия неизвестного параметра распределения непрерывной случайной величины строится так же, как и для дискретной случайной величины.

Пример. Найти методом максимального правдоподобия оценки параметров a и σ нормального закона распределения:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

если значения, принятые случайной величиной X в результате n испытаний равны: $x_1, x_2, ..., x_n$.

Так как нормальный закон распределения характеризуется двумя параметрами $a_1=a$ и $a_2=\sigma,$ то функция правдоподобия будет функцией двух переменных:

$$L=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_2-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_n-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{\sum(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Логарифмируя это выражение, получим:

$$\ln L=\ln\left[\frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n}\right]+\ln e^{-\frac{\sum(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}=-n\ln\sigma+\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)^{-n}-\frac{\sum(x_i-a)^2}{2\sigma^2}.$$

Частные производные от логарифмической функции правдоподобия по a и σ равны:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial a}=-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2(x_1-a)-2(x_2-a)-\ldots-2(x_n-a)\right]=\frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-na),$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum(x_i-a)^2}{\sigma^3}.$$

Поэтому система уравнений правдоподобия примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial a}=0,\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma}=0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\left(x_i - na\right) = 0, \\ -\dfrac{n}{\sigma} + \dfrac{\sum\left(x_i - a\right)^2}{\sigma^3} = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$a = \frac{\sum x_i}{n}, \qquad \sigma^2 = \frac{\sum\left(x_i - a\right)^2}{n}.$$

Следовательно, искомые оценки максимального правдоподобия будут:

$$\bar{a} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}_в, \qquad \sigma_* = \sqrt{D^*} = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \bar{a}\right)^2}{n}}.$$

7.6. Точность оценки. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Точечные оценки параметров распределения при выборках малого объема могут существенно отличаться от действительных значений оцениваемых параметров. Поэтому в статистике часто пользуются интервальными оценками (особенно при небольшом числе наблюдений), которые служат для оценки точности и надежности точечных оценок. **Интервальной называется оценка,** которая определяется двумя числами – концами интервала, в котором заключено неизвестное значение параметра.

Пусть для неизвестного параметра θ найдена по данным выборки несмещенная оценка θ^*. Чтобы оценить возможную при этом ошибку, назначим некоторую достаточно большую вероятность γ такую, что любое событие, происходящее с вероятностью γ, можно считать практически достоверным. Найдем далее такое $\varepsilon > 0$, при котором с вероятностью γ можно утверждать, что отклонение θ^* от θ по модулю не будет превосходить ε, то есть

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = \gamma \qquad \text{или} \qquad P\left(\theta^* - \varepsilon < \theta < \theta^* + \varepsilon\right) = \gamma.$$

Величина ε называется **точностью оценки**. Вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon$, называется **доверительной**

вероятностью или надежностью оценки. Обычно γ задается равным 0,95; 0,99; 0,999.

Интервал $I_\gamma = \left| \theta^* - \varepsilon;\ \theta^* + \varepsilon \right|$, в котором с надежностью γ заключено неизвестное значение параметра θ, называется **доверительным интервалом.** Так как длина интервала и положение его на оси абсцисс, определяемое центром θ^*, случайны, то говорят, что доверительный интервал I_γ накрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью γ.

7.7. Доверительный интервал для оценки генеральной средней при известном среднем квадратическом отклонении

Пусть для случайной величины X с неизвестной генеральной средней $\bar{x}_0$ по данным выборки объема n найдена точечная оценка $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Будем предполагать для простоты, что $\sigma(\bar{x}_в)$ известно. Для построения доверительного интервала необходимо найти такое $\varepsilon > 0$, чтобы выполнялось неравенство

$$P(|\bar{x}_в - \bar{x}_0| < \varepsilon) = \gamma .$$

Воспользуемся тем, что $\bar{x}_в$ как сумма независимых одинаково распределенных случайных величин X_i при достаточно большом n (а практически уже при n >10-20) согласно теореме Ляпунова имеет закон распределения, близкий к нормальному. Итак, считая, что X распределена по нормальному закону с параметрами $M(\bar{x}_в) = \bar{x}_0$ (так как $\bar{x}_в$-несмещенная оценка) и $\sigma(\bar{x}_в)$, можно записать

$$P(|\bar{x}_в - \bar{x}_0| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Учитывая, что вероятность P задана и равна γ, получим

$$P(\bar{x}_в - t\sigma < \bar{x}_0 < \bar{x}_в + t\sigma) = 2\Phi(t) = \gamma,$$

где число $t = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ называется **квантилем нормального распределения** и определяется из условия

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}.$$

Следовательно, с надежностью γ можно утверждать, что довер и-тельный интервал $I_\gamma = [\bar{x}_в - t\sigma;\ \bar{x}_в + t\sigma]$ накрывает генеральную среднюю $\bar{x}_0$. Точность оценки при этом $\varepsilon = t\sigma$.

Выражение для $\sigma(\bar{x}_в)$ зависит от вида выборки. Так, для повторной выборки

$$\sigma(\bar{x}_в) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},$$

для бесповторной выборки

$$\sigma(\bar{x}_в) = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}.$$

Замечания.

1. По условию генеральная дисперсия σ_0^2 предполагается известной, но если это не так, то для нёе используется соответ ствующая точечная оценка.

2. Из формулы $t = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ с учетом выражений для σ получаем:

для повторной выборки

$$n = \frac{t^2 \sigma_0^2}{\varepsilon^2}, \tag{7.7}$$

для бесповторной выборки

$$n = \frac{t^2 \sigma_0^2}{\varepsilon^2 + \frac{t^2 \sigma_0^2}{N}}. \tag{7.8}$$

Следовательно, если требуется оценить генеральную среднюю с наперёд заданной точностью ε и надежностью γ, то потребный объем выборки определяется по формулам (7.7), (7.8) соответственно для повторной и бесповторной выборок.

Пример. В условиях примера (стр. 106) построить доверительный интервал для математического ожидания, соответствующий доверительный вероятности γ=0,95 в предположении, что выборка является повто р-ной.

Так как $\bar{x}_в = 42{,}27$ мм, $\bar{\sigma} = 1{,}03$ мм, то заменяя σ_0 его оценкой $\bar{\sigma}$, получим

$$\sigma(\bar{x}_в) = \sqrt{D(\bar{x}_в)} = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \approx \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}03}{\sqrt{15}} = 0{,}266.$$

По таблице функции Лапласа (см. Приложение 2) находим t при заданном γ=0,95:

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0{,}475 \quad \text{и} \quad t = 1{,}96.$$

Точность оценки $\varepsilon = t\sigma = 1{,}96 \cdot 0{,}266 = 0{,}52.$

Границы доверительного интервала

$$\bar{x}_в - \varepsilon = 42{,}27 - 0{,}52 = 41{,}75\,мм, \qquad \bar{x}_в + \varepsilon = 42{,}27 + 0{,}52 = 42{,}79\,мм.$$

Следовательно, с надежностью 0,95 можно утверждать, что генеральная средняя $\bar{x}_0$ заключена в пределах $41{,}75 < \bar{x}_0 < 42{,}79$.

Отметим , что повышение надежности оценкиγ приводит к возра с-танию $\Phi(t)$, ε и доверительного интервала, то есть к уменьшению точности определения действительного значения параметра.

Пример. В условиях примера (стр. 98) найти с надежностью 0,95 точность γ, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожи-дание диаметров изготовляемых валиков и доверительный интервал для математического ожидания диаметров. Предполагается, что диаметры распределены нормально; выборка повторная.

Для рассматриваемой выборки выборочная средняя

$$\bar{x}_в = \frac{\sum x_i}{100} = 15{,}411\,мм.$$

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x}_в)^2}{99}} = \sqrt{0{,}00907} = 0{,}095.$$

Поэтому

$$\varepsilon = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{1{,}96 \cdot 0{,}095}{\sqrt{100}} = 0{,}021, \quad \overline{x}_в - \varepsilon = 15{,}392, \qquad \overline{x}_в + \varepsilon = 15{,}430 \quad \text{и}$$

$$15{,}392 < \overline{x}_0 < 15{,}430.$$

Пример. Определить необходимый объем повторной и бесповторной выборок для определения средней продолжительности горения электрических лампочек, чтобы с вероятностью 0,99 предельная ошибка выборки не превышала 50 часов. Объем всей партии лампочек – 5000 шт. Генеральное среднее квадратическое отклонение принять равным 150 часов.

По условию $\varepsilon = 50$, $\sigma = 150$, $N = 5000$, $\gamma = 0{,}99$, следовательно,

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0{,}495 \quad \text{и} \quad t{=}2{,}58.$$

$$n_{повт.} = \frac{t^2\sigma_o^2}{\varepsilon^2} = 59{,}9; \qquad n_{бесп.} = \frac{t^2\sigma_o^2}{\varepsilon^2 + t^2\sigma_o^2 / N} \approx 59{,}2.$$

Итак, выборки должны содержать не менее 60 лампочек.

7.8. Малая выборка

7.8.1. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном среднем квадратическом отклонении

До сих пор объем выборочной совокупности предполагался достаточно большим. Поэтому оценки генеральной средней считались распределенными по нормальному закону. Однако на практике часто приходится иметь дело с выборками небольшого объема (n < 20 - 30). Оказывается, что заключения, аналогичные полученным при рассмотрении выборок большого объема, возможны и в случае малых выборок, если в генеральной совокупности рассматриваемый признак распределен по нормальному закону.

Пусть имеется генеральная совокупность практически неограниченно большого объема N, из которой образуется малая выборка объема n. В этом случае бесповторная выборка практически совпадает с повторной, так как величины $1-\frac{n}{N}$ и $\frac{N-1}{N}$ очень мало отличаются от единицы.

Среднее квадратическое отклонение выборочной средней $\overline{x}_в$ можно записать в виде $\sigma_{пв.}(\overline{x}_в)=\frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}}$, где $\overline{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_в)^2$ - исправленная дисперсия малой выборки.

Рассмотрим случайную величину $T=\frac{\overline{x}_в-\overline{x}_o}{\sigma_{пв.}}$ (ее возможные значения будем обозначать через t). Можно доказать, что **величина *T* распределена по закону Стьюдента** с $k = n$-1 степенями свободы.

Плотность вероятностей распределения Стьюдента равна

$$S(t,\,n)=B_n\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2},$$

где

$$B_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},\qquad \Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt \text{ - гамма-функция.}$$

В частности, при целочисленном аргументе $\Gamma(n+1)=n!$

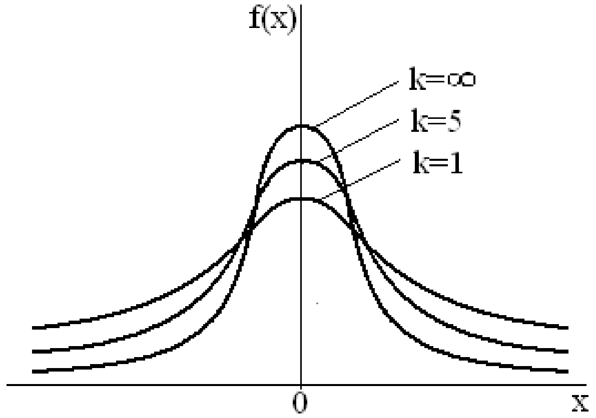
Распределение Стьюдента определяется одним параметром $k=n-1$ - числом степеней свободы и не зависит от неизвестных a и σ, что является его большим достоинством.

Для закона распределения Стьюдента математическое ожидание и дисперсия соответственно равны:

$$M(k)=0 \qquad при \quad k\geq 2,$$

$$D(k)=\frac{1}{k-2} \qquad при \quad k\geq 3.$$

Кривые распределения $f(x)$ при различных значениях k показаны на рисунке.



Как видно, кривые распределения Стьюдента по форме напоминают плотность нормального распределения, но при $x \to \infty$ значительно медленнее приближаются к оси абсцисс. При $k \to \infty$ распределение Стьюдента приближается к нормальному.

Распределение Стьюдента играет большую роль в так называемой микростатистике (статистике малых выборок).

Как известно, если плотность вероятностей $f(x)$ – четная функция, и концы интервала симметричны относительно начала координат, то

$$P(|x| < \alpha) = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx.$$

Так как функция $S(t, n)$ четная по аргументу t, то

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}_в - \bar{x}_0}{\sigma_{пв.}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t,n)dt = \theta(n, t_\gamma) = \gamma$$

или

$$P\left(\bar{x}_в - \frac{t_\gamma \bar{\sigma}}{\sqrt{n}} < \bar{x}_o < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma \bar{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = \theta(n, t_\gamma) = \gamma.$$

Величины $\theta(t_\gamma, n)$ и t_γ табулированы. Пользуясь таблицами распределения Стьюдента, по заданным n и γ можно найти t_γ (см. Приложение 3).

Итак, доверительный интервал $I_\gamma = \left(\bar{x}_в - \frac{t_\gamma \bar{\sigma}}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x}_в + \frac{t_\gamma \bar{\sigma}}{\sqrt{n}} \right)$ с надежностью γ накрывает неизвестное математическое ожидание $\bar{x}_в$.

<u>Пример.</u> Произведено 8 независимых опытов над случайной величиной *X*, распределенной нормально с неизвестными параметрами $\bar{x}_0$ и σ_0. Результаты опытов приведены ниже.

x_i	1	2	3	4	5
n_i	1	2	2	2	1

Построить доверительный интервал для математического ожидания $\bar{x}_0$ с надежностью γ = 0,95.

По данным опытов находим

$$\bar{x}_в = \frac{\sum x_i n_i}{n} = 3{,}0, \qquad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^2}{n-1}} = 1{,}71.$$

По таблице Приложения 3 для *n* = 8 и γ = 0,95 находим $t_\gamma = 2{,}37$. Поэтому

$$\bar{x}_в - \frac{t_\gamma \bar{\sigma}}{\sqrt{n}} = 3 - \frac{2{,}37 \cdot \sqrt{1{,}71}}{\sqrt{8}} = 1{,}904, \qquad \bar{x}_в + \frac{t_\gamma \bar{\sigma}}{\sqrt{n}} = 4{,}096.$$

Следовательно, $\bar{x}_o$ с надежностьюγ = 0 ,95 заключено в интервале 1,904<$\bar{x}_o$<4,096.

<u>Пример.</u> Для определения скорости автомобиля было проведено 5 испытаний, по результатам которых вычислена средняя скорость $\bar{v} = 27{,}8$ м/с. Найти 95%-ый доверительный интервал, если известно, что рассеивание скорости подчинено нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\bar{\sigma} = 0{,}4$ м/с.

При *n* = 5 и $\gamma = 0{,}95$ по таблице Приложения 3 находим $t_\gamma = 2{,}78$. Вычисляя границы доверительного интервала, получим:

$$\bar{v}_в - \frac{t_\gamma \bar{\sigma}}{\sqrt{n}} = 27{,}8 - \frac{2{,}78 \cdot 0{,}4}{\sqrt{5}} = 27{,}3, \qquad \bar{v}_в + \frac{t_\gamma \bar{\sigma}}{\sqrt{n}} = 27{,}8 + \frac{2{,}78 \cdot 0{,}4}{\sqrt{5}} = 28{,}3.$$

В результате $27{,}3 < v < 28{,}3$.

7.8.2. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения

Пусть случайная величина X распределена в генеральной совокупности по нормальному закону. По данным выборки можно найти для нее $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}}$. Требуется найти доверительный интервал, накрывающий неизвестное среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности σ_0 с заданной надежностью γ.

Пусть $P(|\sigma_o - \overline{\sigma}| < \varepsilon) = \gamma$ или $P(\overline{\sigma} - \varepsilon < \sigma_o < \overline{\sigma} + \varepsilon) = \gamma$.

Преобразуем неравенство в скобках к виду, удобному для использования готовых таблиц. Неравенство $\overline{\sigma} - \varepsilon < \sigma_0 < \overline{\sigma} + \varepsilon$ равносильно неравенству

$$\overline{\sigma}(1 - q) < \sigma_o < \overline{\sigma}(1 + q), \tag{7.9}$$

где $q = \varepsilon / \overline{\sigma}$.

Предполагая, что $q < 1$, перепишем (6.9) в виде $\dfrac{1}{\overline{\sigma}(1+q)} < \dfrac{1}{\sigma_o} < \dfrac{1}{\overline{\sigma}(1-q)}$.

Умножая обе части неравенства на $\sigma\sqrt{n-1}$ и обозначая $\chi = \dfrac{\overline{\sigma}\sqrt{n-1}}{\sigma_0}$, получим

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}. \tag{7.10}$$

Можно показать, что плотность распределения величины χ имеет вид [1]

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\chi^2/2}}{2^{\frac{n-3}{2}}\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}.$$

Поэтому вероятность осуществления неравенства (7.10) равна

$$P(\chi_1 < \chi < \chi_2) = \int_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi, n)\, d\chi = \gamma,$$

где

$$\chi_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{1+q}, \qquad \chi_2 = \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Интеграл $\int\limits_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi,n)\, d\chi$ табулирован. Вычислив по данным выборки $\overline{\sigma}$ и зная n и γ, можно по таблицам найти $q = q(\gamma, n)$, а затем определить доверительный интервал $I_\gamma = [\overline{\sigma}(1-q); \overline{\sigma}(1+q)]$, в котором с надежностью γ заключено неизвестное значение σ_0 (см. Приложение 4).

Замечание. Если $q > 1$, то неравенство (7.9) следует заменить неравенством $0 < \sigma_o < \overline{\sigma}(1+q)$. Можно показать, что в этом случае значения $q > 1$ могут быть найдены из уравнения $\int\limits_{\chi_1}^{\infty} R(\chi,n)\, d\chi = \gamma.$

Пример. В условиях примера (стр.106) найти доверительный интервал, накрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ_0 с надежностью γ= 0,95.

По данным выборки объема n=15 исправленное среднее квадратическое отклонение $\overline{\sigma}$=1,03 мм. При $n = 15$ и $\gamma = 0{,}95$ по таблице Приложения 4 найдем $q = 0{,}46$. Так как $q < 1$, то подставляя в (7.9) значения $\overline{\sigma}$=1,03 мм, $q = 0{,}46$, получим

$$0{,}56 < \sigma_0 < 1{,}50.$$

8. УПРОЩЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫБОРКИ

8.1. Вариационный ряд с равноотстоящим вариантами. Условные варианты

Непосредственное использование значений признака (вариант), произ-вольным образом выбранных из генеральной совокупности, приводит к существенным затруднениям при вычислении статистических характеристик выборки.

Упрощенные методы их расчета базируются на замене первоначальных вариант x_i условными $u_i = \dfrac{x_i - C}{\Delta}$.

Здесь C – так называемый “ложный нуль” (новое начало отсчета), $\Delta = x_i - x_{i-1}$. В качестве ложного нуля выбирают значение признака, имеющее наибольшую частоту. Оно обычно располагается примерно в середине вариационного ряда.

Рассмотрим сначала вариационный ряд с равноотстоящими вариантами. Это означает, что $\Delta = x_i - x_{i-1} = const$ для любого i=1,2 ... Тогда условные варианты будут целыми числами. Действительно, взяв в качестве C произвольную варианту x_m, получим

$$u_i = \frac{x_i - x_m}{\Delta} = \frac{\left[x_1 + (i-1)\Delta\right] - \left[x_1 + (m-1)\Delta\right]}{\Delta} = i - m \text{ - целое число.}$$

Пример. Найти условные варианты статистического распределения выборки

X	145,2	150,2	155,2	160,2	165,2
W	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Принимаем C = 155,2. Очевидно Δ = 5. Условные варианты будут равны:

$$u_1 = \frac{145{,}2 - 155{,}2}{5} = -2, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 1, \quad u_5 = 2.$$

Проводить вычисления с ними, конечно проще, чем с первоначальными значениями признака x_i.

8.2. Эмпирические моменты

Аналогично числовым характеристикам (теоретическим моментам рас-пределения генеральной совокупности), применяемым в теории вероятностей, в статистике рассматривают эмпирические моменты выборочного распределения.

Обычным эмпирическим моментом порядка k называется среднее значение $к$– ых степеней разностей ($X - C$):

$$M'_k = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - C)^k}{n}.$$

Здесь n_i - частота варианты x_i , $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ - объем выборки, C – произвольное постоянное число (“ложный нуль”).

Начальным эмпирическим моментом порядка k называется обычный эмпирический момент k – го порядка при $C = 0$, то есть

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^k.$$

Очевидно, что $M_0 = 1$, $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i = \bar{x}_в$ - выборочная средняя.

Центральным эмпирическим моментом порядка k называется обыч-ный момент k – го порядка, если $C = \bar{x}_в$:

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \bar{x}_в)^k.$$

(8.1)

Первые четыре центральных момента выражаются через обычные моменты следующим образом:

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = M'_2 - (M'_3)^2,$$

$$m_3 = M'_3 - 3M'_2 \cdot M'_1 + 2(M'_1)^3,$$

$$m_4 = M'_4 - 4M'_3 \cdot M'_1 + 6M'_2 \cdot (M'_1)^2 - 3(M'_1)^4.$$

Непосредственное вычисление центральных эмпирических моментов достаточно трудоемко. Для упрощения расчетов заменяют первоначальные варианты условными. Тогда приходят к так называемым условным эмпирическим моментам.

Условным эмпирическим моментом порядка k называется началь-ный эмпирический момент k - го порядка для условных вариант:

$$\overline{M}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i u_i^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \left(\frac{x_i - C}{\Delta}\right)^k.$$

В частности, $$\overline{M}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \frac{x_i - C}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i x_i}{n} - C\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{n}\right) = \frac{1}{\Delta}(\overline{x}_в - C),$$

поэтому

$$\overline{x}_в = \overline{M}_1 \cdot \Delta + C.$$

Очевидно,

$$M'_k = \frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n} = \Delta^k \cdot \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \Delta^k \cdot \overline{M}_k$$

Поэтому центральные моменты через условные будут выражаться по формулам:

$$m_2 = \Delta^2\left[\overline{M}_2 - (\overline{M}_1)^2\right], \qquad m_3 = \Delta^3\left[\overline{M}_3 - 3\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_1 + 2 \cdot (\overline{M}_1)^3\right],$$

$$m_4 = \Delta^4\left[\overline{M}_4 - 4\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_3 + 6\overline{M}_2 \cdot (\overline{M}_1)^2 - 3(\overline{M}_1)^4\right].$$

Использование полученных формул позволяет значительно упростить вычисление оценок генеральной средней и генеральной дисперсии.

8.3. Сведение первоначальных вариант к равноотстоящим. Метод произведений

Как правило, значения признака (варианты), регистрируемые в опытах, не являются равноотстоящими. При этом условные варианты получаются не целыми числами. Для сведения первоначальных вариант к равноотстоящим применяется следующий прием:

Интервал, в котором заключены все наблюдавшиеся значения признака, делится на несколько равных частичных интервалов (желательно, чтобы в каждый частичный интервал попало не менее 10 первоначальных вариант); определяются середины частичных интервалов, которые и образуют последовательность равноотстоящих вариант; в качестве частоты каждой “новой” варианты принимается общее число первоначальных вариант, которые попали в соответствующий частичный интервал (с учетом замечания на стр. 98).

При обработке опытных данных практически всегда приходится вычислять $\overline{x}_в$ и m_2. Если объем выборки достаточно большой, то для сокращения вычислений обычно применяется **метод произведений**. Последовательность нахождения $\overline{x}_в$ и m_2 этим методом рассмотрим на конкретном примере.

Пример. Из текущей продукции токарного автомата, обрабатывающего валики, сделана выборка объемом $n = 100$ (см. таблицу 4). Требуется найти выборочную среднюю $\overline{x}_в$ и второй центральный момент m_2.

Разобьем весь интервал изменения значений признака (диаметра валика - X) 15,20 – 15,60 мм на 8 частичных интервалов: 15,20 – 15,25; 15,25-15,30; …,15,55-15,60. Приняв середины частичных интервалов в качестве новых вариант, получим вариационный ряд из равноотстоящих вариант: $x_1 = 15{,}225$, $x_2 = 15{,}275, ...,$ $x_8 = 15{,}575$, частоты которых: $n_1 = 6, \dots,$ $n_8 = 8$ (см. таблицу 7).

Таблица 7

Интервалы	x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
15,20-15,25	15,225	6	-4	-24	96	54
15,25-15,30	15,275	10	-3	-30	90	40
15,30-15,35	15,325	11	-2	-22	44	11
15,35-15,40	15,375	15	-1	-15	15	0
15,40-15,45	15,425	22,5	0	0	0	22,5
15,45-15,50	15,475	18,5	1	18,5	18,5	74
15,50-15,55	15,525	9	2	18	36	81
15,55-15,60	15,575	8	3	24	72	128
		$\sum n_i = 100$		-30,5	371,5	410,5

В четвертом столбце таблицы указаны условные варианты $u_i = \dfrac{x_i - C}{\Delta}$.

В качестве “ложного нуля” принята варианта $C = \overline{x}_в = 15{,}425$.

Очевидно, Δ = 0,05. В 5-ом, 6-ом и 7-ом столбцах таблицы помещены величины $n_i u_i$, $n_i u_i^2$, $n_i (u_i + 1)^2$. В нижней строке указаны суммы соответствующих столбцов.

Контроль правильности вычислений производится следующим образом:

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$$

или 410,5 = 371,5 + 2·(-30,5) + 100; 410,5 ≡ 410,5.

По данным таблицы условные эмпирические моменты первого и второго по-рядков будут равны

$$\overline{M}_1 = \frac{1}{n}\sum n_i u_i = -0{,}305, \qquad \overline{M}_2 = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^2 = 3{,}715.$$

Окончательно получим

$$\overline{x}_в = \overline{M}_1 \cdot \Delta + C = -0{,}305 \cdot 0{,}05 + 15{,}425 = 15{,}410,$$

$$m_2 = \Delta^2 \left[\overline{M}_2 - (\overline{M}_1)^2\right] = 0{,}05^2 [3{,}715 - (-0{,}305)^2] = 0{,}00905.$$

Непосредственный подсчет выборочной средней и второго центрального момента по первоначальным значениям признака из таблицы 4 с использованием формул (7.1), (8.1) приводит к следующим результатам:

$$\overline{x}_в = 15{,}411, \qquad m_2 = 0{,}00907.$$

Как видно, замена первоначальных вариант равноотстоящими не приводит к существенным ошибкам, но при этом объем вычислений заметно сокращается.

9. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Между статистическим распределением случайной величины, которое строится всегда по ограниченному числу опытов, и предполагаемым теоретическим распределением неизбежно некоторое расхождение. Оно порождается либо случайными причинами, обусловленными ограниченным числом наблюдений, либо может быть неслучайным и связано с тем, что принимаемая гипотеза о предполагаемом законе распределения случайной величины противоречит опытным данным.

Для оценки близости теоретического и эмпирического распределений и применяют критерии согласия. Они позволяют установить, является ли расхождение эмпирического и теоретического распределений несущественным (случайным) или значимым (неслучайным).

Идея их построения заключается в следующем. Чтобы принять (или отвергнуть) некоторую гипотезу H о том, что случайная величина X подчинена определенному закону распределения с функцией $F(x)$, вводят в рассмотрение величину W , которая характеризует меру расхождения между теоретической $F(x)$ и эмпирической $F(x)$ функциями распределения. Очевидно, W - случайная величина, закон распределения которой зависит от закона распределения X и числа опытов n.

Пусть в результате данной серии опытов установлено, что W приняла некоторое значение w. Предположим, что принятая гипотеза верна и найдем вероятность того, что расхождение W между эмпирическим и теоретическим распределениями за счет чисто случайных причин (связанных с недостаточным объемом опытных данных) не меньше, чем наблюдавшееся для данной серии опытов расхождение w, то есть, что $W \geq w$.

Если эта вероятность мала, то это значит, что причины расхождения неслучайны, и гипотеза о предполагаемом характере распределения случайной величины противоречит опытным данным, то есть ее надо отбросить, и наоборот.

Вопрос о том, как мала или велика должна быть указанная вероятность, решается не из математических, а из практических соображений с учетом конкретных условий задачи.

Обычно в качестве практически невозможных отклонений принимают такие, вероятность которых не превосходит 0,05 или 0,01 и т.п. Такую вероятность называют **уровнем значимости**.

Итак, если $P(W \geq w) \leq 0{,}01$ (или 0,05 и т.п.), то выдвинутая гипотеза о теоретическом законе распределения противоречит опытным данным и должна быть отброшена и наоборот, если $P(W \geq w) > 0{,}01$, то гипотезу H можно принять для данного уровня значимости.

В зависимости от того, какая величина принимается в качестве меры W, различают те или иные критерии согласия. Ниже будут рассмотрены лишь два из них, наиболее часто применяемые.

9.1. Критерий χ^2 Пирсона

Допустим, что произведено n опытов над случайной величиной X. Всю область изменения значений X разобъем на S частичных интервалов или разрядов (в случае непрерывной величины) или групп, состоящих из отдельных значений дискретной величины. Подсчитаем эмпирические частоты n_i тех значений x_i, которые попали в i-ый разряд (группу). Предположим теперь, что для X принят некоторый закон распределения. Тогда можно найти вероятность попадания X в каждый из S разрядов: $p_1, p_2, \dots p_s$. Величины $n_i' = np_i$ называются **теоретическими (выравнивающими) частотами.**

Критерий χ^2 Пирсона служит для оценки степени различия между частотами эмпирического и теоретического распределений и вычисляется как сумма квадратов разностей между теоретическими и эмпирическими частотами, отнесенная к теоретическим частотам (по всем S разрядам).

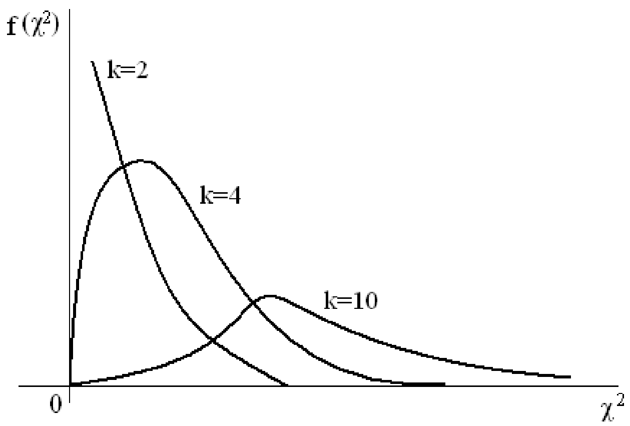
$$W = \chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Очевидно, величина χ^2 является случайной и тем меньше, чем ближе n_i к n_i'.

Как известно, в теории вероятностей **распределением** χ^2 **с** $\boldsymbol{k}$ **степенями свободы** называется распределение суммы квадратов k независимых случайных величин $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + ... + \chi_k^2$, каждая из которых подчинена нормированному нормальному закону. Плотность вероятностей этой величины имеет вид:

$$f(w) = \begin{cases} 0 & при \quad w \le 0, \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} e^{-\frac{k}{2}} w^{\frac{k}{2}-1} & при \quad w > 0. \end{cases}$$

Кривые распределения χ^2 для различных значений k показаны на рисунке.



Здесь $\Gamma(x)$ - гамма - функция, k - число степеней свободы, $k = S - 1 - m$, где S – число разрядов (групп), на которые делится диапазон всех наблюдавшихся значений случайной величины, m – число параметров предполагаемого теоретического распределения (например, для нормального закона m=2).

Распределение χ^2, как видно, характеризуется одним параметром k – числом степеней свободы.

Можно показать, что закон распределения случайной величины W приближается к закону распределения χ^2 с S степенями свободы.

Для распределения χ^2 существуют специальные таблицы, в которых указана вероятность того, что случайная величина $W = \chi^2$ примет значение, не меньше, чем вычисленное по данным опытов число $w = \chi_q^2$.

Можно также сравнить наблюдаемые значения критерия χ_q^2 с, так называемыми, критическими точками распределения $\chi_{кр}^2$: если $\chi_q^2 < \chi_{кр}^2$ - нет оснований отвергать гипотезу, если $\chi_q^2 > \chi_{кр}^2$ - принятую гипотезу отвергают (см. Приложение 5).

Пример. Произведено 250 измерений с точностью до 1мк диаметра валиков, обработанных на токарном автомате. В таблице 8 приведены отклонения X от номинального размера, разбитые на интервалы по 5 мк в каждом, и числа деталей n_i, попадающих в указанные интервалы. Проверить статистическую гипотезу о нормальном распределении признака X в генеральной совокупности, используя критерий χ^2 Пирсона.

Таблица 8

Интервалы Δ, мк	0 - 5	5 – 10	10 –15	15 - 20	20 – 25
Среднее значение, мк	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5
n_i	15	75	100	50	10

1. По данным выборки методом произведений найдем оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:

$$\bar{x}_в = \frac{\sum x_i n_i}{n} = 11{,}8, \quad \sigma_* = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n}} = 4{,}691, \quad n = \sum n_i = 250.$$

Теоретические частоты для предполагаемого нормального распределения определяются по формуле

$$n_i' = \frac{n\Delta}{\sigma_0} \cdot \varphi(u_i),$$

где функция $\varphi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ табулирована (см.Приложение 1),

$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}$. Вычисления сведем в таблицу 9.

Таблица 9

x_i	n_i	$x_i - \overline{x}_в$	u_i	$\varphi(u_i)$	n'_i
2,5	15	- 9,3	- 1,98	0,0562	15
7,5	75	- 4,3	- 0,92	0,2613	69,6
12,5	100	0,7	0,15	0,3945	105,1
17,5	50	5,7	1,22	0,1895	50,5
22,5	10	10,7	2,28	0,0297	7,9

Определяем меру расхождения χ_q^2 (см. таблицу 10).

Таблица 10

n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
15	15	0	0	0
75	69,6	5,4	29,16	0,42
100	105,1	- 5,1	26,01	0,25
50	50,5	0,5	0,25	0,01
10	7,9	2,1	4,41	0,56
$\chi_q^2 = 1{,}24$				

При числе степеней свободы $K = S - 3 = 2$ и уровне значимости 0,05 по таблице Приложения 5 находим $\chi^2_{кр} = 6$. Так как наблюдаемое значение критерия $\chi^2_q = 1{,}24$ меньше $\chi^2_{кр} = 6$, гипотеза о соответствии данных наблюдений нормальному закону распределения признака в генеральной совокупности не опровергается.

Замечание. При применении критерия χ^2 Пирсона необходимо, чтобы как общее число значений признака *n*, так и числа наблюдений в отдельных разрядах n_i были достаточно велики. Практически необходимо, чтобы $n > 50 - 60$, а $n_i \ge 4 - 8$. Если какое-либо из n_i меньше установленного минимального значения, то один или несколько ближайших интервалов следует объединить. При этом соответственно уменьшится число степеней свободы *k*.

9.2. Критерий Колмогорова

В качестве меры расхождения между эмпирическим и теоретическим распределениями можно рассматривать максимум модуля разности между эмпирической и теоретической функциями распределения:

$$D_n = \max\left|F^*(x) - F(x)\right|.$$

А.Н.Колмогоровым было показано, что независимо от вида функции *F(x)* при неограниченном возрастании *n* (а практически при *n* не менее нескольких десятков) интегральная функция распределения случайной величины $\lambda_n = D_n / \sqrt{n}$ приближается к функции $K(\lambda) = \sum(-1)^m e^{-2m^2\lambda^2}$.

Обозначим конкретное значение λ_n, полученное в данной серии опытов, через λ_0. Тогда $P(\lambda_n \ge \lambda_0) = 1 - K(\lambda_0)$. Значения вероятности $P(\lambda_n)$ табулированы и приводятся в литературе.

Пусть, например, уровень значимости равен 0,01. Тогда, если $P(\lambda_n \ge \lambda_0) > 0{,}01$, то гипотеза о том, что X имеет функцию распределения $F(x)$, не противоречит опытным данным, и наоборот.

Критерий Колмогорова может быть использован также для решения вопроса о том, принадлежат ли две выборки объемов n_1 и n_2 одной генеральной совокупности.

При этом находят величину

$$D_{n_1,n_2} = \max\left|F_1^*(x) - F_2^*(x)\right|,$$

где $F_i^*(x)$ - эмпирические функции распределения 1-ой и 2-ой выборок соответственно (i=1,2), а величина λ определяется из выражения $\lambda_n = \dfrac{1}{\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} D_{n_1 n_2}$ и при $n \to \infty$ имеет асимптотической функцией распределения функцию $K(\lambda)$ критерия Колмогорова.

Замечание. Достоинством критерия Колмогорова является его простота, а недостаток состоит в том, что его можно применять только, если предполагаемая теоретическая функция распределения $F(x)$ полностью известна (то есть известен не только вид распределения, но и все входящие в него параметры).

Пример. Имеются две группы однородных деталей, изготовленных одним станком, по 60 штук в каждой. Результаты измерений длины X после группировки данных приведены в таблице 11.

Таблица 11

Длина деталей, Мм	n_i		$F_1^*(x)$	$F_2^*(x)$	$\left\|F_1^*(x) - F_2^*(x)\right\|$
	1-ая Группа	2-ая группа			
72	1	-	0,0167	-	0,0167
72,1	2	2	0 ,050	0,0333	0,0167
72,2	4	8	0,1167	0,1667	0,05

72,3	11	10	0,3	0,3333	0,0333
72,4	12	16	0,5	0,6	0,1
72,5	16	18	0,7667	0,9	0,1333
72,6	8	4	0,9	0,9667	0,0667
72,7	6	2	1,0	1,0	0

Проверить с помощью критерия Колмогорова гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной генеральной совокупности.

1. Эмпирические функции распределения $F_1^*(x)$ и $F_2^*(x)$ для каждой из групп строятся как нарастающие суммы относительных частот (см. таблицу 11).

2. Максимум модуля разности между ними, как видно из таблицы 11, равен $D_{n_1 n_2} = 0{,}1333$.

3. Определив $\lambda = D_{n_1 n_2}\sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$, где $n_1 = n_2 = 60$ и, следовательно, $\lambda = 0{,}73$, по таблице Приложения 6 для данного значения λ найдем соответствующее значение вероятности $P(\lambda) = 0{,}66089 > 0{,}01$.

Следовательно, при уровне значимости $0{,}01$ гипотеза о том, что обе выборки принадлежат одной генеральной совокупности, не опровергается.

10. ЭЛЕМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

Как известно, если величины X и $У$ связаны между собой функциональной зависимостью, то зная значение одной величины, можно точно указать значение другой. В теории вероятностей и в математической статистике рассматривается другой, более общий тип зависимости между величинами, а именно, так называемая статистическая (вероятностная) зависимость.

Статистической называется зависимость между переменными величинами X и $У$, при которой каждому значению одной величины X соответ-ствует определенное распределение другой величины $У$, зависящее от того, какое значение приняла величина X.

В частности, если при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой, то такая статистическая зависимость называется **корреля-ционной**.

Определение степени зависимости между случайными величинами по эмпирическим данным и является целью корреляционного анализа.

Для простоты будет рассмотрена зависимость между двумя случайными величинами. Если исследуется связь между несколькими случайными величинами, то говорят о множественной корреляции.

10.1. Корреляционная таблица

Пусть произведено достаточно большое число независимых опытов над системой случайных величин (X, $У$), причем одно и то же значение x_j наблюдалось n_{xj} раз ($j = 1, 2, ..., t$), одно и то же значение $y_i - n_{yi}$ раз ($i = 1, 2, \ldots, s$), каждая пара значений (x_i, y_j) наблюдалась n_{ij} раз (отдельные значения n_{ij} могут быть нулями). Данные таких опытов обычно группируют и записывают в виде так называемой корреляционной таблицы.

Корреляционная таблица для двух переменных в общем случае имеет вид:

Таблица 12

$Y \backslash X$	x_1	x_2	. . .	x_j	. . .	x_t	n_y
y_1	n_{11}	n_{12}	. . .	n_{1j}	.	n_{1t}	n_{y_1}
y_2	n_{21}	n_{22}	.	n_{2j}	.	n_{2t}	n_{y_2}
$\vdots$	.	.	.	.	.	.	.
y_i	n_{i1}	n_{i2}	.	n_{ij}	.	n_{it}	n_{y_i}
$\vdots$	.	.	.	.	.	.	.
y_s	n_{s1}	n_{s2}	.	n_{sj}	.	n_{st}	n_{y_s}
n_x	n_{x1}	n_{x2}	.	n_{xj}	.	n_{xt}	n

В первой строке таблицы 12 указаны наблюдавшиеся значения случайной величины X,, в первом столбце – все наблюдавшиеся значения Y. Если число их велико, то каждый из интервалов, в котором заключены наблюдавшиеся значения x_j и соответственно y_i делят на ряд частичных интервалов. Тогда значения x_j и y_i будут средними значениями в каждом частичном интервале.

Очевидно, сумма частот j-го столбца

$$n_{xj} = n_{1j} + n_{2j} + \ldots + n_{sj} = \sum_{i=1}^{s} n_{ij} .$$

Сумма частот i - ой строки $\quad n_{y_i} = \sum_{j=1}^{t} n_{ij}.$

Сумма всех частот (общее число наблюдений) равна

$$n=\sum_{j=1}^{t} n_{x_j}=\sum_{i=1}^{s} n_{y_i}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} n_{ij} \qquad (10.1)$$

и помещается в правом нижнем углу таблицы.

Общие средние арифметические переменных x и y равны соответственно

$$\bar{x}=\frac{\sum_{j=1}^{t} x_j n_{xj}}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} x_j n_{ij}}{n},$$

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{s} y_i n_{yi}}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} y_i n_{ij}}{n}.$$

Корреляционная таблица наглядно показывает распределение значения Y для каждого значения X (и наоборот) и является статистическим аналогом таблицы распределения вероятностей системы двух случайных величин.

Рассмотрим, например, распределение значений Y при $X=x_j$ (см. таблицу 13)

Таблица 13

Значения Y	y_1	y_2	. . .	y_i	. . .	y_s	Всего
Частоты	n_{1j}	n_{2j}	. . .	n_{ij}	. . .	n_{sj}	n_{xj}

Средняя арифметическая этого распределения называется **условной (групповой) средней** переменной Y для данного значения x_j и обозначается через $\bar{y}_j$. Очевидно, что

$$\bar{y}_j=\frac{\sum_{i=1}^{s} y_i n_{ij}}{n_{x_j}} \qquad (j=1,2,...,t) \qquad (10.2)$$

Каждому отдельному значению x_j переменной X соответствует вполне определенное значение условной средней $\bar{y}_j$ переменной Y, то есть

$\bar{y}_j = f(x)$. Следовательно, статистическая зависимость между $\bar{y}_j$ и X является корреляционной.

Аналогично, средняя арифметическая всех наблюдавшихся значений X при условии $Y = y_i$ называется условной (групповой) средней переменной X для данного значения y_i :

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{i=1}^{t} x_j n_{ij}}{n} \quad (i=1,2,...,s), \tag{10.3}$$

причем $\bar{x}_i = \varphi(y)$.

Условные средние являются статистическим аналогом условных математических ожиданий в теории вероятностей.

Уравнение $\bar{y}_j = f(x)$ называется **выборочным (или эмпирическим) уравнением регрессии *Y* на *X***, функция $f(x)$ называется **выборочной регрессией *Y* на *X***, а ее график – **выборочной линией регрессии *Y* на *X***. Аналогично, уравнение $\bar{x}_i = \varphi(y)$ называется выборочным уравнением регрессии X на Y; функция $\varphi(y)$ - выборочной регрессией X на Y, а ее график – выборочной линией регрессии X на Y.

Двумя основными задачами теории корреляции являются:

- изучение зависимости условных средних $\bar{y}_j$ от X (и соответственно x_i от Y), то есть установление вида функции регрессии,
- оценка силы (тесноты) корреляционной зависимости между величинами X и Y.

10.2. Отыскание приближенной линии регрессии по эмпирическим данным

Отметим, прежде всего, одно важное свойство линии регрессии. Можно показать, что справедлива следующая **теорема:** среднее значение суммы квадратов отклонений Δ величин y_i от выборочной линии регрессии $\bar{y}_j = f(x)$ меньше, чем от графика любой другой функции.

По опытным данным можно построить эмпирическую (“истинную”) линию регрессии, но она представляет собой ломаную линию, и уравнение её для практического использования непригодно. Поэтому обычно строят приближенную (теоретическую) линию регрессии того или иного вида, определяя неизвестные параметры этой функции из условия минимума Δ.

Можно показать, что если переменные X и Y представляют собой суммы большого числа независимых (или почти независимых) случайных величин, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью (если она вообще существует). Так как на практике именно этот случай реализуется чаще всего, то приближенную функцию регрессии ищут, как правило, в виде линейной функции $\bar{y} = h(x) = a\,x + в$. При этом задача сводится лишь к отысканию неизвестных параметров a и $в$. Это можно сделать различными способами. Наиболее распространенным из них, позволяющим получить в некотором смысле наилучшее приближение к экспериментальным данным, является метод наименьших квадратов.

10.3. Метод наименьших квадратов

Суть метода состоит в следующем: пусть известны результаты эксперимента (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . ,(x_n, y_n) и выбран с точностью до k неизвестных параметров вид функции

$$y = f\,(x, a_1,\ a_2,\ \ldots, a_k\,), \tag{10.4}$$

аппроксимирующей экспериментальные данные.

Согласно методу наименьших квадратов неизвестные параметры a_i выбираются так, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной

$$\sum_{i=1}^{k}\left[y_i - f\left(x_i, a_1, a_2, \ldots a_k\right)\right]^2 = \min\,. \tag{10.5}$$

Под отклонением понимается разность между наблюдавшимся значением y_i и расчетным значением y, вычисленным по уравнению (10.4) при $x{=}x_i$.

Для отыскания значений a_i, обеспечивающих минимум левой части уравнения (10.5), необходимо приравнять нулю производные по a_i. Тогда получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f\left(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_k\right)\right]\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial a_1}\right)_{x=x_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f\left(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_k\right)\right]\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial a_2}\right)_{x=x_i} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f\left(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_k\right)\right]\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial a_k}\right)_{x=x_i} = 0. \end{cases} \tag{10.6}$$

Здесь числа $\left(\dfrac{\partial f}{\partial a_i}\right)_{x=x_i}$ - значения частных производных функции по параметрам α_i в точке x_{i} . Число уравнений в системе (10.6) равно числу неизвестных параметров.

В интересующем нас случае функция $f\left(x_i, a_1, \ldots, a_k\right) = \bar{y} = h(x) = a\,x + в$ линейна и содержит два неизвестных параметра. Необходимыми условиями минимума суммы квадратов отклонений условных средних (то есть “истинной” линии регрессии) от приближенной функции регрессии являются условия

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial в} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\left(\bar{y}_j - a\,x_j - в\right)^2 n_{i\,j} = \frac{1}{n}\sum_{j}\left(\bar{y}_j - a\,x_j - в\right)^2 \cdot n_{x_j}.$$

В результате получим два линейных уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum_{j}\left(\bar{y}_j - a x_j - в\right) n_{x_j} = 0, \\ \dfrac{1}{n}\sum_{j}\left(\bar{y}_j - a\,x_j - в\right) x_j n_{x_j} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{t} x_j n_{x_j}}{n} a + \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{t} n_{x_j}}{n} в = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{t} \overline{y}_j n_{x_j}}{n}, \\ \\ \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{t} x_j^2 n_{x_j}}{n} a + \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{t} x_j n_{x_j}}{n} в = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{t} \overline{y}_j x_j n_{x_j}}{n}. \end{cases}$$

Так как

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t} x_j^2 n_{x_j} = \overline{x^2}, \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t} \overline{y}_j x_j n_{x_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t} y_i x_j n_{ij} = \overline{xy},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t} \overline{y}_j \cdot n_{x_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} y_j n_{ij} = \overline{y},$$

с учетом обозначений (10.1) , (10.2) можно записать

$$\begin{cases} \overline{x} \cdot a + в = \overline{y}, \\ \overline{x^2} \cdot a + \overline{x} \cdot b = \overline{xy}, \end{cases}$$

откуда следует:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \qquad в = \frac{\overline{x}^2 \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \tag{10.7}$$

Функция $\overline{y} = h(x) = a\,x + в$, коэффициенты которой определяются по формуле (10.7), называется **линейной среднеквадратической регрессией *Y* на *X***.

10.4. Выборочный коэффициент регрессии

Угловой коэффициент a прямой линии регрессии Y на X называется **выборочным коэффициентом регрессии *Y* на *X*** и обозначается через

$$\rho_{y/x} = a.$$

Уравнение линейной среднеквадратической регрессии Y на X можно записать теперь в виде

$$y - \overline{y} = \rho_{y/x}(x - \overline{x}).$$

Так как

$$\overline{\sigma}_x^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{t}\left(x_j - \overline{x}\right)^2 n_{x_j}}{n} = \frac{\sum\limits_j x_j^2 n_{x_j}}{n} - \frac{2\overline{x}\sum\limits_j x_j n_{x_j}}{n} + \frac{\overline{x}^2\sum\limits_j n_{x_j}}{n} =$$

$$= \overline{x^2} - 2\overline{x}\cdot\overline{x} + \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2,$$

то из первого выражения (10.7) следует

$$\rho_{y/x} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{\sigma}_x^2}. \tag{10.8}$$

Аналогично, уравнение линейной среднеквадратической регрессии X на Y имеет вид:

$$x - \overline{x} = \rho_{x/y}\left(y - \overline{y}\right),$$

где

$$\rho_{x/y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{\sigma}_y^2},$$

$\overline{\sigma}_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{s}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 n_{y_i}$ - выборочная дисперсия Y.

Замечание. В частном случае, когда все значения X и соответствующие им значения Y различны, а общее число опытов равно *n*, из условия минимума $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(a\,x_i + в\right)\right]^2$ получим

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]\cdot x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)] = 0. \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно *а* и *в*, найдем следующие выражения для коэффициентов уравнения регрессии:

$$a = \rho_{y/x} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \qquad в = \frac{\sum x_i^2 y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}.$$

10.5. Выборочный коэффициент корреляции

Умножим обе части равенства (10.8) на дробь $\overline{\sigma}_x / \overline{\sigma}_y$ и обозначим полученное выражение через

$$r_в = \rho_{y/x} \frac{\overline{\sigma}_x}{\overline{\sigma}_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{\sigma}_x \overline{\sigma}_y}. \tag{10.9}$$

Величина $r_в$ называется **выборочным (эмпирическим) коэффициентом корреляции** и применяется в статистике в качестве точечной оценки теоретического коэффициента корреляции $r = \dfrac{M(xy) - M(x)M(y)}{\sigma_x \sigma_y}$ при ограниченном объеме опытных данных.

Выборочный коэффициент корреляции является мерой тесноты линейной корреляционной зависимости между случайными величинами X и Y.

Из (10.9) следует, что

$$\rho_{y/x} = r_в \frac{\overline{\sigma}_y}{\overline{\sigma}_x}. \tag{10.10}$$

Поэтому уравнение линейной среднеквадратической зависимости Y от X можно записать в виде:

$$y - \overline{y} = r_в \frac{\overline{\sigma}_y}{\overline{\sigma}_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

или в более симметричной форме

$$\frac{y - \overline{y}}{\overline{\sigma}_y} = r_в \frac{x - \overline{x}}{\overline{\sigma}_x}.$$

Аналогично, выборочный коэффициент регрессии X на Y равен

$$\rho_{x/y} = r_в \frac{\overline{\sigma}_x}{\overline{\sigma}_y}, \tag{10.11}$$

а уравнение регрессии X на Y записывается в виде

$$x-\overline{x}=r_в\frac{\overline{\sigma}_x}{\overline{\sigma}_y}\left(y-\overline{y}\right) \qquad \text{или} \qquad \frac{x-\overline{x}}{\overline{\sigma}_x}=r_в\frac{y-\overline{y}}{\overline{\sigma}_y}.$$

Из (10.10), (10.11) следует, что знак $r_в$ совпадает со знаками коэффициентов регрессии. Но так как регрессии одного знака, то $\rho_{y/x}\rho_{x/y}>0$ и поэтому $r_в=\pm\sqrt{\rho_{y/x}\cdot\rho_{x/y}}$, то есть выборочный коэффициент корреляции равен среднему геометрическому из коэффициентов регрессии и имеет знак последних.

Свойства коэффициента корреляции

1. Если между величинами X и Y существует линейная функциональная связь

$$y=ax+в \qquad \left(a=\rho_{y/x}\geq 0\right),$$

то $r_в=\pm 1$.

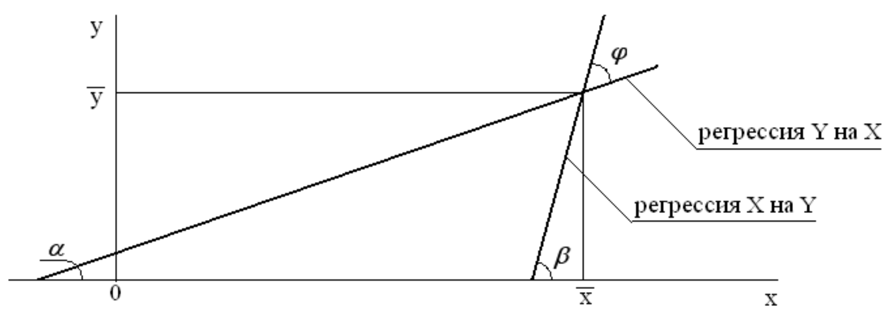
Действительно, $r_в=\rho_{y/x}\dfrac{\overline{\sigma}_x}{\overline{\sigma}_y}$, $\overline{\sigma}_y^2=\overline{y^2}-\overline{y}^2$,

Но $\overline{y^2}=\overline{(ax+в)^2}=a^2\overline{x^2}+2ав\overline{x}+в^2$, а $\overline{y}^2=\left(a\overline{x}+в\right)^2=a^2\overline{x}^2+2ав\overline{x}+в^2$.

Следовательно, $\overline{\sigma}_y^2=a^2\left(\overline{x^2}-\overline{x}^2\right)=a^2\overline{\sigma}_x^2$ и $r_в=a\dfrac{\overline{\sigma}_x}{|a|\,\overline{\sigma}_x}=\dfrac{a}{|a|}=\pm 1.$

Равенство $r_в=\pm 1$ является необходимым и достаточным условием ли-нейной функциональной связи между величинами X и $У$.

2. Чем больше угол между линиями регрессии $У$ на X и X на $У$, тем меньше $r_в$. Это наглядно иллюстрируется рисунком.



Очевидно, $\rho_{y/x} = tg\alpha$, $1/\rho_{y/x} = tg\beta$, следовательно,

$$tg\varphi = tg(\beta - \alpha) = \frac{1/\rho_{x/y} - \rho_{y/x}}{1 + \rho_{y/x}/\rho_{x/y}} = \frac{1 - r_в^2}{\rho_{x/y} + \rho_{y/x}}.$$

Итак, с уменьшением $r_в$ увеличивается $tg\varphi$.

При $\varphi = 0$ $\rho_{y/x} = 1/\rho_{x/y}$, $r_в = \pm 1$, и линии регрессии совпадают между собой и с прямой линейной функциональной зависимости.

3. При $r_в = 0$ отсутствует линейная корреляционная зависимость между X и Y. Отметим, что при этом может существовать нелинейная связь между X и Y (корреляционная или функциональная).

4. Если коэффициент корреляции $r_в$ определен по выборке объема n из неограниченной генеральной совокупности, то можно считать коэффициент корреляции генеральной совокупности приближенно равным $r_в$. При этом средняя квадратичная ошибка будет равна

$$\sigma_r = \frac{1 - r_в^2}{\sqrt{n}}.$$

При достаточно большом n (практически при $n > 50$) для оценки коэффициента корреляции нормально распределенной генеральной совокупности можно пользоваться формулой $(r_в - 3\sigma_r \le r \le r_в + 3\sigma_r)$.

10.6. Методика вычисления $r_в$ и построения линии регрессии

Методику вычислений $r_в$ рассмотрим на конкретном примере.

Пример. Результаты измерений угловых колебаний ведущего моста автомобиля X и угловых колебаний подрессоренной массы (галопирование) Y сведены в корреляционную таблицу 14. Найти уравнение линейной среднеквадратической регрессии Y на X, установить тесноту связи между признаками. Для каждого интервала значений X вычислить фактические значения условных средних $\bar{y}_i$ и их значения по уравнению регрессии.

Расчет может быть значительно упрощен, если перейти от величин X и Y к условным вариантам по формулам

$$u_j = \frac{x_j - C_1}{h_1}, \qquad v_i = \frac{y_i - C_2}{h_2}.$$

Легко убедиться в том, что при этом

$$\overline{\sigma}_x = h_1\overline{\sigma}_u, \qquad \overline{\sigma}_y = h_2\overline{\sigma}_v, \qquad \overline{x} = h_1\overline{u} + C_1, \qquad \overline{y} = h_2\overline{v} + C_2,$$

$$\overline{xy} = h_1 h_2 \overline{uv} + C_2 h_1 \overline{u} + C_1 h_2 \overline{v} + C_1 C_2.$$

Поэтому выборочный коэффициент корреляции $r_в$ в новых обозначениях не меняется по величине и будет равен

$$r_в = \frac{\overline{uv} - \overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{\sigma}_u\overline{\sigma}_v}.$$

Трудоемкость расчета связана с вычислением $\overline{uv}.$ Для составления корреляционной таблицы в условных вариантах добавим к исходной корреляционной таблице (поле которой выделено толстыми линиями) дополнительные строки u_j, $\sum_i n_{uv} v_i$, $u_j \sum_i n_{uv} v_i$ и столбцы v_i, $\sum_j n_{uv} u_j$, $v_i \sum_j n_{uv} u_j$.

В качестве ложного нуля C_1 для X примем находящуюся примерно в середине вариационного ряда для X величину $C_1 = 15\cdot 10^{-3}$, аналогично принимаем $C_2 = 13{,}2\cdot 10^{-3}$. Шаг h_k $(k = 1{,}2)$ равен разности между двумя

соседними вариантами: $h_1 = 6$, $h_2 = 5{,}6$. Легко показать, что суммы элементов нижней строки и правого столбца равны между собой:

$$\sum_j u_j \sum_i n_{uv} v_i = \sum_i v_i \sum_j n_{uv} u_j = n\overline{uv}.$$

$n\overline{uv}$ целесообразно вычислять по обеим формулам. Их совпадение должно свидетельствовать о правильности вычислений.

Таблица 14

		u	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3			
V	$y \cdot 10^3$	$x \cdot 10$	(-12)-(-6)	(-6)-0	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36	$n_y = n_v$	$\sum_j n_{uv} u_j$	$v_i \sum_j n_{uv} u_j$
			-9	-3	3	9	15	21	27	33			
-4	-12 – (-6,4)	-9,2						2	1		3	4	-16
-3	-6,4 – (-0,8)	-3,6				1	1	3		1	6	5	-15
-2	-0,8 – 4,8	2,0			1	1	3	6	2		13	7	-14
-1	4,8 – 10,4	7,6		1	2	2	4	5			14	-4	4
0	10,4 – 16,0	13,2	1	1	2	3	3	5		1	16	-6	0
1	16,0 – 21,6	18,8	1	1	3	5	5	4	1		20	-12	-12
2	21,6 – 27,2	24,4		3	6	7	2	2	1	1	22	-21	-42
3	27,2 – 32,8	30,0	2			3		1			6	-10	-30
	$n_x = n_u$		4	6	14	22	18	28	5	3	100		
	$\sum_i n_{uv} v_i$		7	6	11	21	-4	-23	-5	-1			
	$u_j \sum_i n_{uv} v_i$		-28	-18	-22	-21	0	-23	-10	-3			-125

Величины $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\sigma}_u, \bar{\sigma}_v$ при большом числе наблюдений подсчитываются методом произведений, а при сравнительно малом числе наблюдений - непосредственно, исходя из определения этих величин по формулам:

$$\bar{u} = \frac{\sum_j u_j n_u}{n} = \frac{(-4)\cdot 4 + (-3)\cdot 6 + (-2)\cdot 14 + (-1)\cdot 22 + 1\cdot 28 + 2\cdot 5 + 3\cdot 3}{100} = -0{,}37,$$

$$\bar{v} = \frac{\sum_i v_i n_v}{n} = \frac{(-4)\cdot 3 + (-3)\cdot 6 + (-2)\cdot 13 + (-1)\cdot 14 + 1\cdot 20 + 2\cdot 22 + 3\cdot 6}{100} = 0{,}12,$$

аналогично

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n}\sum_j u_j^2 n_u = 2{,}71, \qquad \overline{v^2} = \frac{1}{n}\sum_i v_i^2 n_v = 3{,}30,$$

$$\bar{\sigma}_u = \sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = \sqrt{2{,}71 - (-0{,}37)^2} = 1{,}60; \qquad \bar{\sigma}_v = \sqrt{\overline{v^2} - \bar{v}^2} = \sqrt{3{,}30 - 0{,}12^2} = 1{,}81.$$

Искомый коэффициент корреляции равен

$$r_в = \frac{\overline{uv} - \bar{u}\cdot\bar{v}}{\bar{\sigma}_u \bar{\sigma}_v} = \frac{-1{,}25 - (-0{,}37)\cdot 0{,}12}{1{,}60\cdot 1{,}81} = -0{,}416.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$\bar{x} = h_1 u + C_1 = [6(-0{,}37) + 15]\cdot 10^{-3} = 12{,}78\cdot 10^{-3},$$
$$\bar{y} = h_2 v + C_2 = (5{,}6\cdot 0{,}12 + 13{,}2)\cdot 10^{-3} = 13{,}87\cdot 10^{-3},$$

$$\bar{\sigma}_x = h_1\bar{\sigma}_u = 6\cdot 1{,}60\cdot 10^{-3} = 9{,}60\cdot 10^{-3}; \qquad \bar{\sigma}_y = h_2\bar{\sigma}_v = 5{,}6\cdot 1{,}81\cdot 10^{-3} = 10{,}14\cdot 10^{-3}.$$

Приближенное (теоретическое) уравнение линейной регрессии примет вид

$$y - 13{,}87\cdot 10^{-3} = -0{,}416\cdot\frac{10{,}14\cdot 10^{-3}}{9{,}6\cdot 10^{-3}}\left(x - 12{,}78\cdot 10^{-3}\right)$$

или окончательно

$$y = -0{,}44x + 19{,}49\cdot 10^{-3}. \qquad (10.12)$$

Фактические значения условных средних, вычисленные по данным корреляционной таблицы, равны:

$$\bar{y}_{x=-9} = \frac{13{,}2 + 18{,}8 + 2\cdot 30}{4} = 23,$$

$$\overline{y}_{x=-3} = \frac{7{,}6 + 13{,}2 + 18{,}8 + 3 \cdot 24{,}4}{6} = 18{,}8.$$

Аналогично

$$\overline{y}_{x=3} = 17{,}6, \quad \overline{y}_{x=9} = 18{,}55, \quad \overline{y}_{x=15} = 13{,}62,$$
$$\overline{y}_{x=21} = 8{,}6, \quad \overline{y}_{x=27} = 7{,}6, \quad \overline{y}_{x=33} = 11{,}33.$$

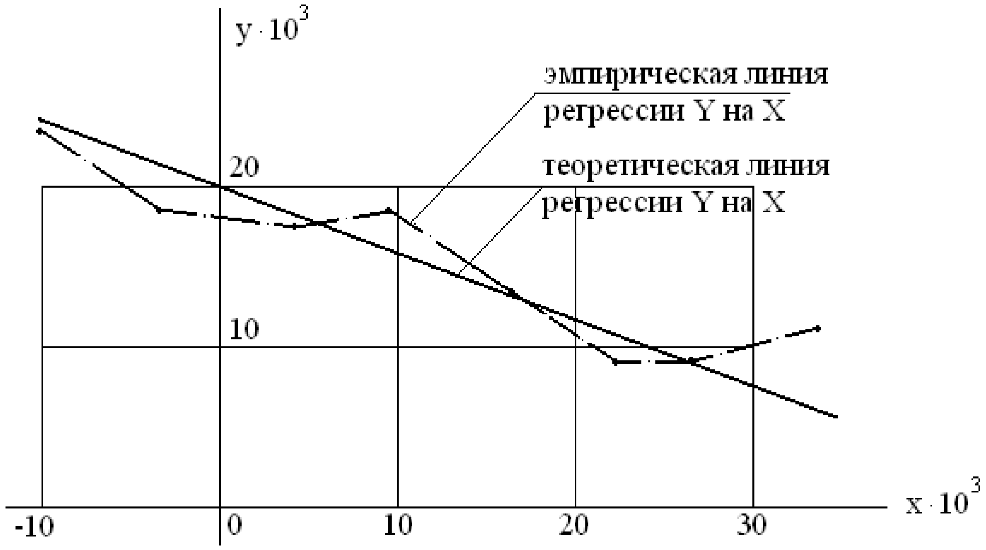
Эти значения, а также условные средние, найденные по уравнению регрессии (10.12) при $x = x_j$, приведены ниже в таблице 15:

Таблица 15

	-9	-3	3	9	15	21	27	33
По данным корреляционной таблицы	23	18,80	17,6	18,55	13,62	8,60	7,60	11,33
По уравнению регрессии	23,45	20,81	18,17	15,53	12,89	10,25	7,61	4,97

Как видно из таблицы, согласование фактически наблюдавшихся и расчетных условных средних удовлетворительное.

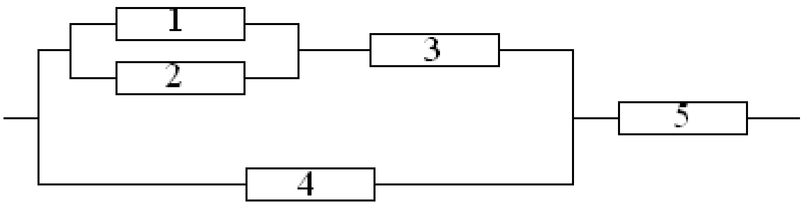
Эмпирическая и приближенная (теоретическая) линии регрессии Y на X показаны на рисунке.



РАСЧЕТНО–ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВАРИАНТ 1

1. В урне 4 черных, 6 белых и 5 красных шаров. Наудачу извлечены 7 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажутся 2 черных, 3 белых и 2 красных шара.
2. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует его внимания, равна 0,2; второй - 0,25, третий - 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены внимания рабочего потребуют какие-либо два станка; все три станка.
3. Вероятности безотказной работы элементов электрической цепи равны соответственно $P_1 = 0{,}98$; $P_2 = 0{,}93$; $P_3 = 0{,}85$; $P_4 = 0{,}90$; $P_5 = 0{,}95$. Найти вероятность отказа цепи.



4. Три станка подают детали в общий бункер. Вероятность выпуска бракованной продукции для первого станка 0,03, для второго - 0,02 и для третьего - 0,01. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а производительность третьего в два раза больше, чем у второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь из бункера окажется годной?
5. Вероятность надежной работы конструкции при приложении расчетной нагрузки равна 0,96. Найти вероятность того, что из 10 конструкций, испытанных независимо друг от друга, больше двух выйдут из строя.
6. Вероятность выхода из строя каждого из 900 независимо работающих элементов некоторого узла в течение заданного времени равна 0,1. Найти вероятность того, что по истечении заданного времени будут работать 800 элементов; будут работать от 800 до 850 элементов.
7. В бригаде 8 рабочих, из них 5 учатся. Наудачу по списку отобраны 3 человека. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа рабочих, которые учатся, среди рабочих.
8. Случайная величина X задана рядом распределения

X	-1	0,7	1,5	4
P	0,2	0,4	0,1	…

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X^2 - 1{,}5X$.

9. Завод отправил на базу 2000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,0015. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено: хотя бы одно изделие; не более одного изделия.
10. Плотность вероятностей случайной величины X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ (2a - x)/2a^2 & \text{при} \quad 0 < x < 2a, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2a. \end{cases}$$

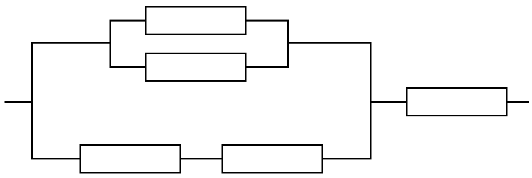
Найти интегральную функцию распределения *F(x)*, *M(X),* *D*(*X*) и ве-

роятность *P(a<X<1,5a).*

11. Диаметр детали - нормально распределенная случайная величина с параметрами: $a = 75$ мм, $\sigma = 2$ мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой из партии детали составит от 74 мм до 76,4 мм; отличается от "a" не более, чем на 1,4 мм. Какое отклонение диаметра от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,92? В каком интервале с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных деталей ?

ВАРИАНТ 2

1. В партии из 7 деталей 5 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Какова вероятность того, что среди них 2 детали стандартны?
2. В поисках нужной книги студент опрашивает 3-х товарищей. Вероятности получить нужную книгу у 1-го, 2-го, 3-го товарищей соответственно равны 0,3, 0,4, 0,5. Определить вероятность того, что студент получит книгу у одного из товарищей.
3. Вероятность работы каждого из независимо работающих элементов электрической цепи $p = 0{,}95$. Найти вероятность работы цепи.



4. Часы изготавливаются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 40% всей продукции, второй - 35%, третий - 25%. Из продукции первого завода спешат 10 % часов, у второго – 15 %, у третьего – 20 %. Какова вероятность того, что купленные часы спешат?
5. Вероятность выхода из строя конструкции при приложении расчетной нагрузки 0,05. Какова вероятность того, что из восьми конструкций, испытанных независимо друг от друга, не менее шести выдержат нагрузку ?
6. Произведено 100 выстрелов, вероятность попадания при одном выстреле – 0,95. Найти вероятность того, что попали 96 раз; не менее 96 раз.
7. Устройство состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,2. Составить закон распределения случайной величины X - числа работающих элементов в одном опыте.
8. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределения. Найти дисперсию случайной величины $Z = 3X^2 + 2Y$.

X	0,4	0,6	1,25	2
P	0,25	0,15	0,2	…

Y	0,5	1,5	2
P	0,4	0,1	…

9. Завод отправил на базу 2000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что будет повреждено не более трех изделий.
10. Плотность вероятностей случайной величины X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1, \\ c(x^2 - 1) & \text{при} \quad 1 < x < 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

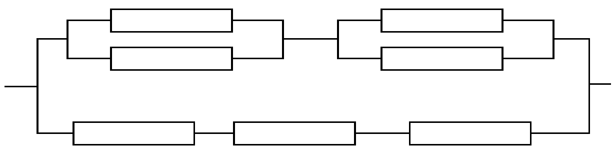
Найти коэффициент *"c"*, интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(1,5<X<2)$.

11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием

(проектная длина) $a = 120$ мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 116,5 мм и не более 123,5 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали меньше 117,2 мм. Какое отклонение длины детали от математического ожидания можно гарантировать с вероятностью 0,99?

ВАРИАНТ 3

1. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных окажутся три женщины.
2. Вероятности того, что нужная сборщику деталь содержится в первом, втором, третьем или четвертом ящиках соответственно равны: 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что нужная деталь содержится не менее чем в двух ящиках.
3. Найти вероятность безотказной работы электрической цепи, состоящей из независимо работающих элементов, если вероятность работы каждого элемента равна $P=0,9$.



4. На автобазе имеется 80 грузовых и 20 легковых автомашин. Вероятность того, что грузовая машина неисправна, равна 0,08, а легковая - 0,05. Найти вероятность того, что наудачу по номеру вызванная автомашина окажется исправной.
5. Произведено 12 независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,85. Найти вероятность того, что будет не менее двух промахов в цель.
6. Событие B появится в том случае, если событие A наступит не менее 150 раз. Найти вероятность появления события B, если произведено 200 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,7.
7. На складе имеются 8 покрышек, из них 3 - изношенных. Наудачу отобраны 3 покрышки. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа годных покрышек среди отобранных.
8. Случайная величина X задана рядом распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $Z = 2X - 3X^2$.

X	-0,3	0,5	1	2
P	0,2	0,2	0,25	…

Завод отправил на базу 1000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено ровно три изделия; менее трех.

9. Плотность вероятностей случайной величины X равна

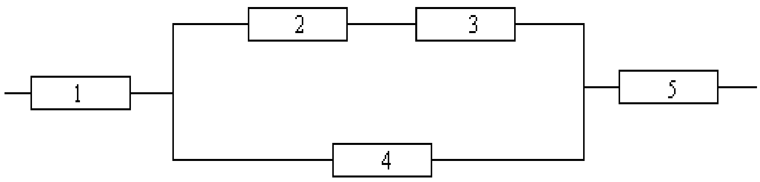
$$f(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x<1, \\ a(x-1) & \textit{при} \quad 1<x<3, \\ 0 & \textit{при} \quad x>3. \end{cases}$$

Найти коэффициент "a", интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(1<X<1,5)$.

11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) $a=135$ мм. Фактическая длина изготовленных деталей $131< X < 139$ мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали меньше 133 мм. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью $0,96$? В каких пределах с вероятностью $0,9973$ будут заключены длины изготовленных деталей?

ВАРИАНТ 4

1. В группе 16 студентов, среди которых 4 отличника. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 3 отличника.
2. ОТК проверяет изделия на соответствие стандарту. Вероятность того, что первое изделие стандартно, равна 0,8, второе - 0,9, третье - 0,95. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только одно стандартно; хотя бы одно стандартно.
3. Электрическая цепь состоит из последовательно и параллельно соединенных элементов, работающих независимо. Вероятности работы каждого из элементов равны $P_1=0,95$, $P_2=0,90$, $P_3=0,85$, $P_4=0,75$, $P_5=0,80$. Найти вероятность работы цепи.



4. В первой урне 10 шаров, из них 8 белых; во второй - 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих шаров взяли один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.
5. Вероятность безотказной работы каждого из семи независимо работающих элементов некоторого устройства равна 0,85. Найти вероятность того, что выйдут из строя не более трех элементов.
6. Испытывается каждый из 120 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти вероятность того, что выдержат испытание ровно 110 элементов; более 110 элементов.
7. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки.
8. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределения

X	-2	0,5	1	3
P	0,2	0,4	0,1	…

Y	-3	2	4
P	0,3	0,2	…

Найти дисперсию случайной величины $Z = 2X^2 - 1{,}5Y$.

9. Автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 500 деталей окажется хотя бы одна бракованная; не более одной бракованной.
10. Плотность вероятностей случайной величины X равна

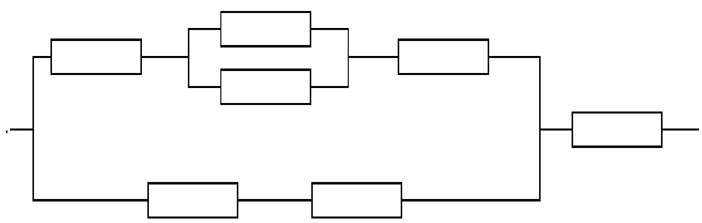
$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0, \\ cx^3 & при \quad 0 < x < 1, \\ 0 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти коэффициент "c", интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(0{,}5<X<1)$.

11. Диаметр детали - нормально распределенная случайная величина X с параметрами: $a=70$ мм, $\sigma=1{,}8$ мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали из партии составит от 69 мм до $70{,}9$ мм; отличается от "a" не более, чем на $1{,}5$ мм. Какое отклонение диаметра от "a" можно гарантировать с вероятностью $0{,}93$? В каком интервале с вероятностью $0{,}9973$ будут заключены диаметры изготовленных деталей?

ВАРИАНТ 5

1. В ящике 10 деталей, среди которых 7 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что 2 детали среди извлеченных окажутся окрашенными.
2. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что одно из трех наудачу взятых изделий окажется высшего сорта, равна 0,85, другое - 0,95, третье - 0,75. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий не менее двух будут высшего сорта.
3. Найти вероятность безотказной работы электрической цепи, изображенной на рисунке, если вероятность отказа каждого из независимо работающих элементов равна 0,15.



4. Три цеха производят одинаковые детали, которые поступают на общую сборку. Вероятность изготовления стандартной детали в первом цехе - 0,93, во втором - 0,88, в третьем - 0,85. Первый цех имеет три технологические линии, второй - две, третий - одну (линии одинаковой производительности). Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь на сборке окажется нестандартной.
5. Вероятность выхода из строя каждого из 9 независимо работающих элементов некоторого узла в течение времени t равна 0,1. Найти вероятность того, что по истечении времени t будут работать не менее 7 элементов.

6. Электрическая цепь состоит из 100 параллельно включенных потребителей. Вероятность надежной работы каждого из них 0,9, а взаимное влияние в цепи отсутствует. Найти вероятность того, что откажет менее 5% от общего числа потребителей; ровно 5% потребителей.
7. В комплекте из 12 изделий имеются 8 изделий первого сорта и 4 второго. Наудачу отобраны 3 изделия. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа изделий второго сорта среди отобранных.
8. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $Z = 2X^2 + 3X + 1$.

X	-2	0,5	1	3
P	0,2	0,4	0,1	…

9. Коммутатор учреждения обслуживает 200 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Найти вероятность того, что в течение одной минуты позвонит хотя бы один абонент; не более одного абонента.
10. Плотность вероятностей случайной величины X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0, \\ b\cos 3x & при \quad 0 < x < \pi/6, \\ 0 & при \quad x > \pi/6. \end{cases}$$

Найти коэффициент “b”, интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(0<X<\pi/12)$.

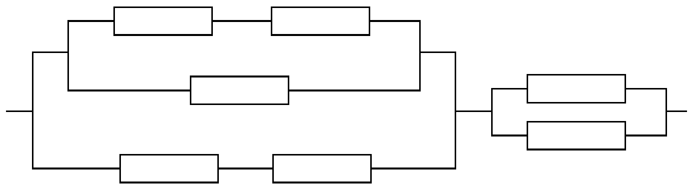
11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) a=125 мм. Фактическая длина изготовленных деталей 122,4<X<127,6 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали меньше 123,4 мм. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,98?

ВАРИАНТ 6

1. На складе имеются 10 покрышек, из них 2 изношенных. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 5 покрышек окажутся 4 годных.
2. Неисправность может возникнуть в одном из 4-х блоков устройства. Вероятность возникновения неисправности в первом блоке равна 0,20,

во втором - 0,15, в третьем и в четвертом - 0,10. Найти вероятность появления неисправности только в одном блоке; хотя бы в одном блоке.

3. Найти вероятность работы электрической цепи, изображенной на рисунке, если вероятность отказа каждого из независимо работающих элементов равна 0,1.



4. На сборке находятся детали, изготовленные на 3-х конвейерах, причем деталей, изготовленных на первом конвейере вдвое больше, чем изготовленных на втором конвейере и в 1,5 раза больше, чем изготовленных на третьем. Вероятности того, что деталь высокого качества, равны 0,8 для первого конвейера, 0,75 - для второго конвейера и 0,7 для третьего. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь на сборке будет высокого качества.
5. Произведено 10 выстрелов, вероятность попадания при одном выстреле 0,9. Найти вероятность не менее 8 попаданий.
6. Автотранспортное предприятие имеет 180 автобусов. Вероятность выхода на линию каждого автобуса равна 0,9. Найти вероятность нормальной работы предприятия в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее 160 автобусов, ровно 160 автобусов.
7. Найти закон распределения дискретной случайной величины X - числа появлений шестерки при четырех подбрасываниях игральной кости.
8. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределения

X	2	2,5	3	4
P	0,1	…	0,3	0,2

Y	0,8	1,4	2
P	0,3	0,5	…

Найти дисперсию случайной величины $Z = 3X - 2Y^2$.

9. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение одной минуты позвонят менее трех абонентов.
10. Плотность вероятностей случайной величины X равна

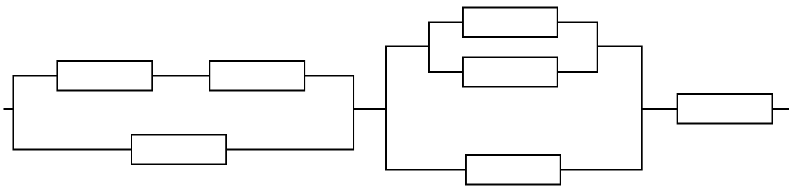
$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0, \\ ax & при \quad 0<x<1, \\ a(2-x) & при \quad 1<x<2, \\ 0 & при \quad x>2. \end{cases}$$

Найти коэффициент “a”, интегральную функцию распределения *F(X), M(X)*, *D(X)* и вероятность *P(0,5<X<1,5)*.

11. На станке изготавливается деталь. Ее длина X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=21{,}0$ см, σ=1,2 см. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 20 и 21,9 см. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,90; 0,98 ? В каких пределах, симметричных относительно "a", будут лежать практически все размеры деталей?

ВАРИАНТ 7

1. В комплекте 12 деталей 1-го сорта и 6 - второго. Наудачу вынимаются 4 детали. Найти вероятность того, что среди них окажутся 3 детали первого сорта.
2. В урне 5 белых и 4 красных шара, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров будет не менее двух красных.
3. Найти вероятность безотказной работы электрической цепи, состоящей из независимо работающих элементов, если вероятность работы каждого элемента равна 0,98.



4. Комплект состоит из 16 деталей завода № 1, 12 деталей завода № 2 и 22 деталей завода № 3. Вероятности того, что деталь низкого качества соответственно равны 0,08 для первого завода, 0,06 - для второго завода и 0,1 для третьего. Найти вероятность того, что наудачу вынутая деталь из комплекта будет высокого качества.
5. Событие B появится в том случае, если событие A наступит не менее двух раз. Найти вероятность появления события B, если произведено

шесть независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,4.

6. Автобаза обслуживает 140 магазинов. От каждого из них заявка на автомашины на следующий день может поступить с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что поступит не менее 110 и не более 120 заявок; ровно 110 заявок.
7. В команде 9 спортсменов, из них 4 - первого разряда и 5 - второго. Наудачу отобраны 3 спортсмена. Найти ряд распределения дискретной случайной величины X - числа спортсменов второго разряда среди отобранных.
8. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0,8	1,4	2
P	0,3	0,5	…

Найти $M(2X^2+1{,}2X)$ и $D(2X^2+1{,}2X)$.

9. Коммутатор учреждения обслуживает 200 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение минуты позвонят более двух абонентов.
10. Плотность вероятностей случайной величины X равна

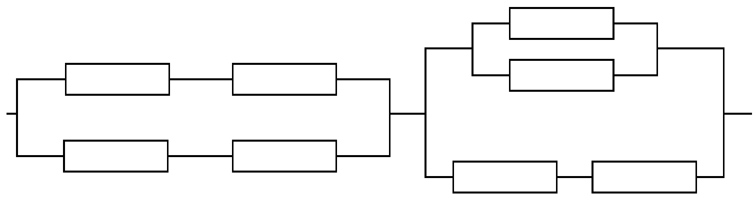
$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ c\cdot\sin 2x & \text{при} \quad 0<x<\pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad x>\pi/2. \end{cases}$$

Найти коэффициент “c”, интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(\pi/6<X<\pi/3)$.

11. На станке изготавливается деталь. Ее длина X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=23{,}0$ см, $\sigma=$ $=1{,}6$ см. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 22 и 24,2 см. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,92; 0,98? В каких пределах, симметричных относительно "a", будут лежать практически все размеры деталей?

ВАРИАНТ 8

1. В партии 8 изделий первого сорта и 7 второго. Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных 6 изделий окажутся 3 изделия первого сорта.
2. В урне 7 белых и 5 красных шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу извлекаются 4 шара. Найти вероятность того, что среди них будет не менее трех красных.
3. Найти вероятность работы электрической цепи, изображенной на рисунке, если вероятность отказа каждого из независимо работающих элементов равна 0,1.



4. В коробке 10 деталей завода № 1, 15 деталей завода № 2 и 25 деталей завода №3. Вероятности того, что деталь высокого качества равны соответственно 0,95 для первого завода, 0,85 для второго и 0,7 для третьего. Найти вероятность того, что наудачу вынутая деталь из коробки будет высокого качества.
5. Испытывается каждый из 12 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которое выдержит испытание и его вероятность; вероятность того, что выдержат испытание более 9 элементов.
6. Две равносильные ЭВМ играют шахматный матч. Что вероятнее: выиграть (ничейный результат исключается) не менее двух партий из четырёх, от 20 до 30 партий из 40 или ровно 20 партий из 40 ?
7. Написать закон распределения числа появлений герба при четырех подбрасываниях монеты.
8. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределения

X	-2	0,8	1,5	2
P	0,4	0,15	0,2	…

Y	-1	1	1,5
P	0,2	0,5	…

Найти дисперсию случайной величины $Z = Y^2 - 2X^2$.

9. Учебник издан тиражом 200000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,00001. Найти вероятность

того, что тираж содержит ровно две бракованные книги; не более двух бракованных книг.

10. Плотность вероятностей случайной величины X равна

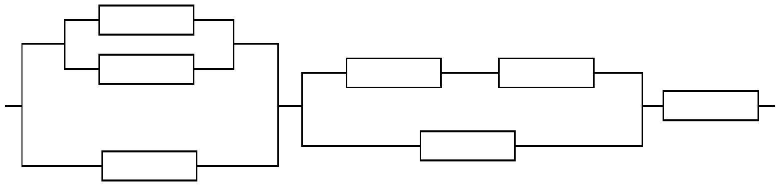
$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0, \\ a\cdot\cos 2x & при \quad 0<x<\pi/4, \\ 0 & при \quad x>\pi/4. \end{cases}$$

Найти коэффициент “a”, интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(0<X<\pi/6)$.

11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) a=145 мм. Фактическая длина изготовленных изделий 140,5<X<149,5 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 147,7 мм. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,94?

ВАРИАНТ 9

1. Среди 17 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрываются 7 билетов, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки?
2. В урне 4 белых и 6 красных шаров. Наудачу извлекаются 3 шара. Найти вероятность того, что среди них окажется менее двух красных шаров.
3. Найти вероятность безотказной работы электрической цепи, состоящей из независимо работающих элементов, если вероятность работы каждого элемента равна 0,95.



4. Два завода выпускают одинаковые изделия. Вероятность брака для 1-го завода равна 0,05, для 2-го - 0,10. Первый завод имеет два конвейера; второй - один конвейер. Детали с заводов поступают на склад. Найти вероятность того, что наудачу взятая на складе деталь будет годной.
5. Электрическая цепь состоит из 7 параллельно включенных потребителей. Вероятность надежной работы каждого из них 0,9, а взаимное

влияние в цепи отсутствует. Найти вероятность того, что откажет менее половины потребителей .

6. Что вероятнее - выиграть у равносильного противника (ничейный результат исключается) не менее трех партий из пяти, не менее 30 партий из 50 или ровно 30 партий из 50?
7. В команде 11 спортсменов, из них 7 первого разряда и 4 второго. Наудачу выбраны 3 спортсмена. Найти ряд распределения дискретной случайной величины X - числа спортсменов первого разряда среди отобранных.
8. Случайная величина X задана рядом распределения

X	-2	1,2	1,5	3
P	0,2	0,15	0,4	…

Найти $M(2X^2 - X)$ и $D(2X^2 - X)$.

9. При штамповке металлических клемм получается в среднем 98% годных. Какова вероятность того, что среди 200 клемм будут две; более двух бракованных?
10. Плотность вероятностей случайной величины X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ a \cdot \sin x & \text{при} \quad 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

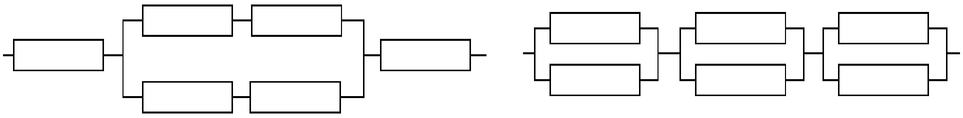
Найти коэффициент "a", интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(0<X<2\pi/3)$.

11. На станке изготавливается деталь. Ее длина X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a=22,0 см, σ= =1,4 см. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 20 и 24,1 см. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,90; 0,95? В каких пределах, симметричных относительно "a", будут лежать практически все размеры деталей?

ВАРИАНТ 10

1. Бригада рабочих, состоящая из 6 сборщиков и 10 разнорабочих, произвольным образом делится на 2 равные группы. Какова вероятность того, что в каждой группе окажется одинаковое число сборщиков?
2. В урне 7 черных и 5 желтых шаров. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 4-х шаров окажется более 2-х желтых.

3. Вероятность работы каждого элемента P=0,9. Определить, какая из двух электрических цепей надежнее.



4. Три станка штампуют однотипные детали. Первый вырабатывает 45% всех деталей, второй - 35%, третий - 20%. При этом каждый из станков штампует нестандартных деталей в среднем соответственно 2,5%; 2%; 1,5%. Найти вероятность того, что наудачу взятая со склада деталь стандартна.
5. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой машины равна 0,8. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее 9 автомашин.
6. Пусть вероятность того, что наудачу взятая деталь нестандартна, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди 200 взятых наудачу деталей окажется не более 20 нестандартных; ровно 20 нестандартных деталей.
7. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,4. Производится четыре выстрела. Составить закон распределения числа попаданий.
8. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределения

X	2	3	1,5
P	0,35	0,25	…

Y	-2	0,6	1,5	2
P	0,15	0,5	0,15	…

Найти дисперсию случайной величины $Z=5Y^2-3X$.

9. При штамповке металлических клемм получается в среднем 99% годных. Найти вероятность того, что среди 500 клемм будет хотя бы одна бракованная; не более двух бракованных.
10. Плотность вероятностей случайной величины X равна:

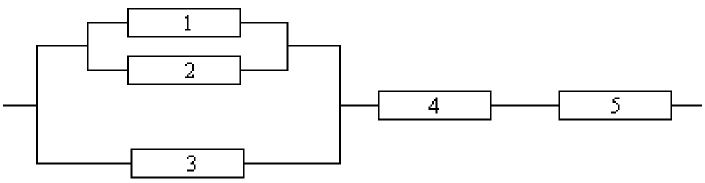
$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0, \\ a \cdot \cos x & при \quad 0 < x < \pi/2, \\ 0 & при \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти коэффициент "a", интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(0<X<\pi/4)$.

11. Диаметр детали - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами: a=60 мм, σ=1,5 мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой из партии детали составит от 58 мм до 62,4 мм; отличается от "a" не более, чем на 1,2 мм ? Какое отклонение диаметра детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,95? В каком интервале с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры практически всех изготовленных деталей ?

ВАРИАНТ 11

1. Для проведения лабораторных работ группа студентов, в которой 10 студентов и 6 студенток, произвольным образом делится на 2 равные подгруппы. Найти вероятность того, что в каждой подгруппе окажется по одинаковому числу студенток.
2. На книжной полке 8 журналов, из которых 5 в переплете. Наудачу взяты 4 журнала. Найти вероятность того, что среди них окажется не менее трех в переплете.
3. Найти вероятность надежной работы электрической цепи, состоящей из пяти элементов, если вероятности отказа каждого из элементов соответственно равны: $P_1 = 0{,}03$; $P_2 = 0{,}05$; $P_3 = P_4 = 0{,}04$; $P_5 = 0{,}02$.



4. 4. В двух урнах имеются шары: в первой - 7 красных и 5 желтых, во второй - 10 красных и 4 желтых. Извлекаются из первой урны 2 шара, а из второй - 1 шар. Из этих трех шаров затем наудачу извлекается один шар. Найти вероятность того, что этот шар красный.
5. Автобаза обслуживает 12 магазинов. От каждого из них заявка на автомашины на следующий день может поступить с вероятностью 0,4. Найти наивероятнейшее число заявок на следующий день и вероятность получения автобазой такого числа заявок, а также вероятность того, что поступит не более 9-ти заявок.
6. В системе установлено 200 независимо работающих предохранителей. Для каждого из них вероятность выхода из строя по истечении заданного времени работы равна 0,05. Если вышло из строя менее 20

предохранителей, то система не требует ремонта. Найти: вероятность выхода из строя 20 потребителей; вероятность того, что система не потребует ремонта по истечении заданного времени работы.

7. В коробке находятся 5 деталей первого сорта и 3 - второго сорта. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа деталей второго сорта среди 4-х отобранных.
8. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0,5	0,7	1,2	2
P	0,3	0,2	0,1	…

Найти $M(2X^2+5)$ и $D(2X^2+5)$.

9. Радиоаппаратура состоит из 800 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение года работы равна 0,005 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и более двух элементов за год?
10. Дифференциальная функция распределения *f(x)* случайной величины X равна:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<1, \\ a(x-0{,}5) & при \quad 1<x<2, \\ 0 & при \quad x>2. \end{cases}$$

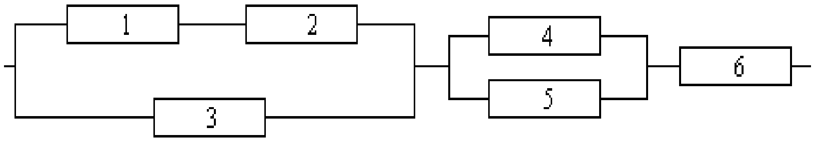
Найти коэффициент "a", интегральную функцию распределения *F(x)*, *M(X)* и *D(X)*, вероятность *P(1<X< 1,5)*.

11. Автомат штампует детали. Контролируется длина X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) a=135 мм. Фактическая длина изготовленных деталей 131 < <X <139 мм . Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали меньше 133 мм. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,96? В каких пределах с вероятностью 0,9973 будут заключены длины изготовленных деталей?

ВАРИАНТ 12

1. У сборщика имеется 10 деталей, мало отличающихся по внешнему виду. Из них 6 деталей первого сорта, а 4 - второго. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых 5 деталей окажутся 3 первого сорта ?

2. В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Наудачу извлекаются четыре детали. Найти вероятность того, что среди них окажется не менее трех окрашенных.
3. Вероятности работы каждого из элементов электрической цепи равны соответственно $p_1 = p_2 = 0{,}95$, $p_3 = 0{,}90$, $p_4 = p_5 = 0{,}85$, $p_6 = 0{,}8$.



Найти вероятность безотказной работы цепи.
4. В двух урнах находятся шары. В первой - 6 белых и 4 черных, во второй - 8 белых и 2 черных. Извлекаются из первой урны 2 шара и из второй - один. Из этих трех шаров наудачу извлекается один шар. Найти вероятность того, что последний шар белый.
5. Два равносильных шахматиста играют матч. Что вероятнее: выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти ?
6. Вероятность того, что наудачу взятая деталь из партии стандартна, равна 0,8. Найти вероятность того, что среди 600 взятых случайным образом деталей окажется от 500 до 530 стандартных; ровно 500 стандартных.
7. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,4. Составить закон распределения числа промахов при пяти выстрелах.
8. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределения

X	-2	0,8	1,5	2
P	0,35	0,25	0,4	…

Y	-0,8	0,6	1,5	4
P	0,25	0,35	0,2	…

Найти среднее квадратическое отклонение величины $Z = 2Y^2 - X$.
9. Радиоаппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа не менее трех и ровно трех элементов за год ?
10. Случайная величина X задана плотностью вероятностей

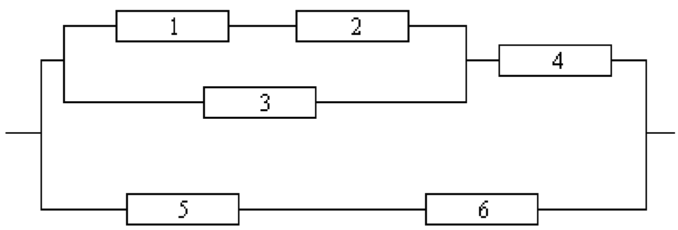
$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le \pi/6, \\ 3 \cdot \sin 3x & при \quad \pi/6 < x \le \pi/3, \\ 0 & при \quad x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти: $F(x)$, $M(X)$ и $P(\pi/4 < X < \pi/3)$.

11. На станке изготавливается партия деталей. Длина детали X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a=22,5 см и σ=1,5 см. Найти: вероятность того, что длина детали будет заключена между 21 и 24,5 см; какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,91; 0,99? В каких пределах, симметричных относительно "a", будут лежать практически все размеры деталей?

ВАРИАНТ 13

1. У сборщика имеется 14 деталей, не отличающихся по внешнему виду, из них 8 - первого сорта, а 6 - второго. Найти вероятность того, что среди наудачу отобранных 9-ти деталей 4 окажутся второго сорта.
2. Вероятности того, что нужная деталь содержится в 1-ом, 2-ом, 3-ем или 4-ом ящиках соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что нужная деталь находится не более, чем в двух ящиках.
3. Вероятности надежной работы каждого из 6-ти элементов электрической цепи равны соответственно $p_1 = 0{,}98$, $p_2 = 0{,}96$, $p_3 = 0{,}94$, $p_4 = 0{,}90$, $p_5 = p_6 = 0{,}90$. Найти вероятность безотказной работы цепи.



4. В ящике содержится 12 деталей завода № 1, 20 деталей завода № 2 и 18 деталей завода № 3. Вероятности того, что выбранная деталь - отличного качества, равны 0,9 для первого завода, 0,85 для второго и 0,8 для третьего. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь будет отличного качества.
5. Что вероятнее - выиграть у равносильного противника (ничейный результат исключается) не менее трех партий из четырех или не менее шести партий из восьми ?
6. Вероятность того, что станок - автомат в течение смены потребует внимания рабочего, равна 0,2. Предполагается, что неполадки на станках независимые. Найти вероятность того, что в течение смены внимания

рабочего потребуют менее 15 станков из 50, обслуживаемых им; ровно 15 станков.

7. В коробке находятся 6 деталей 1-го сорта и 4 детали 2-го сорта. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа деталей первого сорта среди отобранных.
8. Случайная величина X задана законом распределения

X	4	5	6
P	0,5	0,3	…

Найти $M(2X^2+3X+1)$ и $D(2X^2+3X+1)$.

9. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,005. Найти вероятность того, что среди 600 деталей окажется не более одной нестандартной детали; хотя бы одна нестандартная деталь.
10. Случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x\le 0, \\ x/3 & \textit{при} \quad 0<x\le 2, \\ -2x/3+2 & \textit{при} \quad 2<x\le 3, \\ 0 & \textit{при} \quad x>3. \end{cases}$$

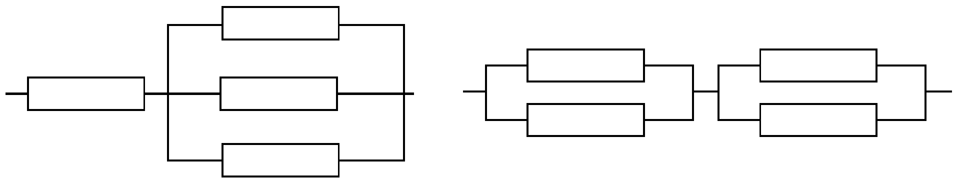
Найти: интегральную функцию распределения *F(X),* математическое ожидание *M(X)* и дисперсию *D(X),* вероятность *P(1<X<2,5).*

11. Диаметр детали - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами: a=55 мм и σ=1,4 мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой из партии детали составит от 53 мм до 57,1 мм; отличается от "a" не более, чем на 0,7? Какое отклонение диаметра детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,96? В каком интервале с вероятностью 0,9973 заключены диаметры изготовленных деталей ?

ВАРИАНТ 14

1. В комплекте из 16 деталей 4 детали с дефектами. 9 отобранных наудачу деталей подвергаются контролю. Комплект будет признан годным, если среди них окажутся 2 детали с дефектами. Найти вероятность того, что комплект будет признан годным.
2. В урне 8 черных и 4 желтых шара. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 4-х шаров окажется не более двух желтых.

3. Какая из двух электрических цепей надежнее, если вероятность выхода из строя каждого отдельного элемента цепи равна 0,1 ?



4. В двух урнах содержатся шары. В первой - 8 белых и 12 черных, во второй - 9 белых и 11 черных. Из первой урны извлекается 1 шар, из второй - 2, а затем из этих трех шаров извлекается один. Найти вероятность того, что он окажется белым.
5. В приборе стоят 6 независимо работающих предохранителей. Для каждого из них вероятность перегореть после 1000 часов работы равна 0,4. Если перегорело не менее 4-х предохранителей, то прибор требует ремонта. Найти вероятность того, что прибор потребует ремонта после 1000 часов работы.
6. Испытывается каждый из 150 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти вероятность того, что выдержат испытание более 130 элементов; ровно 130 элементов.
7. ОТК проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,8. В проверяемой партии 4 изделия. Составить закон распределения числа нестандартных изделий среди проверяемых.
8. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределения

X	-2	0,5	1	3
P	0,2	0,4	0,3	…

Y	-1,5	0,8	1,6
P	0,4	0,5	…

Найти среднее квадратическое отклонение величины $Z = 2X^2 - 1{,}5Y$.

9. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,005. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется более трех нестандартных.
10. Случайная величина X задана плотностью вероятностей:

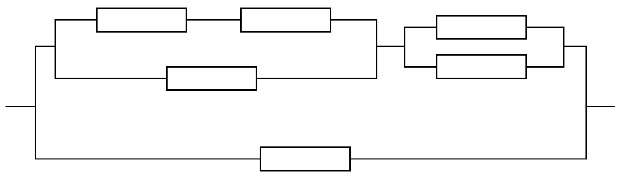
$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le -2, \\ a(x+2)^2/4 & при \quad -2 < x \le 0, \\ 0 & при \quad x > 0. \end{cases}$$

Найти коэффициент “a”, интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(-1<X<0)$.

11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) a=140 мм. Фактическая длина изготовленных деталей находится в диапазоне $137{,}75<X<142{,}25$. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали будет больше 141,7 мм. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,95? В каких пределах с вероятностью 0,9973 будут заключены длины всех проверенных деталей?

ВАРИАНТ 15

1. В партии, содержащей 11 деталей, 4 бракованных. Наудачу выбраны 5 деталей. Партия будет забракована, если среди отобранных деталей окажутся две бракованных. Найти вероятность того, что партия будет признана негодной.
2. В урне 3 черных и 7 красных шаров. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных пяти шаров окажется не менее трех красных.
3. Найти вероятность надежной работы электрической цепи, изображенной на рисунке, если вероятность выхода из строя каждого из независимо работающих элементов цепи равна 0,005.



4. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность изготовления стандартной детали для станка № 1 равна 0,96, для станка № 2 равна 0,92. Станок № 1 изготавливает в 1,5 раза меньше деталей, чем станок № 2. Найти вероятность того, что взятая наудачу на сборке деталь окажется нестандартной.
5. Пусть вероятность того, что наудачу взятая деталь стандартна, равна 0,9. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу деталей окажется не более двух нестандартных.
6. На участке 90 станков. Вероятность работы каждого из них - 0.85. Найти вероятность того, что в данный момент работают не менее 80 из них; ровно 80 станков.

7. В урне находится 7 красных и 5 черных шаров. Наудачу извлекаются 3 шара. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X - числа красных шаров среди отобранных.
8. Ряд распределения случайной величины X задан в виде таблицы

X	-3	2	1	4
P	0,2	0,3	0,3	…

Найти $M(2X^2+0{,}5X)$ и $D(2X^2+0{,}5X)$.

9. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется не менее трех нестандартных деталей.
10. Случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ bx^2/2 & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

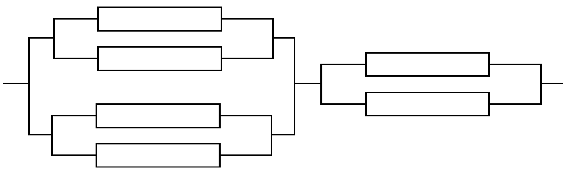
Найти коэффициент "b", интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(0<X<1)$.

11. Диаметр детали - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами: a=50 мм, σ=1,2 мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали из партии: составит от 49 мм до 51,5 мм; отличается от "a" не более, чем на 0,9 мм; какое отклонение диаметра от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,97? В каком интервале с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры всех изготовленных деталей?

ВАРИАНТ 16

1. Из партии, содержащей 14 деталей, среди которых 4 бракованных, наудачу отобраны 7 деталей. Партия будет признана годной, если среди отобранных деталей окажется 6 годных. Найти вероятность того, что партия будет признана годной.
2. Вероятность безотказной работы первого из четырех элементов устройства равна $p_1=0{,}9$, второго $p_2=0{,}85$, третьего $p_3=0{,}75$ и четвертого $p_4=0{,}65$. Найти вероятность выхода из строя двух элементов устройства.

3. Найти вероятность отказа электрической цепи, состоящей из независимо работающих элементов, если вероятность надежной работы каждого элемента равна 0,9.



4. На сборку поступило 500 деталей с первого станка, 400 деталей со второго и 200 деталей с третьего. Первый станок дает 0,6% брака, второй - 0,25%, а третий - 0,5%. Найти вероятность того, что деталь, взятая наудачу из нерассортированной продукции станков, окажется небракованной.
5. Вероятность того, что наудачу взятая деталь из партии нестандартна, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди шести взятых случайным образом деталей окажется не менее половины стандартных.
6. На автобазе 120 машин. Вероятность выезда на линию каждой из них – 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент на линии работает не менее ста машин; ровно 100 машин.
7. В урне 9 шаров, среди которых 5 белых, а остальные - черные. Наудачу извлекаются 3 шара. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа черных шаров среди отобранных.
8. Ряд распределения дискретной случайной величины X имеет вид

X	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,35	…

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 3X^2 + 2X + 4$.

9. Автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,005. Найти вероятность того, что среди 400 деталей не менее трех бракованных; ровно три бракованных.
10. Случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ ax^2/9 & \text{при} \quad 0 < x < 3, \\ 0 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

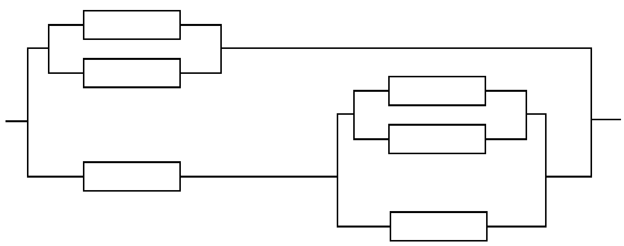
Найти коэффициент “a”, интегральную функцию распределения *F(x),*

$M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(0<X<2)$.

11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с параметрами a=145 мм, $\sigma = 1$ мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали будет больше 143,5 мм и меньше 146 мм. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,94 ? В каких пределах с вероятностью 0,9973 будут заключены длины деталей?

ВАРИАНТ 17

1. Комплект из 18 деталей, содержащий 6 окрашенных деталей, произвольным образом делится на две равные группы. Какова вероятность того, что в каждой группе окажутся по три окрашенных детали?
2. Вероятности того, что нужная сборщику деталь содержится в 1-ой, 2-ой, 3-ей или 4-ой коробках, равны соответственно 0,6, 0,75, 0,7 и 0,4. Найти вероятность того, что нужная сборщику деталь находится более чем в двух коробках.
3. Найти вероятность безотказной работы электрической цепи, состоящей из независимо работающих элементов, если вероятность отказа каждого элемента одинакова и равна q= 0,05.



4. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена заводом № 1, на 30% - заводом № 2 и на 50% - заводом № 3. Для завода № 1 вероятность выпуска бракованной лампочки равна 0,004, для завода № 2 - 0,005, а для завода № 3 - 0,006. Какова вероятность того, что взятая наудачу лампочка окажется бракованной?
5. Вероятность того, что станок в течение часа потребует внимания рабочего, равна 0,4. Предполагается, что неполадки на станках независимые. Найти вероятность того, что в течение часа внимания рабочего потребуют не менее двух станков из четырех, обслуживаемых им.
6. Из партии деталей отобраны для контроля 210 штук. Известно, что доля стандартных деталей во всей партии составляет 90 %. Найти вероят-

ность того, что более 190 деталей окажутся стандартными; ровно 190 деталей окажутся стандартными.

7. В комплекте 80 % окрашенных деталей, остальные - не окрашены. Наудачу отобраны три детали. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X - числа окрашенных деталей среди отобранных.
8. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	1	2	3
P	0,2	0,5	…

Найти $M(X^2 + 2X)$ и $D(X^2 + 2X)$.

9. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий более двух не выдержат испытание.
10. Случайная величина X задана плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < -1, \\ c(x+1) & при \quad -1 < x < 1, \\ 0 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

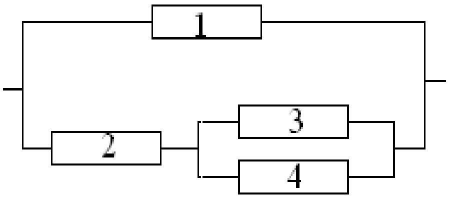
Найти: коэффициент "c", интегральную функцию распределения *F(x),* M(X), *D(X)* и вероятность $P(0 < X < 0{,}5)$. .

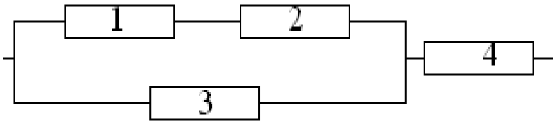
11. На станке изготавливается деталь. Ее длина X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a=23,5 см и σ=1,7 см. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 22 и 26 см. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,9; 0,95? В каких пределах будут лежать размеры практически всех деталей?

ВАРИАНТ 18

1. Колода из 52-х карт произвольно делится пополам. Найти вероятность того, что в каждой половине будет ровно по два туза.
2. В приборе имеются четыре блока. Вероятность выхода из строя за время T блока № 1 равна $p_1 = 0{,}18$, № 2: $p_2 = 0{,}15$, № 3: $p_3 = 0{,}12$ и № 4: $p_4 = 0{,}1$. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя хотя бы один блок; только один блок.

3. Определить, какая из двух функциональных цепей надежнее, если вероятности надежной работы каждого из элементов равны соответственно $p_1 = 0{,}8$ $p_2 = 0{,}6$; $p_3 = 0{,}75$; $p = 0{,}85$.



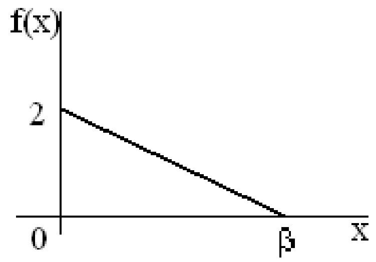


4. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из группы № 1 четыре студента, из группы № 2 - шесть и из группы № 3 - пять студентов. Вероятность того, что выбранный студент из первой группы попадет в сборную команду, равна 0,5, из второй- 0,4, из третьей- 0,3. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент попадет в сборную.
5. Вероятность того, что станок в течение часа потребует внимания рабочего, равна 0,6. Предполагается, что неполадки на станках независимые. Найти вероятность того, что в течение часа внимания рабочего потребуют не более двух станков из четырех, обслуживаемых им.
6. Из большой партии деталей отбирают для контроля 500 штук. Известно, что доля нестандартных деталей во всей партии составляет 10%. Найти вероятность того, что от 440 до 470 деталей окажутся стандартными; ровно 440 деталей окажутся стандартными.
7. В комплекте 9 деталей, среди которых шесть нужного размера. Наудачу отобраны четыре детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа деталей нужного размера среди отобранных.
8. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределения. Найти дисперсию случайной величины $Z = X^2 - 2Y$.

X	-1	1,5	2
P	0,2	0,5	0,3

Y	-1,5	0,8	1,6
P	0,2	0,5	…

9. Аппаратура содержит 2000 независимых элементов. Вероятность отказа каждого из них равна 0,0005. Какова вероятность отказа хотя бы одного элемента; менее трех элементов?
10. Плотность вероятностей случайной величины X задана графически:

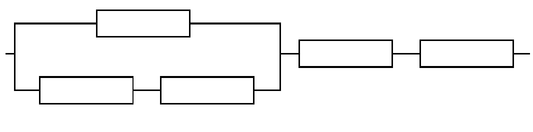


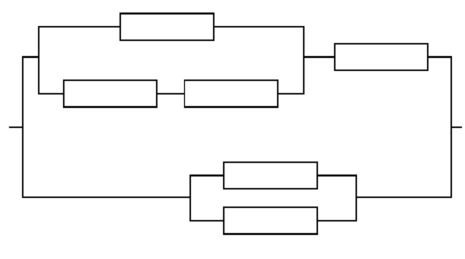
Найти коэффициент β и написать выражение для *f(x)*; интегральную функцию распределения *F(x), M(X), D(X)* и вероятность *P(0<x<0,5).*

11. Диаметр изготавливаемой в цехе партии деталей является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами: a= =40 мм, σ=0,8 мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали составит от 39 мм до 42 мм; отличается от "a" не более чем на 1 мм. Какое отклонение диаметра от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,99? В каком интервале с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных деталей ?

ВАРИАНТ 19

1. Для уменьшения общего количества игр на соревнованиях 14 команд разбиты по жребию на две подгруппы по 7 команд в каждой. Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в разных подгруппах.
2. В урне 8 синих и 7 зеленых шаров. Наудачу извлекаются 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется не менее 5 синих.
3. Вероятность работы каждого из элементов электрических цепей одинакова и равна p= 0,95. Элементы работают независимо. Определить, какая из двух цепей надежнее.





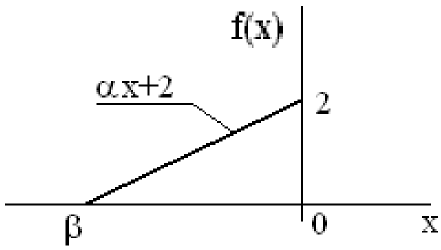
4. Вероятности того, что во время работы ЭЦВМ произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти или в остальных устройствах относятся как 3,5:2,5:4,0. Вероятности обнаружения сбоя в них соответственно равны 0,9, 0,95, 0,85. Найти вероятность того, что возникающий в машине сбой будет обнаружен.

5. На участке четыре станка. Вероятность надежной работы каждого из них - 0,85. Найти вероятность того, что в данный момент работает менее трех из них.
6. Со склада отбирают 300 автопокрышек. Доля изношенных покрышек в отобранной партии составляет 15 %. Найти вероятность того, что более 270-ти покрышек окажутся неизношенными; ровно 270 автопокрышек окажутся неизношенными.
7. В партии 15% нестандартных деталей. Наудачу отобраны три детали. Написать закон распределения дискретной случайной величины X - числа стандартных деталей среди отобранных.
8. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	-1	0	0,5	1,2	2
P	0,1	0,05	0,2	0,3	…

Найти $M(X^2+X+1)$ и $D(X^2+X+1)$.

9. Вероятность изготовления бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что среди 500 деталей окажется хотя бы одна бракованная; не более одной бракованной.
10. Плотность вероятностей $f(x)$ случайной величины X задана графически:

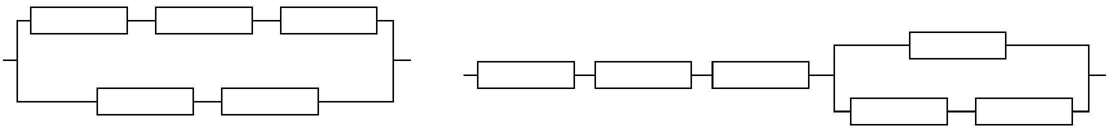


Найти коэффициенты α и β и написать выражение для $f(x)$. Определить интегральную функцию распределения $F(x)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность $P(-0,5<x<0)$.

11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) a=150 мм. Фактическая длина изготовленных деталей находится в пределах $145 \div 155$ мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали будет больше 152 мм. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,93 ? В каких пределах с вероятностью 0,9973 будут заключены длины изготовленных деталей?

ВАРИАНТ 20

1. В партии из 15 изделий есть 5 бракованных. 7 наудачу выбранных изделий подвергаются контролю. Партия будет принята, если среди них окажется 4 годных. Найти вероятность того, что партия будет принята.
2. В урне 8 синих и 7 красных шаров. Найти вероятность того, что среди 9 наудачу извлеченных шаров окажется более 6 синих.
3. Вероятность работы элементов каждой цепи одинакова и равна p=0,8. Элементы работают независимо. Определить, какая из этих двух цепей надежнее.

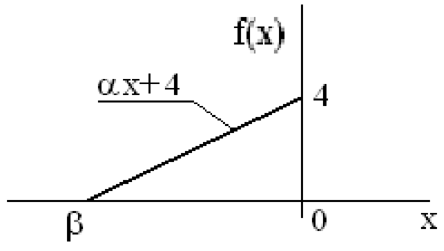


4. В двух урнах находятся шары. В первой - 9 красных и 8 синих, во второй - 11 красных и 6 синих. Из первой урны вынут один шар и переложен во вторую. Затем из второй урны извлекается наудачу один шар. Найти вероятность того, что это синий шар.
5. В типографии 4 машины. Вероятность надежной работы каждой из них - 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент в типографии работает не менее 3-х машин.
6. Вероятность того, что наудачу взятая деталь из партии стандартна, равна 0,92. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 600 деталей менее 50 окажутся нестандартными; ровно 50 деталей окажутся нестандартными.
7. В урне 6 белых и 2 черных шара. Наудачу извлечены 5 шаров. Составить ряд распределения числа белых шаров среди извлеченных.
8. Случайные величины X и Y заданы рядами распределения. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины: $Z = 3X + Y^2$.

X	0,5	2	3	3,5
P	0,25	0,4	0,15	…

Y	2,5	3	4,5
P	0,5	0,3	…

9. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 500 приборов окажется более четырех неточно собранных.
10. Плотность вероятностей $f(x)$ задана графически:



Найти аналитическое выражение для *f(x)*. Определить функцию распределения *F(x)*, *M(X)*, *D(X)* и вероятность *P(-0,5<X<0)*.

11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали *X*, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) a=158 мм. Фактическая длина изготовленных деталей находится в пределах 157,6 ÷ 158,4 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали будет больше 158,2 мм. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,91? В каких пределах с вероятностью 0,9973 будут заключены длины изготовленных деталей?

ВАРИАНТ 21

1. В партии из 14 изделий 5 бракованных. 6 наудачу выбранных изделий из партии подвергаются контролю. Партия будет принята, если среди них окажется 2 бракованных детали. Найти вероятность того, что партия будет принята.
2. В коробке лежат 12 белых и 8 красных шаров, одинаковых на ощупь. Вынули 8 шаров. Какова вероятность того, что красных шаров вынуто не более двух ?
3. Найти вероятность выхода из строя электрической цепи, показанной на рисунке, если вероятность работы каждого элемента одна и та же и равна p = 0,93.

4. В вычислительной лаборатории имеются 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,98; для полуавтомата эта вероятность равна 0,95. Студент проводит расчет на наудачу выбран-

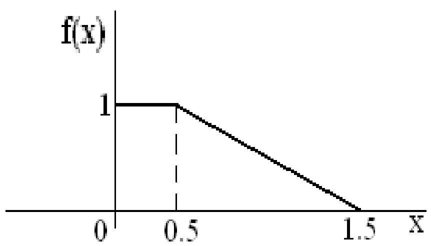
ной машине. Чему равна вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя ?

5. Из партии деталей отобраны для контроля 12 штук. Известно, что доля стандартных деталей во всей партии составляет 85%. Найти вероятность того, что более 9 деталей окажутся стандартными.
6. Электрическая цепь состоит из 600 параллельно включенных потребителей. Вероятность отказа каждого из них равна 0,1, а взаимное влияние в цепи отсутствует. Найти вероятность того, что откажет менее 40 потребителей; ровно 40 потребителей.
7. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 4 детали. Написать закон распределения дискретной случайной величины X - числа нестандартных деталей среди отобранных. Построить многоугольник распределения X.
8. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	-2	2	2,5	3
P	0,2	0,4	0,1	…

Найти $M(3X-2X^2)$ и $D(3X-2X^2)$.

9. Вероятность изготовления бракованной детали равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется не менее трех бракованных.
10. Плотность вероятностей случайной величины X задана графически.

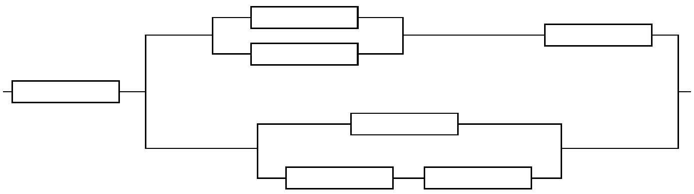


Найти аналитическое выражение для $f(x)$; интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(0,25<X<1)$.

11. Диаметр изготовляемой в цехе партии деталей является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами: $a=$ $=45$ мм, $\sigma = 1$ мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали составляет от 44 до 47 мм, отличается от "a" не более, чем на 1,1 мм. Какое отклонение диаметра детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,96? В каком интервале с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных деталей ?

ВАРИАНТ 22

1. Из полной колоды карт (52 штуки) извлекаются наугад сразу 3 карты. Найти вероятность того, что эти карты будут: тройка, семерка, туз.
2. Устройство состоит из 4 узлов, каждый из которых в течение времени t может выйти из строя. Вероятность выхода из строя за время t первого узла $p_1 = 0{,}2$, второго узла $p_2 = 0{,}15$, третьего $p_3 = 0{,}1$, четвертого $p_4 = 0{,}12$. Найти вероятность того, что за время t выйдут из строя два узла.
3. Найти вероятность надежной работы электрической цепи, состоящей из независимо работающих элементов, если вероятность выхода из строя каждого элемента одинакова и равна $q = 0{,}05$.

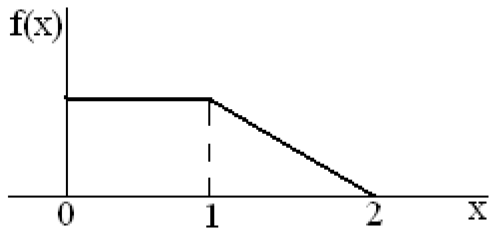


4. В двух урнах находятся шары. В первой - 6 белых и 3 черных, во второй - 4 белых и 7 черных. Из второй урны вынут один шар и переложен в первую. Затем из первой урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что этот шар черный.
5. Из партии деталей отбирают для контроля 10 штук. Известно, что доля нестандартных деталей во всей партии составляет 20%. Найти вероятность того, что не менее 8 деталей окажутся стандартными.
6. Испытывается каждый из 1400 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти вероятность того, что выдержат испытание от 1250 до 1300 элементов; ровно 1250 элементов.
7. В комплекте 10 деталей, из них 7 деталей первого сорта, остальные второго. Наудачу извлечены 4 детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.
8. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

X	-5	2	3	4
P	0,1	0,3	0,4	…

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = X^2 + 2X$.

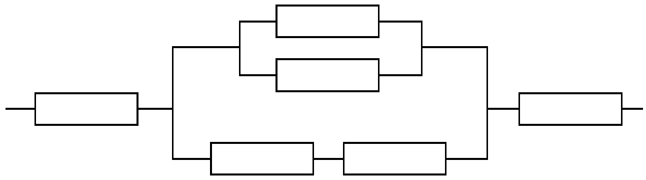
9. Вероятность изготовления бракованной детали равна 0,005. Найти вероятность того, что среди 600 деталей окажется не более 4-х бракованных.
10. Плотность вероятностей случайной величины X задана графически



Найти аналитическое выражение для плотности $f(x)$; интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$ и вероятность $P(1<X<1,5)$.
11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) a=155 мм. Фактическая длина изготовленных деталей $149,5 < X < 160,5$ мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 157,2 мм. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,92? В каких пределах с вероятностью 0,9973 будут заключены длины изготовленных деталей?

ВАРИАНТ 23

1. Партия содержит 12 изделий, из которых 6 подвергают контролю. Партия не принимается, если среди них будет обнаружено два бракованных изделия. Найти вероятность того, что партия не будет принята, если число бракованных изделий во всей партии равно трем.
2. Прибор состоит из 3-х независимо работающих узлов, каждый из которых может в течение времени t выйти из строя. Вероятность безотказной работы за время t первого узла равна $p_1 = 0,8$, второго узла $p_2 = 0,9$, третьего - $p_3 = 0,7$. Найти вероятность того, что за время t выйдут из строя ровно 2 узла; хотя бы 1 узел; все 3 узла.
3. Найти вероятность отказа электрической цепи, изображенной на рисунке, если вероятность надежной работы каждого элемента одна и та же и равна p=0,93.

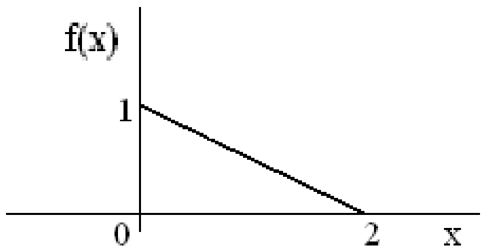


4. В 4-х урнах белые и черные шары, одинаковые на ощупь. В первой - 3 белых и 1 черный шар, во второй - 6 белых и 4 черных, в третьей - 9 белых и 1 черный, в четвертой - 2 белых и 5 черных. Из наудачу выбранной урны случайным образом вынимается 1 шар. Найти вероятность того, что он белый.
5. Из партии деталей отбирают для контроля 10 штук. Известно, что доля нестандартных деталей во всей партии составляет 15%. Найти вероятность того, что не более двух деталей окажутся стандартными.
6. Из партии пневматических шин отбираются 700 штук. Известно, что доля негодных шин во всей партии составляет 10%. Найти вероятность того, что не менее 620 и не более 660 шин окажутся годными; ровно 640 шин окажутся годными.
7. Устройство состоит из 3-х элементов, работающих независимо. Вероятность работы элемента в одном испытании равна 0,85. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа отказавших элементов в одном испытании.
8. Независимые случайные величины X и $У$ заданы рядами распределения. Найти дисперсию случайной величины $Z = 3X + 2Y^2$.

X	1	3	5	6
P	0,2	0,3	0,4	…

Y	1,5	2	2,5
P	0,2	0,5	…

9. Автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей будет не менее трех бракованных.
10. Плотность вероятностей случайной величины X задана графически:

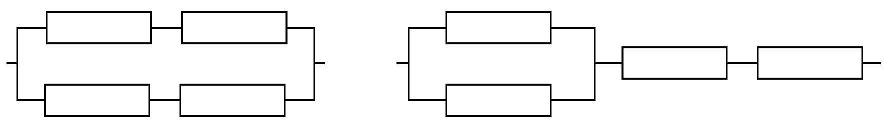


Найти: аналитическое выражение для *f(x)*, интегральную функцию распределения *F(x),* математическое ожидание *M(X),* дисперсию *D(X)* и вероятность $P(0<X<0,5)$.

11. На станке изготавливается деталь. Ее длина X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами: a=25 см, σ=2 см. Найти вероятность того, что длина детали заключена между 23 и 26,4 см. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,85; 0,95? В каких пределах будут лежать практически все размеры деталей?

ВАРИАНТ 24

1. В коробке находится 6 деталей 1-го сорта, 7- второго и 4 - третьего сорта. Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных восьми деталей окажутся 3 детали первого сорта; 3 детали второго сорта и 2 - третьего сорта.
2. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает 1-ый сигнализатор, равна 0,9, 2-ой - 0,85, 3-ий - 0,8. Найти вероятность того, что при аварии сработают два сигнализатора; все три.
3. Вероятности работы каждого из элементов электрической цепи равны соответственно $p_1 = 0,95$, $p_2 = 0,93$, $p_3 = 0,9$ и $p_4 = 0,85$. Определить какая из двух электрических цепей более надежна.



4. В телеателье имеются 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы соответственно равны 0,2, 0,85, 0,9, 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.
5. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/8. Найти вероятность того, что лицо, имеющее 6 билетов, выиграет не более, чем по двум билетам.
6. Контролируется работа каждого из 100 узлов устройства. Вероятность того, что узел окажется неисправным, равна 0,2. Найти вероятность того, что не менее 70 узлов окажутся исправными; ровно 70 узлов окажутся исправными.

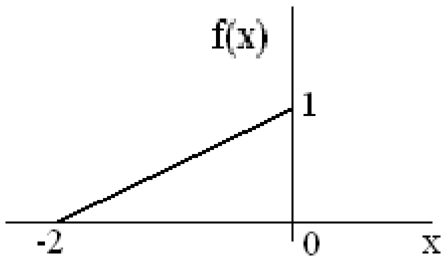
7. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа стандартных деталей среди отобранных.
8. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	2	3	4,5
P	0,15	0,6	…

Y	0,5	1	2,5	3
P	0,2	0,1	0,3	…

Найти дисперсию случайной величины $Z = X^2 + 3Y$.

9. Вероятность нарушения герметичности баллона равна 0,005. Найти вероятность того, что среди 600 баллонов окажется хотя бы один негерметичный; менее двух негерметичных.
10. Плотность вероятностей *f(x)* случайной величины X задана графически:



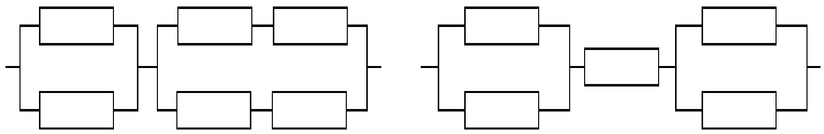
Написать аналитическое выражение для $f(x)$, найти интегральную функцию распределения $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, определить вероятность $P(-1 < X < 0)$.

11. Диаметр изготавливаемой в цехе партии деталей является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами a= =80 мм, σ=2,2 мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали составит от 79 до 81,8 мм. С какой вероятностью он отличается от математического ожидания не более, чем на 1,8 мм? Какое отклонение диаметра детали от математического ожидания можно гарантировать с вероятностью 0,91? В каком интервале с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных деталей?

ВАРИАНТ 25

1. В ящике лежат 5 красных, 7 синих и 6 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу извлекаются 6 шаров. Какова вероятность того, что будут вынуты 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шара?

2. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что первое изделие стандартно, равна 0,95, вероятность того, что стандартно второе изделие, равна 0,98. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартно.
3. Вероятность выхода из строя каждого из независимо работающих элементов электрической цепи $p = 0{,}05$. Определить, какая из двух электрических цепей надежнее.



4. В пирамиде установлены 5 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при первом выстреле из винтовки с прицелом равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
5. Электрическая цепь состоит из 6 параллельно включенных потребителей. Вероятность отказа каждого из них равна 0,2, а взаимное влияние в цепи отсутствует. Найти вероятность того, что откажет не менее половины потребителей.
6. На заводе – автомате 800 станков. Вероятность отказа каждого из них 0,1. Найти вероятность того, что в данный момент времени работают от 700 до 750 станков; ровно 700 станков.
7. Устройство состоит из 4-х элементов, работающих независимо. Вероятность надежной работы каждого элемента в одном испытании равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X - числа отказавших элементов в одном опыте.
8. Независимые дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	1	2	4	7
P	0,1	0,2	0,5	…

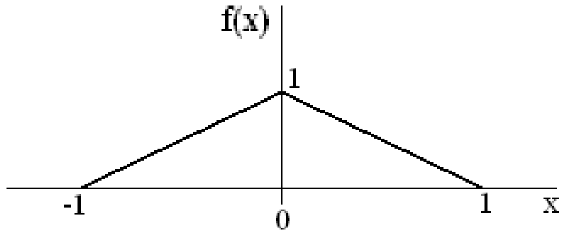
Y	3	1,5	5
P	0,4	0,1	…

Найти среднее квадратическое отклонение величины $Z = 2X + 3Y^2$.

9. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна

0,002. Найти вероятность того, что за время t откажут более двух элементов.

10. Плотность вероятностей случайной величины X задана графиком

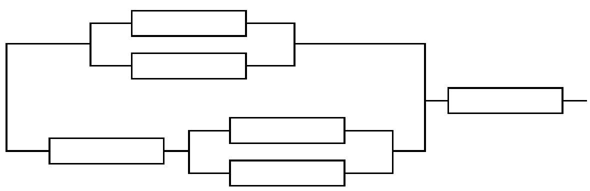


Написать аналитическое выражение для $f(x)$, найти интегральную функцию распределения $F(x)$, вычислить дисперсию $D(X)$, определить вероятность $P(0 < X < 0{,}5)$.

11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) a=160 мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 154 мм и не более 166 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 163 мм. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,91? В каких пределах с вероятностью 0,9973 будут заключены длины изготовленных деталей?

ВАРИАНТ 26

1. На стеллаже в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что из взятых учебников 2 окажутся в переплете.
2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, для второго 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.
3. Вероятность безотказной работы каждого элемента электрической цепи одна и та же и равна p = 0,96. Найти вероятность отказа цепи.



4. Станок 1/3 своего времени обрабатывает деталь № 1 и 2/3 времени - деталь № 2. При обработке детали № 1 он стоит 15% времени, а при обработке детали № 2 - 9% времени. Какова вероятность застать станок стоящим?
5. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание и его вероятность, а также вероятность того, что выдержат испытание более 12 элементов.
6. Вероятность того, что наудачу взятый подшипник из партии стандартный, равна 0,92. Найти вероятность того, что среди отобранных наудачу 600 подшипников менее 60 окажутся нестандартными; ровно 60 окажутся нестандартными.
7. В урне из 7 шаров 5 красных, а остальные белые. Наудачу извлекаются 4 шара. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа красных шаров среди отобранных.
8. Случайные величины X и Y независимы и подчинены законам распределения:

X	1	4	5
P	0,15	0,6	…

Y	2	3	4	6
P	0,2	0,3	0,3	…

Найти среднее квадратическое отклонение величины $Z = 2X^2 - 3Y$.

9. Вероятность нарушения герметичности баллона равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 500 баллонов окажется более трех негерметичных баллонов.
10. Плотность вероятностей случайной величины X равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x < 0, \\ 2(c-x)^2/c^2 & \textit{при} \quad 0 < x < c, \\ 0 & \textit{при} \quad x > c. \end{cases}$$

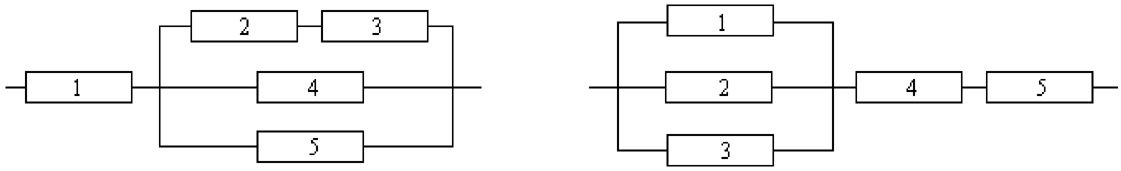
Найти: интегральную функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, вероятность $P(0<X<c/2)$.

11. На станке изготавливается деталь. Ее длина X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a = 25$ см, $\sigma = 2$ см. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 24 см и 27 см. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,9; 0,99? В каких пределах будут лежать практически все размеры детали?

ВАРИАНТ 27

1. Колода из 36 карт делится наугад на 2 равные части. Найти вероятность того, что в каждой части окажется по 2 туза.

1. В соревнованиях участвуют 16 команд, из которых случайным образом формируются 2 группы по 8 команд в каждой. Среди участников имеется 5 сильных команд. Найти вероятность того, что в одну группу попадут 2 сильные команды, а в другую - 3.
2. Вероятности безотказной работы каждого из элементов электрических цепей, показанных на рисунке, соответственно равны: $p_1 = p_2 = 0{,}95$; $p_3 = 0{,}93$; $p_4 = 0{,}9$; $p_5 = 0{,}85$. Какая цепь надежнее?



4. В комплекте содержатся детали 3-х типов. Известно, что деталей первого типа в 1,5 раза больше, чем деталей второго и в 2 раза больше, чем деталей 3-го типа. Вероятность того, что детали первого типа окажутся низкого качества, равна 0,1, второго типа - 0,15, а третьего- 0,2. Найти вероятность того, что наудачу взятая из комплекта деталь окажется высокого качества.
5. Из партии деталей отобраны для контроля 8 штук. Известно, что доля нестандартных деталей во всей партии составляет 15%. Найти вероятность того, что не менее шести деталей окажутся стандартными.
6. Вероятность надежной работы конструкции при приложении нагрузки равна 0,9. Найти вероятность того, что из 150 конструкций, испытанных независимо друг от друга, не более 20 выйдут из строя; ровно 20 выйдут из строя.
7. В комплекте 20% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 4 детали. Написать закон распределения дискретной случайной величины X - числа стандартных деталей среди отобранных.
8. Случайные величины X и Y заданы рядами распределения

X	-2	1,5	3	4
P	0,3	0,4	0,2	…

Y	-1,5	1	3
P	0,4	0,35	…

Найти среднее квадратическое отклонение величины $Z = 2X - 1{,}5Y^2$.

9. Автомат изготавливает детали. Вероятность того, что изготавливаемая деталь окажется стандартной, равна 0,995. Найти вероятность того, что среди 600 деталей окажется более двух бракованных.
10. Случайная величина X задана плотностью вероятностей:

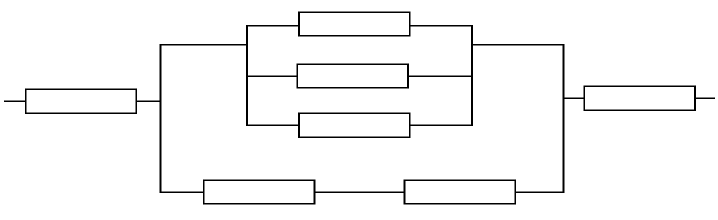
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 3, \\ -3x^2/4 + 6x - 45/4 & \text{при} \quad 3 < x < 5, \\ 0 & \text{при} \quad x > 5. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения *F(x)*, *M(X)* и *D(X),* вероятность попадания X в интервал (3,5; 4,5).

11. Диаметр детали - нормально распределенная случайная величина с параметрами a=85 мм, σ=2,4 мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали из партии составит от 84 мм до 87 мм, вероятность отклонения диаметра от "a" не более чем на 1,6 мм. Какое отклонение диаметра от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,9? В каком интервале с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных деталей?

ВАРИАНТ 28

1. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются 2 группы по 9 команд. Среди них имеется 6 команд экстра-класса. Найти вероятность того, что в каждую группу попадут по 3 команды экстра-класса.
2. Устройство состоит из 4-х независимых узлов. Вероятность отказа 1-го узла равна 0,1, 2-го - 0,12, 3-го - 0,15 и 4-го - 0,2. Найти вероятность надежной работы двух; трех узлов.
3. Вероятность безотказной работы каждого из независимо работающих элементов функциональной цепи равна 0,8. Найти вероятность отказа цепи, изображенной на рисунке.



4. На сборку поступают детали четырех типов. Деталей первого типа в 1,5 раза меньше, чем деталей второго типа, в 2 раза меньше, чем деталей третьего типа и столько же, сколько деталей четвертого типа. Вероятность того, что деталь первого типа окажется годной, равна 0,9, второго типа - 0,85, третьего - 0,9 и четвертого типа - 0,75. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется бракованной.
5. Контролируется работа каждого из 10 узлов устройства. Вероятность того, что узел окажется неисправным, равна 0,2. Найти наивероятнейшее число узлов k^*, которые выдержат проверку и вероятность того, что не менее k^* узлов окажутся исправными.
6. Вероятность выхода из строя узла конструкции при приложении расчётной нагрузки 0,05. Какова вероятность того, что из 800 узлов, испытанных независимо друг от друга, не менее 750 выдержат нагрузку; ровно 750 выдержат нагрузку?
7. В партии 10 деталей, из них 7 стандартных, остальные нестандартные. Наудачу отобраны 4 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа нестандартных деталей среди отобранных.
8. Случайные величины X и Y заданы рядами распределения.

X	-2	1,5	2	3
P	0,3	0,4	0,2	…

Y	-2	-1	2,5
P	0,35	0,25	…

Найти среднее квадратическое отклонение величины $Z = 3X - Y^2 + 4$.

9. Найти вероятность того, что среди 2000 деталей окажется более 3-х нестандартных, если вероятность изготовления стандартной детали равна 0,998.
10. Случайная величина X задана плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 2, \\ -3/4x^2 + 9/2x - 6 & \text{при} \quad 2 < x < 4, \\ 0 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

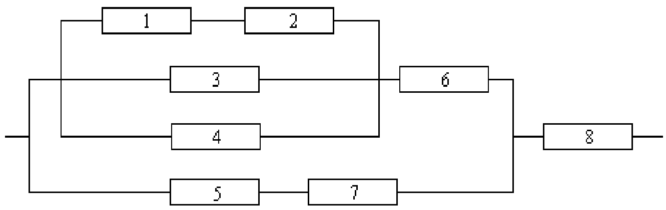
Найти: *F(x), M(X), D(X), P(2,5<X<3,5).*

11. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) a = 115 мм. Фактическая длина изготовленных

деталей $112<X<118$. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали меньше 113 мм. Какое отклонение длины от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,95? В каких пределах с вероятностью 0,9973 будут заключены длины изготовленных деталей ?

ВАРИАНТ 29

1. На складе имеются 15 кинескопов, из них 5, исчерпавших ресурс. Найти вероятность того, что среди 5-ти взятых наудачу кинескопов окажутся 2 кинескопа, исчерпавших ресурс работы.
2. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, для второго 0,8, для третьего 0,9. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков; хотя бы один стрелок.
3. Вероятности безотказной работы каждого из независимо работающих элементов электрической цепи (см. рис.) равны соответственно: $P_1 = P_2 = 0{,}95$; $P_3 = P_4 = P_5 = 0{,}9$; $P_6 = P_7 = 0{,}85$; $P_8 = 0{,}8$. Найти вероятность отказа цепи.



4. В двух урнах находятся шары: в первой 14 красных и 6 зеленых; во второй 15 красных и 8 зеленых. Из первой урны вынуты 2 шара и переложены во вторую. Затем из второй урны извлекается наудачу один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар зеленый ?
5. На участке 8 станков. Вероятность отказа каждого из них 0,1. Найти вероятность того, что в момент времени t работает не менее половины станков.
6. Произведено 1200 независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,85. Найти вероятность того, что будет от 160 до 200 промахов в цель; ровно 180 промахов в цель.
7. Устройство состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы каждого элемента в одном испытании равна 0,9. Составить закон распределения числа отказавших элементов при одном испытании.
8. Случайные величины X и Y заданы рядами распределения

X	-1,5	-0,5	2
P	0,25	0,35	…

Y	-2	-1	1,5	3
P	0,4	0,3	0,2	…

Найти среднее квадратическое отклонение величины $Z = 2X - 1{,}5Y^2$.

9. Устройство состоит из 4-х независимо работающих однотипных элементов. Вероятность надежной работы каждого элемента равна 0,995. Найти вероятность того, что работают не менее трех элементов.
10. Случайная величина X задана плотностью вероятностей:

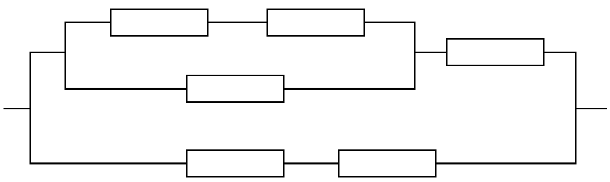
$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0, \\ a(x^2 + 2x) & при \quad 0 < x < 1, \\ 0 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти коэффициент "a", интегральную функцию распределения *F(x), M(X), D(X)* и вероятность попадания X в интервал (0,2; 0,8).

11. На станке изготавливается деталь. Ее длина X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами: a=20 см, σ=1,1 см. Найти вероятность того, что длина детали заключена между 19 см и 21,1 см. Какое отклонение длины детали от a можно гарантировать с вероятностью 0,9; 0,99? В каких пределах будут лежать практически все размеры деталей ?

ВАРИАНТ 30

1. У сборщика имеются 10 деталей, мало отличающихся по внешнему виду. Из них 6 деталей первого сорта, а 4 – второго. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 5 деталей 3 окажутся первого сорта?
2. В урне 7 черных шаров и 5 желтых шаров. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 4-х шаров окажется более 2-х желтых.
3. Вероятность отказа каждого из независимо работающих элементов электрической цепи равна $P = 0{,}05$. Найти вероятность безотказной работы электрической цепи.



4. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность изготовления стандартной детали для первого станка равна 0,96, а для

второго станка - 0,92. Детали складываются в одном месте, причем первый станок изготавливает в 1,5 раза меньше деталей, чем второй. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется нестандартной.

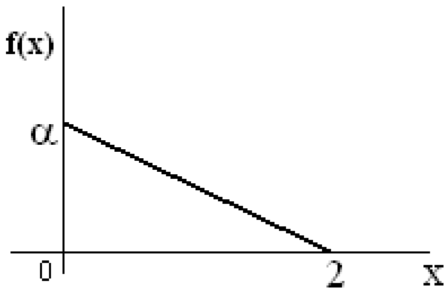
5. Вероятность того, что наудачу взятая деталь из партии стандартна, равна 0,92. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу шести деталей не менее двух окажутся нестандартными.
6. Вероятность безотказной работы каждого из 700 независимо работающих элементов некоторого устройства равна 0,85. Найти вероятность того, что выйдут из строя от 80 до 120 элементов; ровно 100 элементов.
7. Устройство состоит из 4-х элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность надежной работы каждого элемента в одном испытании равна 0,9. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа отказавших элементов в одном опыте.
8. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределения.

X	-2	1,5	2	3
P	0,1	0,3	0,2	…

Y	-1,5	0	2
P	0,3	0,2	…

Найти среднее квадратическое отклонение величины $Z = 2X^2 - 3Y$.

9. Автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,005. Найти вероятность того, что среди 600 деталей окажется хотя бы одна бракованная; не более одной бракованной.
10. Плотность вероятностей *f(x)* случайной величины X задана графически



Найти: аналитическое выражение для *f(x);* интегральную функцию распределения *F(x),* математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X)* и вероятность $P(0{,}5<X<1{,}2)$.

11. На станке изготавливается деталь. Ее длина X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами: a=23,5 см и σ=1,7 см. Найти вероятность того, что длина детали заключена между 23 см и 25 см. Какое отклонение длины детали от "a" можно гарантировать с вероятностью 0,9; 0,95? В каких пределах лежат практически все размеры деталей?

РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

ЗАДАЧА 1

Для каждого варианта требуется:

1. Представить опытные данные в сгруппированном виде, разбив на k равноотстоящих частичных интервалов.
2. Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.
3. Построить полигон и гистограмму относительных частот.
4. Вычислить методом произведений числовые характеристики выборки: выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициенты асимметрии и эксцесса.
5. Найти точечные оценки параметров нормального закона распределения и плотность вероятностей $f(x)$.
6. Проверить, согласуется ли принимаемая гипотеза о нормальном распре-делении генеральной совокупности с эмпирическим распределением вы-борки, используя критерии Пирсона и Колмогорова (при уровнях значи-мости 0,05; 0,01).
7. Найти интервальные оценки параметров нормального закона распреде-ле-ния, приняв доверительную вероятность γ = 0,95 и 0,99.

ВАРИАНТ 1

Результаты регистрации средней эксплуатационной скорости движения автобусов на междугородных маршрутах представлены в виде вариационного ряда в таблице

23	30,2	32,5	34,2	35,6	37,7	38,6	40,3	42,8	44,6
24,5	30,4	32,7	34,3	35,9	37,7	38,8	40,4	42,9	45,0
25,8	30,6	32,9	34,4	36,2	37,8	38,9	40,6	43,0	45,5
26,6	30,8	33,1	34,4	36,5	37,8	39,1	40,8	43,1	46,0
27,0	31,1	33,4	34,6	36,8	37,9	39,3	41,1	43,1	46,5
27,5	31,3	33,6	34,6	37,1	38,1	39,5	41,4	43,2	47,2
28,0	31,5	33,8	34,8	37,3	38,1	39,7	41,7	43,5	47,8
28,6	31,8	33,8	34,9	37,4	38,3	39,9	42,0	43,7	48,6
29,2	32,0	34,0	35,1	37,5	38,4	40,1	42,3	43,9	50,2,
29,7	32,3	34,0	35,3	37,6	38,6	40,2	42,6	44,2	51,0

ВАРИАНТ 2

Результаты регистрации распределения скоростей автомобиля ГАЗ-51 по частоте при движении по дороге с асфальтобетонным покрытием представлены в виде вариационного ряда в таблице

28	32,5	34,5	36,4	37,1	38,5	39,6	40,8	42,0	44,0
28,5	32,9	34,5	36,4	37,1	38,8	39,6	40,8	42,5	44,5
29,0	33,2	35,0	36,4	37,1	38,8	40,0	40,8	42,5	44,5
30,0	33,2	35,0	36,4	37,5	38,8	40,0	41,2	42,8	45,2
31,0	33,5	35,3	36,8	37,5	38,8	40,0	41,2	42,8	45,6
31,5	33,5	35,6	36,8	37,5	39,2	40,0	41,5	43,1	45,6
31,5	34,0	35,6	36,8	37,9	39,2	40,3	41,5	43,1	46,0
32,0	34,0	36,0	36,8	37,9	39,2	40,3	41,5	43,5	46,5
32,0	34,0	36,0	36,8	38,5	39,2	40,3	42,0	43,5	47,0,
32,5	34,5	36,0	37,1	38,5	39,6	40,3	42,0	44,0	48,0

ВАРИАНТ 3

Результаты регистрации распределения скоростей автомобиля ГАЗ-51 по частоте при движении по грунтовой дороге представлены в виде вариационного ряда в таблице

25	29,2	30,3	31,8	32,2	32,8	33,5	34,2	35,2	36,8
26,3	29,3	30,6	31,8	32,2	32,8	33,8	34,2	35,5	37,2
27,1	29,4	30,8	31,8	32,2	33,1	33,8	34,2	35,5	37,5
27,4	29,4	31,1	31,8	32,2	33,1	33,8	34,4	35,8	37,8
27,7	29,6	31,1	32,0	32,5	33,1	33,8	34,4	35,8	38,4
28,0	29,6	31,3	32,0	32,5	33,3	34,0	34,6	36,2	38,4
28,0	29,8	31,3	32,0	32,5	33,3	34,0	34,6	36,2	38,9
28,4	30,1	31,3	32,0	32,5	33,5	34,0	34,9	36,5	39,4
28,8	30,1	31,5	32,0	32,8	33,5	34,0	34,9	36,5	40,2
29,1	30,1	31,5	32,0	32,8	33,5	34,0	35,2	36,8	41,0

ВАРИАНТ 4

В таблице приведены результаты анализа эффективности работы 120 предприятий области по величине роста выработки на одного рабочего в отчетном году (в % к предыдущему).

80,0	92,5	97,8	101,4	103,7	106,6	109,3	112,7	116,5	124,0
82,0	93,0	98,0	101,6	104,0	106,6	109,5	113,0	117,0	125,0
83,0	93,5	98,4	101,8	104,2	106,9	109,7	113,3	117,5	126,0
84,0	94,0	98,8	102,0	104,4	107,2	109,9	113,6	118,0	126,5
85,0	94,5	99,2	102,2	104,6	107,5	110,3	113,9	119,0	127,4
86,0	95,0	99,6	102,4	104,8	107,8	110,6	114,2	119,5	128,6
87,0	95,5	100,2	102,5	105,1	108,1	110,9	114,5	120,5	130,0
88,0	96,0	100,4	102,8	105,3	108,4	111,2	114,8	121,0	131,5
90,5	96,5	100,6	103,0	105,5	108,5	111,5	115,1	121,5	133,5
91,0	96,8	100,8	103,2	105,7	108,7	111,8	115,4	122,0	135,3
91,5	97,2	101,0	103,4	106,0	108,9	112,1	115,7	123,0	137,6
92,0	97,5	101,2	103,6	106,3	109,1	112,4	116,0	123,5	140,0

ВАРИАНТ 5

В таблице приведены результаты анализа эффективности работы 110 промышленных предприятий области по величине роста валовой продукции в отчетном году (в % к предыдущему году).

80	94	102	107,5	111,2	114,4	117,7	122	127,5	135,5
82	94,5	102,5	108	111,4	114,7	118	122,5	128	136
84	95	103	108,5	111,6	115	118,3	123	128,5	136,5
86	96	103,5	109	111,8	115,3	118,6	123,5	129	137,5
88	97	104	109,5	112	115,6	118,9	124	129,5	138,5
89	98	104,5	109,7	112,3	115,9	119,2	124,5	130,5	139,5
91	99	105	110,3	112,6	116,2	119,5	125	131,5	140,5
91,5	100,3	105,5	110,4	112,9	116,5	119,8	125,5	132,5	142
92	100,5	106	110,6	113,5	116,8	120,4	126	133,5	144
92,5	101	106,5	110,8	113,8	117,1	121	126,5	134,5	147
93	101,5	107	111	114,1	117,4	121,5	127	135	150

ВАРИАНТ 6

В таблице приведены результаты анализа эффективности работы 80 промышленных предприятий края по выполнению плана выработки на одного работающего (в % к предыдущему году).

90	96,8	100,5	101,7	102,9	104,1	106,6	109,6
91	97,1	100,6	101,8	103	104,3	106,8	109,8
92	97,4	100,8	101,9	103,2	104,5	107,1	110,5
93	97,7	100,9	102	103,3	104,8	107,4	111
94	98	101	102,2	103,4	105,2	107,8	111,5
95.3	98,3	101,2	102,3	103,5	105,4	108,2	112,2
95,6	99	101,3	102,4	103,6	105,6	108,5	113
95,9	99,5	101,4	102,5	103,7	105,8	108,8	113,5
96,2	100,2	101,5	102,6	103,8	106,2	109,2	114,5
96,5	100,3	101,6	102,8	103,9	106,4	109,4	115

ВАРИАНТ 7

Результаты 120 измерений случайной величины X – диаметра инструмента приведены в таблице в виде вариационного ряда.

144,0	144,69	144,98	145,21	145,29	145,38	145,48	145,58	145,84	146,16
144,1	144,72	145,0	145,22	145,30	145,39	145,49	145,59	145,86	146,20
144,2	144,78	145,02	145,23	145,31	145,40	145,50	145,62	145,88	146,24
144,3	144,82	145,06	145,24	145,32	145,40	145,51	145,64	145,90	146,28
144,4	144,84	145,08	145,24	145,33	145,41	145,52	145,66	145,92	146,32
144,44	144,85	145,10	145,25	145,34	145,42	145,52	145,68	145,94	146,36
144,48	144,86	145,11	145,26	145,35	145,43	145,53	145,70	145,95	146,45
144,52	144,88	145,12	145,27	145,36	145,44	145,54	145,72	145,97	146,50
144,56	144,90	145,14	145,28	145,36	145,44	145,55	145,74	145,99	146,55
144,60	144,92	145,15	145,28	145,37	145,45	145,56	145,76	146,04	146,66
144,63	144,94	145,16	145,28	145,37	145,46	145,57	145,78	146,08	146,68
144,66	144,96	145,18	145,28	145,38	145,47	145,57	145,80	146,12	146,70

ВАРИАНТ 8

Результаты 100 измерений случайной величины X (в мк) - отклонения размера детали от номинального приведены в таблице.

-20	-9	-3	0,4	2,4	4,6	6,8	9,1	12,6	18
-18	-8,5	-2,5	0,6	2,6	4,9	7	9,5	12,9	18,5
-17	-7,5	-2,2	0,8	2,8	5,2	7,2	10,3	13,3	19
-16	-7	-2,1	1,0	3,0	5,4	7,4	10,6	13,8	19,5
-14	-6	-2,0	1,2	3,2	5,6	7,6	10,9	14,5	21
-13	-5,5	-1,8	1,4	3,4	5,8	7,8	11,2	15,5	22
-12	-4,5	-1,6	1,6	3,6	6	8	11,5	16	23
-11	-4	-1,4	1,8	3,8	6,2	8,2	11,8	16,5	24
-10,5	-3,5	-0,8	2,0	4	6,4	8,4	12	17	27
-9,5	-3,5	0,2	2,2	4,3	6,6	8,7	12,3	17,5	30

ВАРИАНТ 9

Результаты 100 измерений случайной величины X (отклонения контролируемого размера изделия от номинала) представлены в виде вариационного ряда в таблице

0,20	0,65	0,79	0,94	1,10	1,22	1,35	1,56	1,71	1,91
0,25	0,66	0,81	0,96	1,11	1,23	1,37	1,58	1,72	1,93
0,32	0,67	0,83	0,98	1,12	1,24	1,41	1,60	1,73	1,95
0,41	0,68	0,85	0,99	1,13	1,25	1,43	1,61	1,76	1,97
0,45	0,69	0,86	1,01	1,14	1,26	1,45	1,63	1,79	1,99
0,50	0,70	0,87	1,03	1,15	1,28	1,46	1,64	1,82	2,01
0,54	0,71	0,88	1,05	1,16	1,30	1,48	1,65	1,83	2,05
0,58	0,73	0,90	1,07	1,17	1,31	1,50	1,67	1,85	2,09
0,61	0,74	0,92	1,08	1,18	1,32	1,52	1,68	1,87	2,17
0,63	0,76	0,93	1,09	1,21	1,33	1,54	1,69	1,89	2,25

ВАРИАНТ 10

Результаты 100 измерений случайной величины X – отклонения внутреннего диаметра шестерен, обработанных на станке, от заданного размера представлены в виде вариационного ряда в таблице

1	6	8	9,6	10,9	11,9	13,5	14,7	16,4	18,7
1,5	6,2	8,2	9,8	11	12	13,6	14,9	16,6	19
2	6,4	8,4	10,1	11,1	12,2	13,7	15,2	16,8	19,1
2,5	6,6	8,6	10,2	11,2	12,3	13,9	15,3	17	19,3
3,5	6,8	8,7	10,3	11,3	12,5	14	15,4	17,1	19,6
4,5	7	8,8	10,4	11,4	12,7	14,1	15,6	17,3	19,9
5,2	7,2	8,9	10,5	11,5	12,8	14,3	15,8	17,5	21
5,4	7,4	9	10,6	11,6	13	14,4	16	17,8	22
5,6	7,6	9,2	10,7	11,7	13,2	14,5	16,1	18,1	23
5,8	7,8	9,4	10,8	11,8	13,4	14,6	16,2	18,4	24

ВАРИАНТ 11

Результаты регистрации средней эксплуатационной скорости движения такси на маршрутах города представлены в виде вариационного ряда в таблице

33	40,2	42,5	44,2	45,6	47,7	48,6	50,3	52,8	54,6
34,5	40,4	42,7	44,3	45,9	47,7	48,8	50,4	52,9	55,0
35,8	40,6	42,9	44,4	46,2	47,8	48,9	50,6	53,0	45,5
36,6	40,8	43,1	44,4	46,5	47,8	49,1	50,8	53,1	46,0
37,0	41,1	43,4	44,6	46,8	47,9	49,3	51,1	53,1	46,5
37,5	41,3	43,6	44,6	47,1	48,1	49,5	51,4	53,2	47,2
38,0	41,5	43,8	44,8	47,3	48,1	49,7	51,7	53,5	47,8
38,6	41,8	43,8	44,9	47,4	48,3	49,9	52,0	53,7	48,6
39,2	42,0	44,0	45,1	47,5	48,4	50,1	52,3	53,9	50,2,
39,7	42,3	44,0	45,3	47,6	48,6	50,2	52,6	54,2	51,0

ВАРИАНТ 12

Результаты 100 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

4	6,8	8,2	9,8	11,1	12,8	14,2	15,8	17,6	19,6
4,2	6,9	8,4	9,9	11,2	12,9	14,4	15,9	17,7	19,8
4,5	7	8,6	10,1	11,4	13	14,6	16,2	17,9	19,9
4,8	7,1	8,8	10,2	11,6	13,1	14,8	16,4	18,2	20,3
5,1	7,2	8,9	10,3	11,7	13,2	15	16,6	18,4	20,6
5,4	7,3	9	10,4	11,8	13,4	15,1	16,8	18,6	20,9
5,7	7,4	9,2	10,6	11,9	13,5	15,2	17	18,8	21,2
6,2	7,6	9,3	10,8	12,2	13,6	15,3	17,1	19	21,4
6,4	7,8	9,4	10,9	12,4	13,8	15,5	17,2	19,2	21,7
6,6	7,9	9,6	11	12,6	13,9	15,7	17,4	19,4	22

ВАРИАНТ 13

Результаты 80 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

65	91,5	99,5	111	116	121,3	124,3	129	139	156
74	92,5	100,5	111,8	116,7	122	124,5	130,5	141	159
77	93,5	101,5	112,5	117,3	122,3	124,8	131,5	143	162
79	94,5	102,5	113	118	122,6	125,2	132,5	144	165
81	95,5	103,5	113,8	118,8	122,9	125,8	133,5	145	167
83	96,5	104,5	114,2	119,3	123,3	126,3	134,5	147	170
85	97,5	106	114,7	120	123,6	127	136	149	173
89	98,5	108	115,4	120,8	124	128	137,5	153	175

ВАРИАНТ 14

Результаты 100 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

1,0	5,1	7,1	9,1	10,05	10,7	11,35	12,05	13,3	16,3
1,5	5,3	7,3	9,2	10,1	10,8	11,4	12,1	13,6	16,7
2	5,5	7,5	9,3	10,15	10,85	11,45	12,2	13,9	17,4
2,5	5,7	7,7	9,4	10,2	10,9	11,5	12,3	14,2	17,8
3	5,9	7,9	9,5	10,25	10,95	11,6	12,4	14,5	18,2
3,5	6,2	8,2	9,6	10,3	11	11,7	12,5	14,8	18,6
4	6,4	8,4	9,7	10,35	11,1	11,75	12,6	15,1	19
4,3	6,6	8,6	9,8	10,4	11,2	11,8	12,7	15,4	19,4
4,6	6,8	8,8	9,9	10,5	11,25	11,9	12,8	15,7	20
4,9	7	8,9	10	10,6	11,3	12	12,9	16	21

ВАРИАНТ 15

Результаты 100 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

2	7,3	10,1	11,5	12,7	13,7	15,2	16,4	18,4	21,2
3	7,6	10,3	11,6	12,8	13,8	15,3	16,6	18,6	21,6
3,5	7,9	10,5	11,8	12,9	13,9	15,4	16,8	18,8	22,5
4	8,2	10,7	11,9	13	14	15,5	16,9	19	23
4,5	8,5	10,9	12,1	13,1	14,2	15,6	17,2	19,3	23,5
5	8,8	11	12,2	13,2	14,4	15,7	17,4	19,6	24
5,5	9	11,1	12,3	13,3	14,6	15,8	17,6	19,9	24,5
6	9,3	11,2	12,4	13,4	14,8	15,9	17,8	20,2	25
6,5	9,5	11,3	12,5	13,5	15	16	18	20,5	26
6,9	9,8	11,4	12,6	13,6	15,1	16,2	18,2	20,8	27

ВАРИАНТ 16

Результаты 80 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

7,5	8,2	8,7	9,1	9,3	9,4	9,7	9,8	10,1	10,5
7,6	8.3	8,8	9,1	9,3	9,5	9,7	9,9	10,1	10,6
7,7	8,4	8,8	9,1	9,3	9,5	9,7	9,9	10,2	10,7
7,8	8,5	8,8	9,2	9,3	9,58	9,7	9,9	10,2	10,8
7,9	8,6	8,9	9,2	9,4	9,5	9,8	9,9	10,3	10,9
8,0	8,6	8,9	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	10,3	11,0
8,1	8,7	8,9	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	10,4	11,2
8,2	8,7	9,0	9,3	9,4	9,6	9,8	10,0	10,4	11,5

ВАРИАНТ 17

Результаты 100 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

3	7,1	8,1	9,05	9,55	10,05	10,55	11,10	12,05	13,4
3,5	7,2	8,2	9,10	9,60	10,10	10,60	11,20	12,1	13,8
4	7,3	8,3	9,15	9,65	10,15	10,65	11,30	12,2	14,2
4,5	7,4	8,4	9,20	9,70	10,20	10,70	11,40	12,3	14,5
5,5	7,5	8,4	9,25	9,75	10,25	10,75	11,50	12,4	14,9
5,8	7,6	8,6	9,30	9,80	10,30	10,80	11,60	12,5	15,3
6	7,7	8,7	9,35	9,85	10,35	10,85	11,70	12,6	15,6
6,2	7,8	8,8	9,40	9,90	10,40	10,90	11,80	12,7	15,9
6,5	7,9	8,9	9,45	9,95	10,45	10,93	11,90	12,8	16,2
6,8	8	8,95	9,50	10	10,50	10,97	12,0	12,9	16,8

ВАРИАНТ 18

Результаты 100 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

11	13,2	14,5	15,35	15,73	16,15	16,57	16,87	17,9	19,2
11,2	13,4	14,6	15,40	15,76	16,20	16,60	16,91	18	19,4
11,4	13,5	14,7	15,50	15,78	16,25	16,63	16,95	18,1	19,6
11,6	13,6	14,8	15,52	15,80	16,30	16,66	17,2	18,2	19,8
11,8	13,7	15,05	15,54	15,83	16,35	16,70	17,3	18,3	20
12	13,9	15,10	15,57	15,87	16,40	16,73	17,5	18,4	20,2
12,2	14	15,15	15,60	15,91	16,45	16,76	17,5	18,5	20,4
12,5	14,1	15,20	15,63	15,95	16,50	16,78	17,6	18,6	20,6
12,8	14,3	15,25	15,66	16,05	16,52	16,80	17,7	18,7	20,8
13,1	14,4	15,30	15,70	16,10	16,54	16,83	17,8	18,8	21

ВАРИАНТ 19

Результаты 100 измерений диаметров шейки вала стартера после токарной обработки представлены в виде вариационного ряда в таблице

12,95	13,04	13,07	13,10	13,11	13,12	13,13	13,15	13,18	13,22
12,97	13,05	13,07	13,10	13,11	13,12	13,13	13,15	13,18	13,22
12,98	13,05	13,07	13,10	13,11	13,13	13,14	13,16	13,19	13,22
13,0	13,05	13,08	13,10	13,11	13,13	13,14	13,16	13,19	13,22
13,0	13,05	13,08	13,10	13,12	13,13	13,14	13,16	13,19	13,23
13,01	13,05	13,08	13,10	13,12	13,13	13,14	13,16	13,20	13,26
13,02	13,06	13,08	13,10	13,12	13,13	13,15	13,17	13,20	13,26
13,02	13,06	13,09	13,10	13,12	13,13	13,15	13,17	13,20	13,30
13,03	13,06	13,09	13,10	13,12	13,13	13,15	13,17	13,21	13,30
13,04	13,07	13,09	13,10	13,12	13,13	13,15	13,18	13,21	13,35

ВАРИАНТ 20

Результаты 100 измерений диаметров партии валов представлены в виде вариационного ряда в таблице

12,80	12,91	12,97	13,0	13,04	13,07	13,09	13,12	13,17	13,23
12,84	12,92	12,97	13,01	13,04	13,07	13,09	13,13	13,18	13,23
12,86	12,93	12,97	13,02	13,04	13,07	13,09	13,13	13,18	13,24
12,87	12,94	12,98	13,02	13,04	13,07	13,09	13,14	13,19	13,25
12,88	12,94	12,98	13,02	13,04	13,07	13,09	13,14	13,20	13,26
12,88	12,94	12,98	13,02	13,05	13,07	13,10	13,15	13,20	13,26
12,90	12,94	12,98	13,02	13,05	13,07	13,11	13,16	13,21	13,30
12,90	12,94	12,99	13,02	13,06	13,08	13,11	13,16	13,21	13,30
12,90	12,95	12,99	13,02	13,06	13,08	13,11	13,17	13,22	13,36
12,91	12,96	13,0	13,04	13,07	13,08	13,11	13,17	13,22	13,40

ВАРИАНТ 21

Результаты 100 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

45	56,5	62,3	64,8	66,8	68,3	69,3	70,8	72,5	77
49	57,5	62,6	65	67	68,4	69,4	71	72,7	77,5
51	58,5	62,9	65,1	67,2	68,5	69,5	71,2	72,9	78,5
51,5	59	63,2	65,2	67,4	68,6	69,6	71,4	73,3	79
52,5	59,5	63,5	65,4	67,6	68,7	69,7	71,6	73,7	79,5
53,5	60	63,7	65,6	67,8	68,8	69,8	71,8	74,5	80,5
54,5	60,5	64	65,8	67,9	68,9	69,9	71,9	75	81,5
55	61	64,2	66,2	68	69	70,2	72	75,5	83
55,5	61,3	64,4	66,4	68,1	69,1	70,4	72,1	76	84
56	61,7	64,6	66,6	68,2	69,2	70,6	72,3	76,5	86

ВАРИАНТ 22

Результаты 100 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

27,5	38	43,7	46,8	49,4	51,4	52,9	55,5	59,5	66
29	38.5	44	47,2	49,6	51,6	53,3	55,8	60	67
30	39	44,3	47,8	49,8	51,7	53,5	56	61	68
31,5	39,5	44,6	48	50	51,8	53,8	56,3	61,5	69
33	40	44,8	48,2	50,2	51,9	54	56,6	62	70
33,5	41,5	45	48,4	50,4	52	54,3	56,9	63	71
34	42	45,5	48,6	50,6	52,1	54,5	57,3	63,5	72
35	43	46	48,8	50,8	52,2	54,8	58	64	73,5
36	43,2	46,3	49	51	52,3	55	58,5	64,5	75,5
37	43,4	46,6	49,2	51,2	52,5	55,2	59	65	77,5

ВАРИАНТ 23

Результаты 100 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

97,5	98,70	99,13	99,44	99,75	100,04	100,24	100,55	100,88	101,34
97,8	98,75	99,16	99,52	99,78	100,06	100,26	100,59	100,92	101,38
98,1	98,80	99,19	99,54	99,81	100,08	100,28	100,62	100,96	101,42
98,2	98,83	99,22	99,56	99,84	100,10	100,30	100,65	101,00	101,46
98,3	98,87	99,25	99,58	99,86	100,12	100,33	100,68	101,05	101,55
98,35	99,02	99,28	99,60	99,89	100,14	100,36	100,71	101,10	101,70
98,45	99,04	99,31	99,63	99,92	100,16	100,39	100,74	101,15	101,80
98,55	99,06	99,35	99,66	99,95	100,18	100,42	100,77	101,20	101,95
98,60	99,08	99,38	99,69	99,98	100,20	100,45	100,80	101,25	102,20
98,65	99,10	99,42	99,72	100,02	100,22	100,51	100,84	101,30	102,50

ВАРИАНТ 24

Результаты 100 измерений случайной величины X - чувствительности телевизора (в микровольтах) приведены в в виде вариационного ряда в таблице

200	395	460	508	528	548	572	605	660	725
305	405	465	510	530	550	575	610	665	735
315	410	470	512	532	552	578	615	670	745
325	420	475	514	534	554	581	620	675	755
335	425	480	516	536	556	584	625	680	765
345	430	485	518	538	558	587	630	685	775
355	435	490	520	540	560	590	635	690	785
365	440	502	522	542	563	593	640	695	800
375	450	504	524	544	566	596	645	705	820
385	455	506	526	546	569	599	655	715	840

ВАРИАНТ 25

Результаты 100 измерений расстояния, выполненные одним и тем же инструментом и способом, представлены в виде вариационного ряда в таблице

8930	9063	9092	9117	9135	9161	9171	9195	9215	9255
8982	9067	9095	9117	9138	9163	9174	9198	9219	9260
8995	9070	9098	9119	9140	9163	9176	9198	9221	9265
9010	9070	9100	9121	9143	9165	9178	9200	9225	9270
9025	9074	9103	9124	9145	9165	9180	9203	9228	9275
9031	9080	9105	9127	9148	9167	9183	9205	9230	9280
9036	9082	9110	9130	9150	9168	9185	9207	9235	9290
9042	9085	9112	9130	9155	9170	9187	9208	9240	9300
9050	9088	9114	9131	9158	9170	9189	9212	9245	9315
9057	9090	9116	9133	9160	9170	9192	9212	9250	9330

ВАРИАНТ 26

Результаты 100 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

2,0	4,9	6,4	7,1	8,1	8,6	9,1	9,8	10,7	12,3
3,0	5,0	6,5	7,2	8,1	8,7	9,1	9,8	10,8	12,5
4,0	5,1	6,6	7,3	8,2	8,7	9,2	9,9	10,9	12,8
4,1	5,3	6,6	7,5	8,2	8,8	9,3	10,0	11,1	13,1
4,3	5,6	6,7	7,7	8,3	8,8	9,4	10,0	11,2	13,5
4,4	5,9	6,8	7,8	8,3	8,9	9,4	10,1	11,4	13,9
4,5	6,0	6,9	7,8	8,4	8,9	9,5	10,2	11,6	14,4
4,6	6,1	7,0	7,9	8,4	9,0	9,5	10,3	11,8	14,9
4,8	6,2	7,0	8,0	8,5	9,0	9,6	10,5	11,9	15,4
4,8	6,3	7,1	8,0	8,6	9,0	9,7	10,6	12,1	16,0

ВАРИАНТ 27

Результаты 100 измерений случайной величины X (отклонения контролируемого размера изделия от номинала) представлены в виде вариационного ряда в таблице

0,24	0,65	0,80	0,95	1,10	1,23	1,35	1,56	1,71	1,92
0,28	0,66	0,82	0,97	1,12	1,24	1,37	1,58	1,72	1,94
0,36	0,67	0,84	0,99	1,13	1,25	1,41	1,60	1,73	1,96
0,43	0,68	0,86	1,00	1,14	1,26	1,43	1,61	1,76	1,98
0,48	0,69	0,87	1,02	1,15	1,26	1,45	1,63	1,79	2,0
0,52	0,70	0,88	1,04	1,16	1,28	1,46	1,64	1,82	2,03
0,56	0,72	0,89	1,06	1,17	1,30	1,48	1,65	1,84	2,07
0,60	0,74	0,91	1,07	1,18	1,31	1,50	1,67	1,86	2,13
0,62	0,75	0,92	1,08	1,21	1,32	1,52	1,68	1,88	2,23
0,64	0,78	0,94	1,09	1,22	1,33	1,54	1,69	1,90	2,30

ВАРИАНТ 28

Результаты 100 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

0,50	1,02	1,16	1,26	1,34	1,40	1,48	1,55	1,65	1,86
0,70	1,03	1,17	1,27	1,34	1,41	1,49	1,56	1,67	1,88
0,78	1,04	1,18	1,27	1,35	1,41	1,49	1,56	1,68	1,89
0,84	1,06	1,19	1,28	1,35	1,42	1,50	1,57	1,70	1,92
0,90	1,08	1,21	1,29	1,36	1,42	1,51	1,57	1,72	1,96
0,92	1,09	1,22	1,30	1,36	1,43	1,52	1,58	1,74	2,0
0,93	1,10	1,23	1,30	1,37	1,43	1,53	1,59	1,75	2,06
0,95	1,12	1,24	1,31	1,37	1,44	1,53	1,60	1,78	2,13
0,96	1,14	1,25	1,32	1,38	1,46	1,54	1,61	1,81	2,21
0,98	1,15	1,26	1,33	1,39	1,47	1,54	1,63	1,84	2,30

ВАРИАНТ 29

Результаты 80 измерений случайной величины X представлены в виде вариационного ряда в таблице

50	91	99	110,5	115,8	121	124,3	129,5	140	157
72	92	100	111,3	116,4	121,7	124,5	131	142	160
76	93	101	112	117	122,3	125	132	143,5	164
78	94	102	112,6	117,8	122,5	125,5	133	144,5	166
80	95	103	113,3	118,5	122,8	126	134	146	168
82	96	104	114	119	123,3	126,6	135	148	172
84	97	105	114,4	119,8	123,6	127,5	137	152	176
87	98	107	115	120,5	124	128,5	138	154	180

ВАРИАНТ 30

В таблице представлены в виде вариационного ряда результаты 80 измерений случайной величины X - диаметра отверстий, просверленных одним и тем же сверлом.

50,24	50,30	50,31	50,33	50,34	50,34	50,35	50,37	50,38	50,41
50,27	50,30	50,32	50,33	50,34	50,35	50,36	50,37	50,39	50,41
50,28	50,30	50,32	50,33	50,34	50,35	50,36	50,37	50,39	50,42
50,28	50,30	50,32	50,33	50,34	50,35	50,36	50,37	50,39	50,42
50,29	50,31	50,32	50,33	50,34	50,35	50,36	50,37	50,40	50,43
50,29	50,31	50,32	50,33	50,34	50,35	50,36	50,37	50,40	50,43
50,30	50,31	50,32	50,33	50,34	50,35	50,36	50,38	50,40	50,44
50,30	50,31	50,33	50,34	50,34	50,35	50,36	50,38	50,41	50,44

Задача 2.

Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X и коэффициент их корреляции по экспериментальным данным из таблицы

Вариант 1

n_{ij}		X				
		1.5	2.5	3.5	4.5	5.5
Y	10	1	3			
	12	5	2			
	14		15	7		
	16			35	5	
	18			8	10	2
	20				3	4

Вариант 2

n_{ij}		X					
		12	16	20	24	28	32
Y	15	4	2				
	20		5	3			
	25			5	45	5	
	30			2	8	7	
	35				4	7	3

Вариант 3

n_{ij}		X					
		15	18	21	24	27	30
Y	20	2	4				
	25		6	3	35	4	
	30			6	8	6	
	35			2	4	7	3
	40				6	4	

Вариант 4

n_{ij}		X					
		6	12	18	24	30	36
Y	5	3	3				
	10		5	4			
	15			8	40	2	
	20			5	10	6	
	25				4	7	3

Вариант 5

n_{ij}		X					
		-6	0	6	12	18	24
Y	1	8	1				
	2	1	4	9			
	3		1	10	31		
	4			4	16	7	
	5				2	13	8

Вариант 6

n_{ij}		X					
		6	12	18	24	30	36
Y	5					3	3
	10				4	5	
	15		2	40	8		
	20		6	10	5	6	
	25	3	7	4			

Вариант 7

n_{ij}		X					
		10	20	30	40	50	60
Y	30	5	10				
	40			15		5	
	50			20	80		
	60		5		10	35	
	70	5					10

Вариант 8

n_{ij}		X				
		50	55	60	65	70
Y	30				5	5
	40	4	6			
	50		15	40		
	60			10	5	
	70				5	
	80				3	2

Вариант 9

n_{ij}		X					
		10	20	30	40	50	60
Y	60	5	3				
	75		18	7			
	90	2		30	10		
	105				12	3	4
	120					2	4

Вариант 10

n_{ij}		X					
		5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
Y	4	6	4				
	6		10	8			
	8			4	35	5	
	10			6	10	4	
	12				3	3	2

Вариант 11

n_{ij}		X					
		5	8	11	14	17	20
Y	5	2	4				
	10		6	2			
	15			3	50	2	
	20			1	10	6	
	25				4	7	3

Вариант 12

n_{ij}		X					
		10	20	30	40	50	60
Y	30					10	5
	40				15		
	50			80	20		
	60		35	10		5	
	70	10	3			2	

Вариант 13

n_{ij}		X				
		15.5	16.0	16.5	17.0	17.5
Y	12	5	2			
	13	3	15	6		
	14		8	20	7	
	15			9	15	2
	16				2	6

Вариант 14

n_{ij}		X				
		2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
Y	2.5	10	3			4
	3.0	7	30	15		
	3.5		10	50	15	
	4.0			10	30	6
	4.5					10

Вариант 15

n_{ij}		X					
		65	75	85	95	105	115
Y	80	5	3				
	85	3	30	8			
	90			70	10		
	95			10	40	10	
	100					6	5

Вариант 16

n_{ij}		X				
		40	50	60	70	80
Y	25	2				
	40	6	15	10		4
	55		8	15	5	
	70			7	15	8
	85	2				3

Вариант 17

n_{ij}		X					
		8	13	18	23	28	33
Y	18	2					
	28	2	10			4	
	38		10	30	5		
	48			15	7	8	2
	58						3

Вариант 18

n_{ij}		X				
		25	30	35	40	45
Y	20					2
	22			5	4	3
	24			35	10	
	26	5	10	5		
	28		7			
	30	6	8			

Вариант 19

n_{ij}		X					
		50	60	70	80	90	100
Y	35	3	2				
	40	4	10				
	45			18	8		
	50			7	32	1	
	55					8	2
	60				1		4

Вариант 20

n_{ij}		X					
		2	7	12	17	22	27
Y	10	2	4				
	20		6	2			
	30			3	50	2	
	40			1	10	6	
	50				4	7	3

Вариант 21

n_{ij}		X					
		5	10	15	20	25	30
Y	8	2	4				
	12		3	7			
	16			5	30	10	
	20			7	10	8	
	24				5	6	3

Вариант 22

n_{ij}		X					
		15	20	25	30	35	40
Y	5	4	2				
	8		6	4			
	11			6	45	2	
	14			2	3	6	
	17				4	7	4

Вариант 23

n_{ij}		X					
		4	9	14	19	24	29
Y	10	2	3				
	20		7	3			
	30			2	50	2	
	40				10	6	
	50				1	6	4

Вариант 24

n_{ij}		X					
		15	18	20	24	30	36
Y	5					3	3
	10				4	5	
	15		2	40	8	2	
	20	8	2	10			
	25	9	12	4			

Вариант 25

n_{ij}		X					
		10	15	20	25	30	35
Y	30	2	6				
	40		4	4			
	50			7	35	8	
	60			2	10	8	
	70				5	6	3

Вариант 26

n_{ij}		X					
		8	14	20	26	32	38
Y	6	4	2				
	12		6	2			
	18		1	5	40	3	
	24				8	7	
	30					7	8

Вариант 27

n_{ij}		X					
		8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
Y	14	6	2				
	17	3	12	10			
	20			32	8		
	23				14	3	3
	26					5	4

Вариант 28

n_{ij}		X				
		4.2	4.4	4.6	4.8	5.
Y	3.5	4	3			
	3.6		2		3	
	3.7	6	9	35		
	3.8			15	8	7
	3.9				2	3
	4.0					3

Вариант 29

n_{ij}		X				
		25	30	35	40	45
Y	20	2				
	22	3	4	5		
	24			35	10	
	26			5	10	
	28				7	
	30				8	6

Вариант 30

n_{ij}		X				
		50	55	60	65	70
Y	30	1			5	
	40				6	4
	50			40	15	
	60	5	10			
	70		5			
	80	2	3			

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Высшая школа, 1977. -479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. -М.: Высшая школа, 1979. -400 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. -М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, 1962. -564 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. –М.: Наука. Глав. ред. физ.-матем. лит-ры, 1969. -366 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.. –М.: Наука. Глав. ред. физ.-матем. лит-ры, 1988. -480 с.
6. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. -2-е изд. М.: Наука, 1974.
7. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1987. 400 с.
8. Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами: Учеб пособие. -2-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 232 с.
9. Письменный Дм. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. Изд. 2-е исправ. М.: Айрис-пресс, 2005. 256 с.
10. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Статистика, 1977.
11. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов втузов. –М.: Высш. шк. 1986. – 80 с.
12. Володин Б.Г., Ганин М.П., Динер И.Я., Комаров Л.Б., Свешников А.А., Старобин К.Б. Руководство для инженеров по решению задач по теории вероятностей. -Л.: Судпромгиз, 1962. 424 с.
13. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки вычислений. –М.: Изд-во Наука. Глав. ред. физ.-матем. лит-ры, 1968. -288 с.
14. Меняйлов А.И. Математический практикум: Учебное пособие для высшей школы. - М.: Академический Проект, 2003. -192 с. – (“Gaudeamus”).

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
3,0	0,0044	0042	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002

В крайнем левом столбце указаны целые и десятые доли величины x, а в верхней строке – ее сотые доли.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	*Φ(x)*	*X*	*Φ(x)*	*X*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0	0.0000	0.64	0.2389	1.28	0.3997	1.92	0.4726
0.02	0.0080	0.66	0.2454	1.30	0.4032	1.94	0.4738
0.04	0.0160	0.68	0.2517	1.32	0.4066	1.96	0.4750
0.06	0.0239	0.70	0.2580	1.34	0.4099	1.98	0.4761
0.08	0.0319	0.72	0.2642	1.36	0.4131	2.00	0.4772
0.10	0.0398	0.74	0.2703	1.38	0.4162	2.05	0.4798
0.12	0.0478	0.76	0.2764	1.40	0.4192	2.10	0.4821
0.14	0.0557	0.78	0.2823	1.42	0.4222	2.15	0.4842
0.16	0.0636	0.80	0.2881	1.44	0.4251	2.20	0.4861
0.18	0.0714	0.82	0.2939	1.46	0.4279	2.25	0.4878
0.20	0.0793	0.84	0.2995	1.48	0.4306	2.30	0.4893
0.22	0.0871	0.86	0.3051	1.50	0.4332	2.35	0.4907
0.24	0.0948	0.88	0.3106	1.52	0.4357	2.40	0.4918
0.26	0.1026	0.90	0.3159	1.54	0.4382	2.45	0.4929
0.28	0.1103	0.92	0.3212	1.56	0.4406	2.50	0.4938
0.30	0.1179	0.94	0.3264	1.58	0.4429	2.55	0.4947
0.32	0.1255	0.96	0.3315	1.60	0.4452	2.60	0.4953
0.34	0.1331	0.98	0.3365	1.62	0.4474	2.65	0.4960
0.36	0.1406	1.00	0.3413	1.64	0.4495	2.70	0.4965
0.38	0.1480	1.02	0.3461	1.66	0.4515	2.75	0.4970
0.40	0.1554	1.04	0.3508	1.68	0.4535	2.80	0.4974
0.42	0.1628	1.06	0.3554	1.70	0.4554	2.85	0.4978
0.44	0.1700	1.08	0.3599	1.72	0.4573	2.90	0.4981
0.46	0.1772	1.10	0.3643	1.74	0.4591	2.95	0.4985
0.48	0.1844	1.12	0.3686	1.76	0.4608	3.00	0.49865
0.50	0.1915	1.14	0.3729	1.78	0.4625	3.20	0.49931
0.52	0.1985	1.16	0.3770	1.80	0.4641	3.40	0.49966
0.54	0.2054	1.18	0.3810	1.82	0.4656	3.60	0.49984
0.56	0.2123	1.20	0.3849	1.84	0.4671	3.80	0.499928
0.58	0.2190	1.22	0.3883	1.86	0.4686	4.00	0.499968
0.60	0.2257	1.24	0.3925	1.88	0.4699	4.50	0.499997
0.62	0.2324	1.26	0.3962	1.90	0.4713	5.00	0.499997

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

N \ γ	0,95	0,99	0,999	N \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

N	γ			N	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы s	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Вероятности $P(\lambda) = 1 - K(\lambda)$ распределения Колмогорова

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,3	0,99999	99998	99995	99991	99983	99970	99949	99917	99872	99807
0,4	99719	99603	99452	99262	99027	98741	98400	97998	97532	96998
0,5	96394	95719	94969	94147	93250	92282	91242	90134	88960	87724
0,6	86428	85077	83678	82225	80732	79201	77636	76042	74422	72781
0,7	71124	69453	67774	66089	64402	62717	61036	59367	57700	56050
0,8	54414	52796	51197	49619	48063	46532	45026	43545	42093	40668
0,9	39273	37907	36571	35266	33992	32748	31536	30356	29206	28087
1,0	27000	25943	24917	23922	22957	22021	21114	20236	19387	18566
1,1										
1,2	17772	17005	16264	15550	14861	14196	13556	12939	12355	11774
1,3	11225	10797	10190	09703	09235	08787	08357	07944	07550	07171
1,4	0,06809	6463	6132	5815	5513	5224	4949	4686	4435	4196
1,5	3968	3751	3545	3348	3162	2984	2815	2655	2503	2359
1,6	2222	2092	1969	1852	1742	1638	1539	1446	1357	1274
1,7	1195	1121	1051	0985	0922	0864	0808	0756	0707	0661
1,8	0,00618	577	539	503	469	438	408	380	354	330
1,9	307	285	265	247	229	213	198	186	170	158
2,0	146	136	126	115	107	100	092	085	079	073
	0,00067	62	57	53	48	45	41	38	35	32
2,1										
2,2	30	27	25	23	21	19	18	16	15	14
2,3	13	11	10	10	09	08	07	07	06	06
2,4	0,00005	5	4	4	4	3	3	3	2	2
2,5	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
	0,00001	0								

При $\lambda < 0{,}30$ $P(\lambda) = 1,$

При $\lambda > 2{,}50$ $P(\lambda) = 0.$

В крайнем левом столбце указаны целые и десятые доли величины $\lambda,$ а в верхней строке –ее сотые доли.

Ефим Александрович Коган

Элементы теории вероятностей и математической статистики. Учебное пособие по дисциплине “Математика” для студентов, обучающихся по специальности Автомобиле – и тракторостроение. М.: МГТУ “МАМИ”, 2007– 224 с.

Компьютерный набор и графика Д.Е.Ольховиков

Подписано в печать Заказ Тираж экз.

Гарнитура Times New Roman

Усл. п. л. Уч.-изд. л.

Бумага типографская формат 60:90/16

МГТУ “МАМИ” 107023, Москва, Б.Семеновская, 38

Для заметок