

### ЗАДАНИЕ Д-5

#### Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Учитывается трение скольжения тела  $A$  и сопротивление качению тела  $D$ , катящегося без скольжения. Другими силами сопротивления и массами нерастяжимых нитей пренебрегаем. Требуется определить скорость и ускорение тела  $A$  в тот момент, когда оно пройдет путь  $S_A=S$ .

В задаче обозначено:

$m_A, m_B, m_D, m_E$  - массы тел  $A, B, D, E$ ;

$R_B, r_B, R_D, r_D, R_E, r_E$  - радиусы больших и малых окружностей тел  $B, D, E$ ;

$\rho_B, \rho_D, \rho_E$  - радиусы инерции тел  $B, D, E$  относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести;

$\alpha$  - угол наклона плоскости к горизонту;

$f$  - коэффициент трения скольжения тела  $A$ ;

$k$  - коэффициент трения качения тела  $D$ .

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами. Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Считать величину  $m$  равной 10 кг,  $g=10 \text{ м/с}^2$ .

#### Указания:

1. Выбрать направления  $S_A$  и  $V_A$  и определить скорости и перемещения всех тел системы в зависимости от  $V_A$  и  $S_A$ .

2. Вычислить кинетическую энергию системы.

3. Вычислить сумму работ всех внешних сил, действующих на систему. Если сумма работ отрицательна, сменить направления  $S_A$  и  $V_A$  и вернуться к пункту 1. Если опять сумма работ получится отрицательной, то система под действием сил тяжести не приходит в движение из состояния покоя и  $V_A=0, a_A=0$ . Следует отметить, что при смене направлений  $S_A$  и  $V_A$  в силовой схеме необходимо изменить только направления сил сопротивления.

4. Записать теорему об изменении кинетической энергии системы.

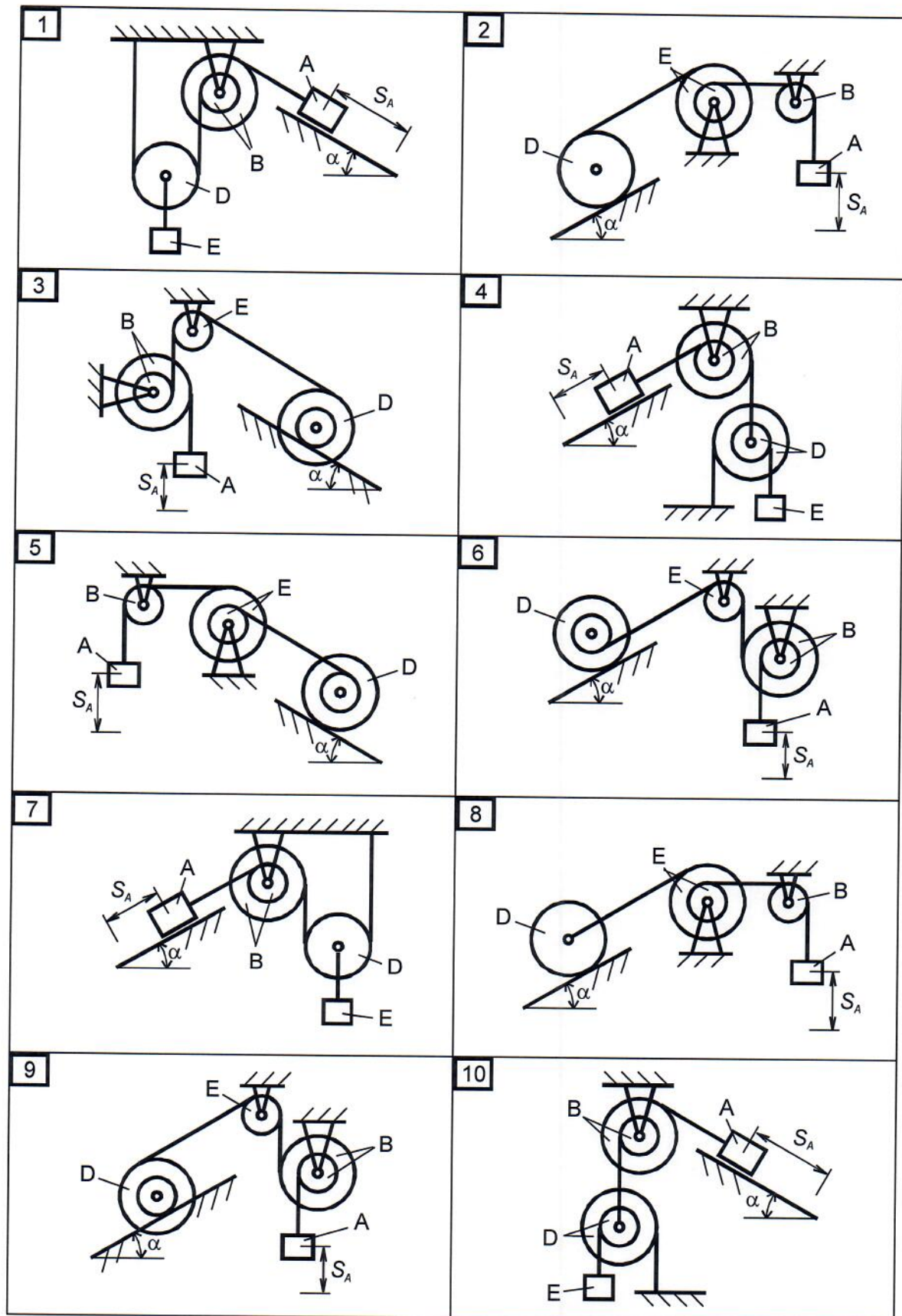


Рис. 5.1



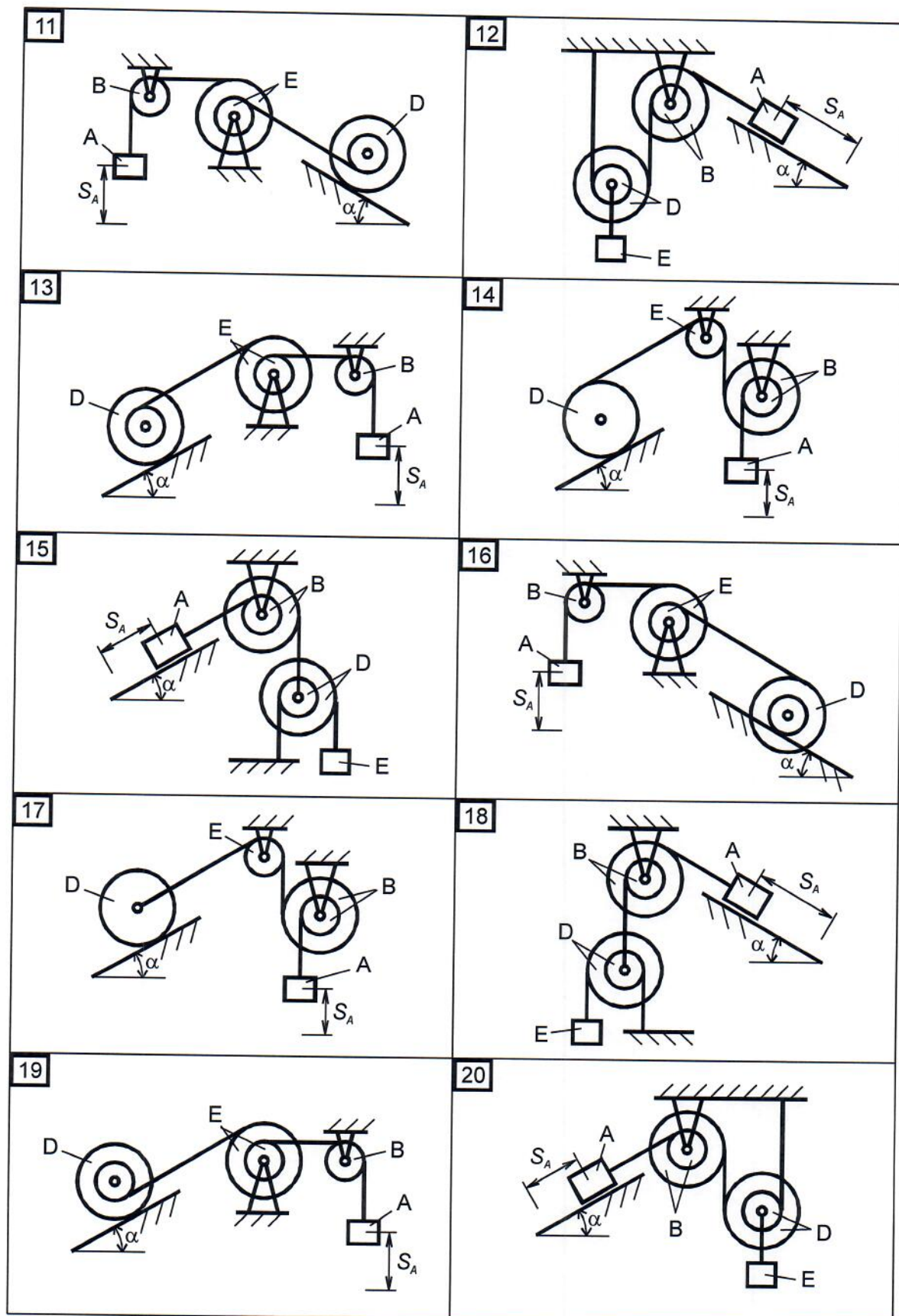


Рис. 5.2

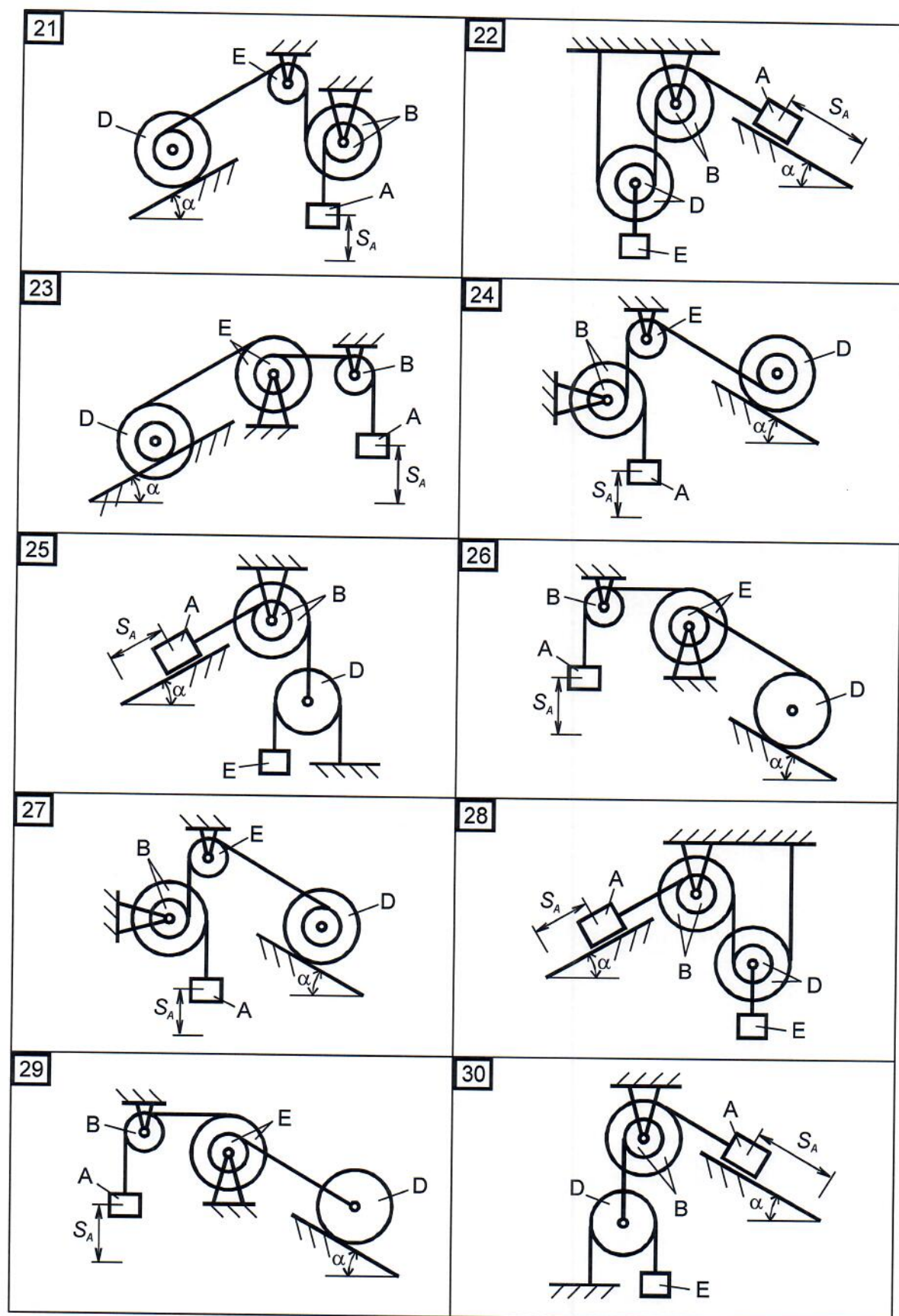


Рис. 5.3



Таблица Д-5

№ ва- рианта	№ ри- сунка	$m_A$ , кг	$m_B$ , кг	$m_E$ , кг	$m_D$ , кг	$R_B$ , м	$r_B$ , м	$\rho_B$ , м	$R_E$ , м	$r_E$ , м	$\rho_E$ , м	$R_D$ , м	$r_D$ , м	$\rho_D$ , м	$\alpha$ , °	$f$	$k$ , см	$S$ , м
1	1	5м	4м	2м	м	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	-	-	60	0,1	-	1
2	2	6м	5м	4м	2м	-	-	-	0,6	0,3	0,4	-	0,5	-	45	-	0,2	2
3	3	4м	м	2м	м	0,7	0,3	0,4	-	-	-	0,6	0,2	0,3	15	-	0,1	1,5
4	4	8м	6м	3м	2м	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,5	0,1	0,2	30	0,2	-	3
5	5	7м	5м	4м	м	-	-	-	0,7	0,4	0,5	0,6	0,3	0,4	50	-	0,3	4,5
6	6	9м	8м	3м	3м	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,9	0,3	0,5	20	-	0,4	1,5
7	7	6м	2м	3м	2м	0,4	0,1	0,2	-	-	-	-	-	-	60	0,15	-	2,5
8	8	4м	2м	м	2м	-	-	-	0,5	0,2	0,3	-	0,4	-	15	-	0,1	4
9	9	7м	5м	3м	3м	0,6	0,3	0,4	-	-	-	0,8	0,5	0,7	20	-	0,4	2
10	10	5м	4м	2м	м	0,9	0,3	0,5	-	-	-	0,7	0,3	0,4	50	0,25	-	1
11	11	8м	5м	3м	2м	-	-	-	0,5	0,1	0,2	0,8	0,4	0,5	30	-	0,3	3,5
12	12	9м	7м	5м	4м	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,4	0,1	0,2	70	0,1	-	2
13	13	6м	3м	2м	м	-	-	-	0,5	0,2	0,3	0,6	0,3	0,4	15	-	0,2	4,5
14	14	7м	5м	4м	2м	0,7	0,3	0,4	-	-	-	-	0,6	-	20	-	0,1	3
15	15	4м	3м	2м	м	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,5	0,1	0,2	60	0,2	-	1,5
16	16	5м	4м	2м	м	-	-	-	0,6	0,3	0,4	0,7	0,4	0,5	30	-	0,3	1
17	17	6м	5м	4м	2м	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	0,4	-	20	-	0,1	2
18	18	4м	м	2м	м	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,4	0,1	0,2	65	0,15	-	1,5
19	19	8м	6м	3м	2м	-	-	-	0,9	0,3	0,5	0,6	0,3	0,4	15	-	0,2	3
20	20	7м	5м	4м	м	0,5	0,1	0,3	-	-	-	0,6	0,3	0,4	45	-	-	4,5
21	21	9м	8м	3м	3м	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,7	0,3	0,4	30	-	0,3	1,4
22	22	6м	2м	3м	2м	0,9	0,3	0,5	-	-	-	0,5	0,2	0,3	60	0,25	-	2,5
23	23	4м	2м	м	2м	-	-	-	0,4	0,1	0,2	0,5	0,1	0,2	20	-	0,1	4
24	24	7м	5м	3м	3м	0,7	0,3	0,4	-	-	-	0,9	0,3	0,5	15	-	0,3	2
25	25	5м	4м	2м	м	0,5	0,1	0,2	-	-	-	-	-	-	75	0,1	-	1
26	26	8м	5м	3м	2м	-	-	-	0,6	0,3	0,4	-	0,5	-	25	-	0,2	3,5
27	27	9м	7м	5м	4м	0,7	0,4	0,5	-	-	-	0,8	0,5	0,7	30	-	0,3	2
28	28	6м	3м	2м	м	0,4	0,1	0,2	-	-	-	0,6	0,2	0,3	70	0,2	-	4,5
29	29	7м	5м	4м	2м	-	-	-	0,8	0,5	0,7	-	0,6	-	20	-	0,1	3
30	30	4м	3м	2м	м	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	-	-	60	0,15	-	1,5

5. Из полученного соотношения определить скорость тела  $A$  (а также ускорение тела  $A$  в вариантах, перечисленных выше).

#### Пример выполнения задания Д-5

Дано:  $m=10$  (кг),  $m_A=3m$ ,  $m_B=0,5m$ ,  $m_D=4m$ ,  $m_E=0,5m$ ,  $R_B=20$  (см),  $r_B=0,5R_B$ ,  $R_D=10$  (см),  $R_E=20$  (см),  $r_E=0,5R_E$ ,  $\rho_B=20$ (см),  $\rho_E=10$  (см),  $\alpha=30^\circ$ ,  $k=0,25$  (см),  $S=1$ (м), блок  $D$  – сплошной цилиндр.

#### Решение

По условию задачи в начальный момент времени  $t_0=0$  система находилась в покое, поэтому  $T_0=0$ . Предположим, что к моменту времени  $t_1$  тело  $A$  прошло путь  $S_A$  и приобрело скорость  $V_A$ .

Изобразим силовую схему варианта задачи (рис.5.4).

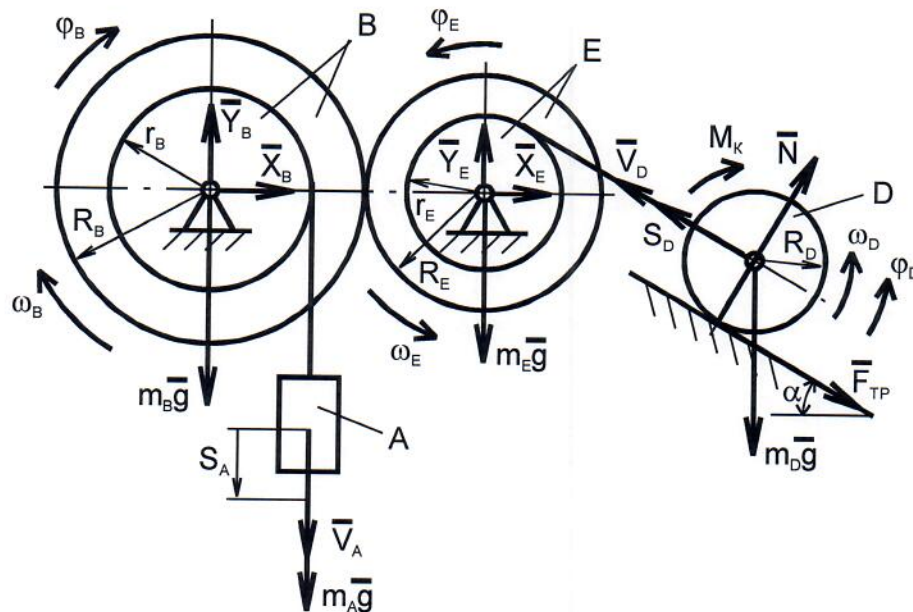


Рис. 5.4

1. Вычислим, в зависимости от  $V_A$ , угловые скорости тел  $B$ ,  $E$ ,  $D$  и скорость  $V_D$  центра масс тела  $D$ .

$$\omega_B = \frac{V_A}{r_B},$$

$$\omega_E = \omega_B \frac{R_B}{R_E} = V_A \frac{R_B}{r_B R_E},$$



$$V_D = \omega_E r_E = V_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E}, \quad \omega_D = \frac{V_D}{R_D} = V_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D}.$$

2. Вычислим в зависимости от  $S_A$  смещения тел  $B, E, D$ .

$$\varphi_B = \frac{S_A}{r_B}, \quad \varphi_E = S_A \frac{R_B}{r_B R_E}, \quad S_D = S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E}, \quad \varphi_D = S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D}.$$

3. Вычислим кинетическую энергию системы для момента времени  $t$

$$T_1 = T_A + T_B + T_E + T_D,$$

$$T_A = \frac{m_A V_A^2}{2}, \quad T_B = \frac{I_B \omega_B^2}{2} = \frac{I_B V_A^2}{2 r_B^2}, \quad T_E = \frac{I_E \omega_E^2}{2} = \frac{I_E V_A^2}{2} \left( \frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2,$$

$$T_D = \frac{m_D V_D^2}{2} + \frac{I_D \omega_D^2}{2} = \frac{m_D V_A^2}{2} \left( \frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + \frac{I_D V_A^2}{2} \left( \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2;$$

$$T = \frac{V_A^2}{2} \left( m_A + \frac{I_B}{r_B^2} + I_E \left( \frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2 + m_D \left( \frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + I_D \left( \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 \right) = \frac{V_A^2}{2} \cdot A,$$

где  $A = m_A + \frac{I_B}{r_B^2} + I_E \left( \frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2 + m_D \left( \frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + I_D \left( \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 = 75 \text{ (кг)}.$

4. Подсчитаем сумму работ всех внешних сил, действующих на систему. Работу совершают только силы тяжести тел  $A$  и  $D$  и момент  $M_K$  сил сопротивления качению тела  $D$ ,  $M_K = N \cdot k = m_D g \cos \alpha \cdot k$ .

$$\begin{aligned} \sum_k A(\vec{F}_k^e) &= m_A g S_A - m_D g \sin \alpha \cdot S_D - m_D g \cos \alpha \cdot k \cdot \varphi_D = \\ &= g \left( m_A S_A - m_D \sin \alpha \cdot S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos \alpha \cdot k \cdot S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) = \\ &= g S_A \left( m_A - m_D \sin \alpha \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos \alpha \cdot k \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) = S_A \cdot B \end{aligned}$$

где  $B = g \left( m_A - m_D \sin \alpha \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos \alpha \cdot k \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) = 91,4 \text{ (кг·м/с}^2\text{)}.$

Итак, сумма работ положительна и направление  $S_A$  и  $V_A$  выбрано верно.

Далее запишем теорему об изменении кинетической энергии для неизменяемой механической системы

$$T - T_0 = \sum_k A(F_k^e).$$

Подставим выражения для кинетической энергии и суммы работ внешних сил

$$\frac{V_A^2}{2} \cdot A - 0 = S_A \cdot B, \quad (1)$$

откуда 
$$V_A = \sqrt{\frac{2 \cdot S_A \cdot B}{A}}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$V_A \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 91,4 \cdot S_A}{75}} \approx 1,56 \text{ м/с}.$$

Определим ускорение тела  $A$ , для чего возьмем производную по времени от правой и левой части соотношения (1), помня, что  $S_A = S_A(t)$ ,

$$\frac{dS_A}{dt} = V_A, \quad \frac{dV_A}{dt} = a_A$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{V_A^2}{2} \cdot A \right) = \frac{d}{dt} (S_A \cdot B),$$

$$\frac{A}{2} \cdot 2V_A \cdot \frac{dV_A}{dt} = B \cdot \frac{dS_A}{dt},$$

$$A \cdot V_A a_A = B \cdot V_A.$$

Окончательно

$$a_A = \frac{B}{A} \approx \frac{91,4}{75} \approx 1,21 \text{ м/с}^2.$$