ЗАДАНИЕ Д-1

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Материальная точка M массой m, получив в точке A начальную скорость V_0, движется в изогнутой трубе ABC (рис. 1.1, 1.2), расположенной в вертикальной плоскости. Участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный. Угол наклона трубы $\alpha=30°$.

На участке AB на материальную точку действует сила тяжести $\vec{P}$, постоянная сила $\vec{Q}$ (ее направление указано на рисунках) и сила сопротивления среды $\vec{R}$, зависящая от скорости $\vec{V}$ груза (направлена сила против движения). Трением груза о трубу на участке AB пренебрегаем.

В точке B материальная точка, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на нее действует сила тяжести $\vec{P}$, сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f=0,2$) и переменная сила $\vec{F}$, проекция которой F_X на ось x приведена в таблице Д-1.

Известно расстояние $AB=l$ или время t_1 движения от точки A до точки B. Требуется найти закон движения материальной точки на участке BC : $x=f(t)$.

Указание. Решение задачи разбивается на две части. Сначала составляем и интегрируем методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения материальной точки на участке AB, учитывая начальные условия. В случае, когда задана длина отрезка AB, целесообразно перейти от интегрирования по t к интегрированию по переменной z с помощью формулы:

$$\frac{dV_Z}{dt}=\frac{dV_Z}{dt}\cdot\frac{dz}{dz}=V_Z\frac{dV_Z}{dz}\quad .$$

Зная время движения на участке AB или длину этого участка, определяем скорость материальной точки в конце участка, в точке B. Эта скорость принимается за начальную при исследовании движения материальной точки на участке BC. После этого составляем и интегрируем дифференциальное уравнение движения материальной точки на участке BC.

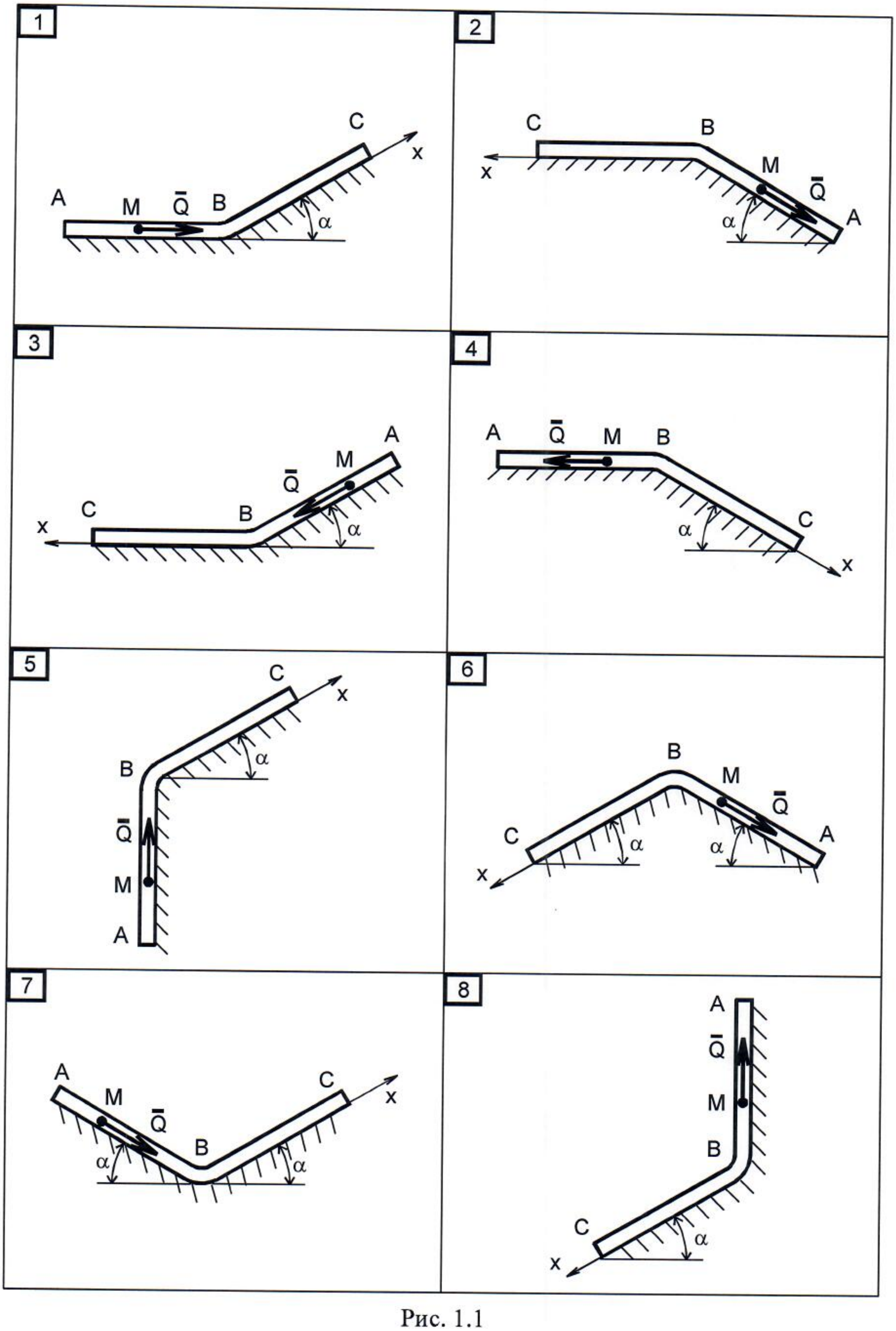
1
A M Q̄ B C x α
2
C B M Q̄ A x α
3
A M Q̄ C B x α
4
A Q̄ M B C x α
5
C x B α Q̄ M A
6
B M Q̄ C A x α α
7
A M Q̄ B C x α α
8
A Q̄ M B C x α

Рис. 1.1

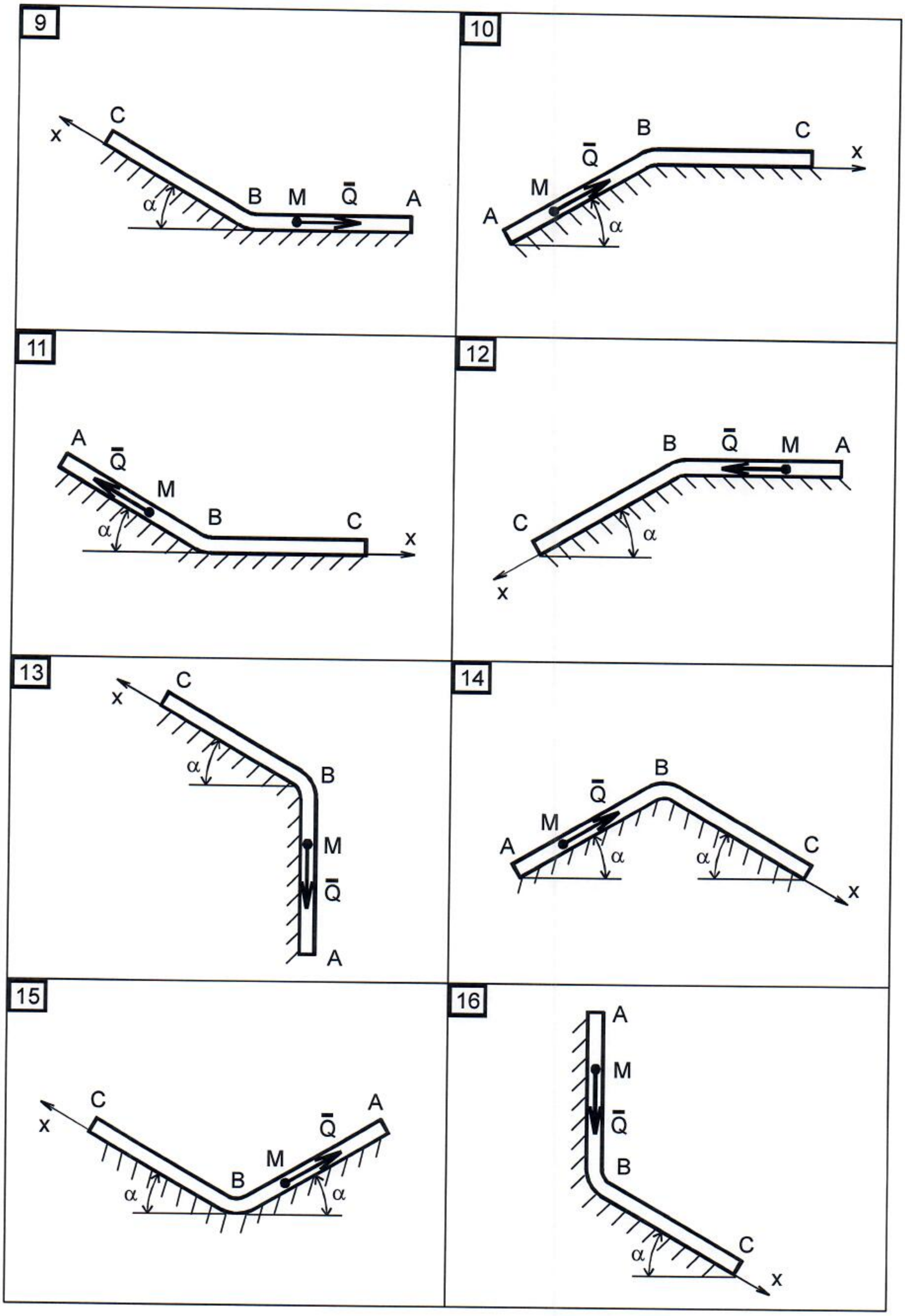
9
C
x
α
B M $\bar{Q}$ A
10
B
C
x
$\bar{Q}$
M
A
α
11
A
$\bar{Q}$
M
B
C
x
α
12
B $\bar{Q}$ M A
C
α
x
13
x C
α
B
M
$\bar{Q}$
A
14
B
$\bar{Q}$
M
A
α
α
C
x
15
C
x
A
$\bar{Q}$
M
B
α
α
16
A
M
$\bar{Q}$
B
C
α
x

Рис. 1.2

Таблица Д-1

№ варианта	Рис.	m (кг)	V_0, м/с	Q, Н	R, Н	μ	l, м	t_1, с	F_X, Н
1	1	4,5	18	9	μV	0,45	-	5	3sin2t
2	2	3	32	4	μV^2	0,8	2,5	-	-8cos4t
3	3	2	2	2	μV	0,4	-	2,5	2sin4t
4	4	6	14	18	μV^2	0,6	5	-	-3cos2t
5	5	1,6	18	4	μV	0,4	-	2	4cos4t
6	6	1,2	22	2	μV^2	0,8	0,5	-	6t
7	7	2	5	2	μV	0,4	-	2,5	2sin4t
8	8	2,4	12	6	μV^2	0,48	1,5	-	6t
9	9	1,8	15	6	μV	0,3	-	3	$9t^2$
10	10	4	12	12	μV^2	0,8	2,5	-	-8cos4t
11	11	2	20	6	μV	0,4	-	2,5	2sin4t
12	12	4,8	5	12	μV^2	0,24	5	-	-6sin2t
13	13	1,2	24	2	μV	0,4	-	1	4cos4t
14	14	2,4	12	6	μV^2	0,8	0,5	-	6t
15	15	4	10	6	μV	0,8	-	5	3sin2t
16	16	2,4	12	2	μV^2	0,48	1,5	-	6t
17	1	6	2,5	18	μV^2	0,6	5	-	-3cos2t
18	2	2	26	3	μV	0,6	-	5	2cos2t
19	3	4	2	4	μV^2	0,2	5	-	-6sin4t
20	4	1,6	18	4	μV	0,4	-	2	4cos4t
21	5	6	14	18	μV^2	0,6	5	-	-3cos2t
22	6	2,1	28	3	μV	0,5	-	3	8sin2t
23	7	2,4	1,2	2	μV^2	0,8	1,5	-	6t
24	8	2	20	6	μV	0,4	-	2,5	2sin4t
25	9	8	10	16	μV^2	0,8	15	-	-6cos2t
26	10	1,8	15	6	μV	0,3	-	2	$9t^2$
27	11	2,5	1,5	8	μV^2	0,75	2,5	-	3sin2t
28	12	3	2,2	9	μV	0,6	-	2,5	2cos2t
29	13	2	28	5	μV^2	0,6	0,5	-	-3cos2t
30	14	4,5	18	9	μV	0,5	-	3	8sin2t

Пример выполнения задания Д-1

На вертикальном участке *AB* трубы (рис.3) на точку массой $m=1$ кг действует сила тяжести и сила сопротивления $R=\mu V^2$. Скорость материальной точки *M* в начальный момент времени $t=0$ в точке *A* равна нулю. Длина участка $AB=2$ (м). На наклонном участке *BC* трубы ($\alpha=30^o$) на материальную точку действует сила тяжести, сила трения (коэффициент трения $f=0,2$) и переменная сила $F_X=16sin(3t)$. Требуется определить закон движения материальной точки на участке *BC*.

Решение

Рассмотрим движение материальной точки на участке *AB*. Изобразим на чертеже материальную точку *M* в произвольном положении. На точку действуют силы $\vec{P}$ и $\vec{R}$. Введем ось *z* в направлении от точки *A* к точке *B*. Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось *z*

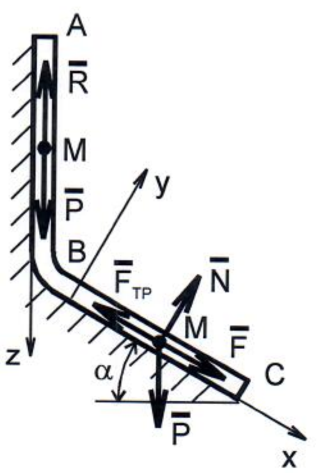

Рис. 1.3

$$m\frac{dV_Z}{dt}=\sum F_{KZ}$$ или

$$m\frac{dV_Z}{dt}=P_Z+R_Z\ ,$$

Учитывая, что $P_Z=mg$, $R_Z=-\mu V^2$, $V_Z=V$, получим

$$m\frac{dV}{dt}=mg-\mu V^2,\quad \text{или}\quad \frac{dV}{dt}=g-\frac{\mu}{m}V^2. \tag{1}$$

Введем обозначение $b=\dfrac{\mu}{m}=\dfrac{0,5}{1}=0,5$ (1/м).

Тогда (1) запишется так

$$\frac{dV}{dt} = g - bV^2 \quad . \qquad (2)$$

Так как в условии задачи задана длина участка *AB*, то целесообразно при интегрировании перейти от переменной *t* к переменной *z* в уравнении (2). Домножим на *dz* правую и левую части уравнения (2), получим

$$dz\frac{dV}{dt} = \left(g - bV^2\right)dz \quad , \text{ т. к. } \quad \frac{dz}{dt} = V \quad , \text{ то имеем}$$

$$VdV = \left(g - bV^2\right)dz \qquad (3)$$

Разделим переменные в уравнении (3) и вычислим интегралы от обеих частей равенства

$$\frac{VdV}{g - bV^2} = dz \qquad , \qquad -\frac{1}{2b}\ln\left(g - bV^2\right) = z + C_1 \quad . \qquad (4)$$

Из начальных условий $V_0 = 0$, $z_0 = 0$ следует, что

$$C_1 = -\frac{1}{2b}\ln g \quad . \qquad (5)$$

Подставим (5) в (4), получим

$$-\frac{1}{2b}\ln\frac{g - bV^2}{g} = z \qquad \text{или} \qquad \frac{g - bV^2}{g} = e^{-2bz} \quad .$$

Так как длина участка трубы $AB = 2$ (м), то скорость в конце участка в точке *B* будет равна

$$V_B^2 = g\frac{1 - e^{-2bz}}{b} = 10\frac{1 - e^{-2\cdot 0,5\cdot 2}}{0,5} = 20\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \quad ,$$

$$V_B = 4,15 \quad \text{м/с} \quad . \qquad (6)$$

Рассмотрим движение материальной точки на участке *BC*. Изобразим в произвольном положении точку и действующие на нее силы $P=mg$, N, F_{TP} и F. Введем оси координат x и y и составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на оси x и y

$$m\frac{dV_X}{dt} = mg\sin\alpha - F_{TP} + F_X \quad , \tag{7}$$

$$0 = N - mg\cos\alpha \quad . \tag{8}$$

Найдем силу N из уравнения (8)

$$N = mg\cos\alpha \quad .$$

Из этого равенства и закона Кулона $F_{TP}=fN$ определим силу трения

$$F_{TP} = fmg\cos\alpha \quad .$$

Подставим значения сил трения и F_X в уравнение (7)

$$m\frac{dV_X}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(3t) \quad . \tag{9}$$

Разделим обе части уравнения (9) на m и подставим численные значения параметров

$$g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 9{,}8(\sin 30^\circ - 0{,}2\cos 30^\circ) = 3{,}2 \quad .$$

Имеем
$$\frac{dV_X}{dt} = 3{,}2 + 16\sin(3t) \quad . \tag{10}$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, получим

$$V_X = 3{,}2t - \frac{16}{3}\cos(3t) + C_2 \quad . \tag{11}$$

Из начального условия $V(0) = V_B$ и (6) получим

$$C_2 = 4{,}15 + \frac{16}{3}\cos 0 = 9{,}48 \quad .$$

Подставим значение C_2 в (11)

$$V_X = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - \frac{16}{3}\cos 3t + 9{,}48 \quad .$$

Умножаем обе части уравнения на dt и интегрируем по t

$$x = 1{,}6t^2 - \frac{16}{9}\sin 3t + 9{,}48t + C_3 \quad . \qquad (12)$$

Из начального условия $x(0)=0$, получим $C_3=0$. Поставляем значение C_3 в (12) и находим закон движения точки на участке ВС

$$x = 1{,}6t^2 - \frac{16}{9}\sin 3t + 9{,}48t \quad .$$