ЗАДАНИЕ К-3

В планетарном механизме (рис.3.1-3.6) шестерня I радиуса R_1 неподвижна, а кривошип OA, вращаясь вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение свободно насаженную на его конец A шестерню II радиуса R_2. Для указанного на рисунке положения механизма найти скорости и ускорения точек A и B, если для соответствующего момента времени известны абсолютные величины угловой скорости и углового ускорения кривошипа (ω_{OA}, ε_{OA}). На рисунках условно показаны направления угловой скорости и углового ускорения дуговыми стрелками вокруг оси вращения. При этом направление угловой скорости соответствует направлению вращательного движения кривошипа. Угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости при ускоренном вращении и в противоположную - при замедленном. Необходимые данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

№ варианта	№ рисунка	ω_{OA} (c^{-1})	ε_{OA} (c^{-2})	R_1 (м)	R_2 (м)	α (град.)
1	3.1	1	9	0,5	0,1	0
2	3.2	1	8	0,6	0,1	30
3	3.3	2	7	0,7	0,2	60
4	3.4	2	6	0,8	0,2	90
5	3.5	2	3	0,6	0,1	60
6	3.6	3	5	0,7	0,2	120
7	3.1	3	5	0,9	0,3	120
8	3.2	3	4	0,5	0,5	150
9	3.3	4	3	0,6	0,4	180
10	3.4	4	2	0,7	0,4	210
11	3.5	2	4	0,7	0,2	90
12	3.6	3	6	0,7	0,2	150
13	3.1	5	1	0,8	0,5	240
14	3.2	1	1	0,5	0,1	0
15	3.3	2	2	0,5	0,2	30
16	3.4	3	1	0,6	0,3	60
17	3.5	4	7	0,8	0,3	180
18	3.6	5	9	0,8	0,3	240
19	3.1	4	2	0,6	0,4	90
20	3.2	5	1	0,7	0,5	120
21	3.3	6	2	0,7	0,1	150
22	3.4	7	1	0,8	0,2	180
23	3.5	4	8	0,8	0,3	210
24	3.6	1	1	0,5	0,1	0
25	3.1	8	2	0,8	0,3	210

№ варианта	№ рисунка	ω_{OA} (c^{-1})	ε_{OA} (c^{-2})	R_1 (м)	R_2 (м)	α (град.)
26	3.2	9	1	0,9	0,4	240
27	3.3	1	1	0,6	0,1	0
28	3.4	1	2	0,6	0,1	30
29	3.5	1	2	0,6	0,2	30
30	3.6	2	3	0,6	0,3	60

Пример выполнения задания К-3

Дано: кинематическая схема планетарного механизма (рис.3.7); R_1= 0,6 м ; R_2= 0,4 м ; ω_{OA} = 1 c^{-1} ; ε_{OA} = 1 c^{-2}. Определить скорости и ускорения точек A и B, показанных на рисунке, если $\alpha = 60°$.

Решение: Рассмотрим последовательно движения каждого из двух подвижных звеньев планетарного механизма. Начинать при этом необходимо со звена, угловая скорость и угловое ускорение которого заданы. Таким образом, начнем исследование кинематики механизма с кривошипа.

1. Кривошип OA совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Определим скорость и ускорение точки A кривошипа, которая одновременно принадлежит и подвижной шестерне II.

Абсолютная величина скорости точки A (V_A) определяется по формуле

$$V_A = \omega_{OA} \cdot |OA| = \omega_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \quad . \tag{1}$$

Для заданного положения механизма

$$V_A = 1 \cdot (0{,}6 + 0{,}4) = 1 \quad \text{м/с} \quad . \tag{2}$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно OA (радиусу вращения) в направлении вращения, указанному на рис.3.5 дуговой стрелкой ω_{OA}.

Ускорение точки A представим разложенным на касательную и нормальную составляющие

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau \quad . \tag{3}$$

Величины нормального (a_A^n) и касательного (a_A^τ) ускорений определяются соответственно по формулам:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot |OA| = \omega_{OA}^2 \cdot (R_1 + R_2) \quad , \tag{4}$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot |OA| = \varepsilon_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \; . \tag{5}$$

Для заданного положения механизма

$$a_A^n = 1^2 (0{,}6 + 0{,}4) = 1 \;\; \text{м/с}^2 \; . \tag{6}$$

$$a_A^\tau = 1 \cdot (0{,}6 + 0{,}4) = 1 \;\; \text{м/с}^2 \; . \tag{7}$$

При этом нормальное ускорение точки A ($\vec{a}_A^n$) направлено по радиусу окружности, описываемой точкой к центру этой окружности - к точке O.

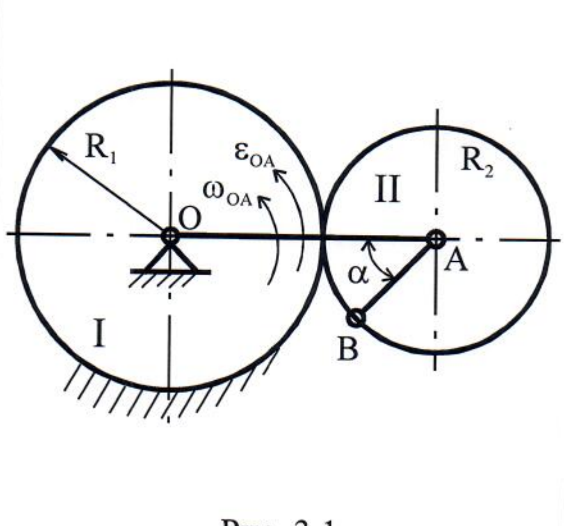

Рис. 3.1

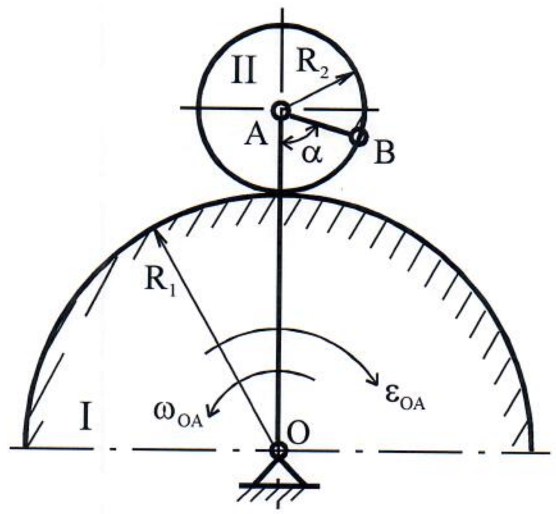

Рис. 3.2

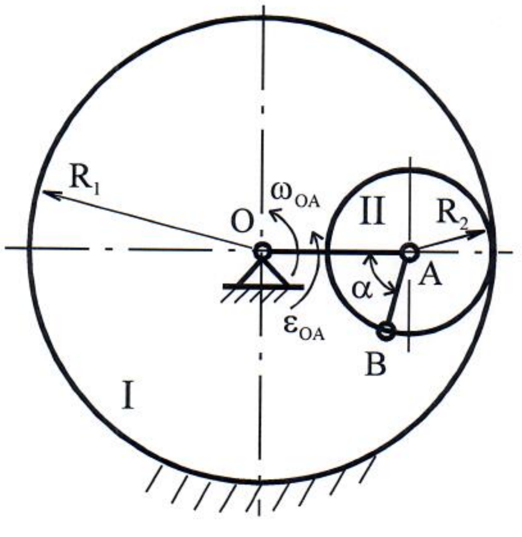

Рис. 3.3

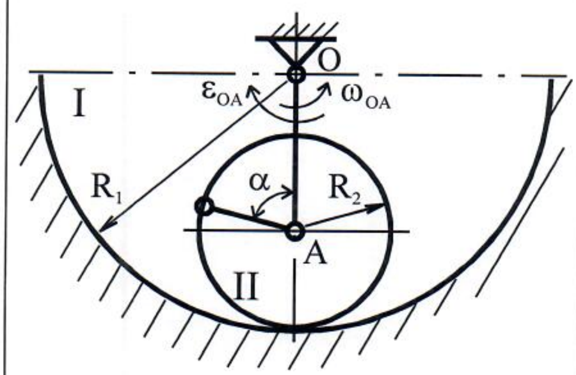

Рис. 3.4

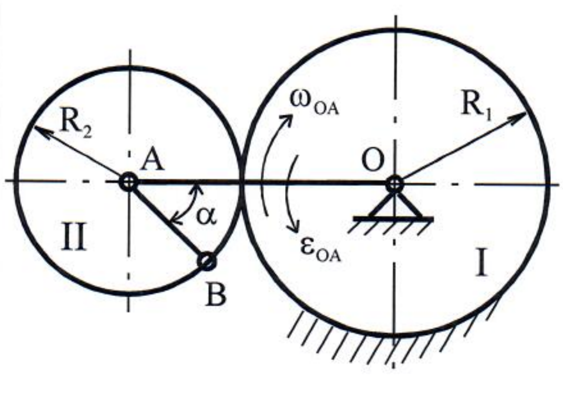

Рис. 3.5

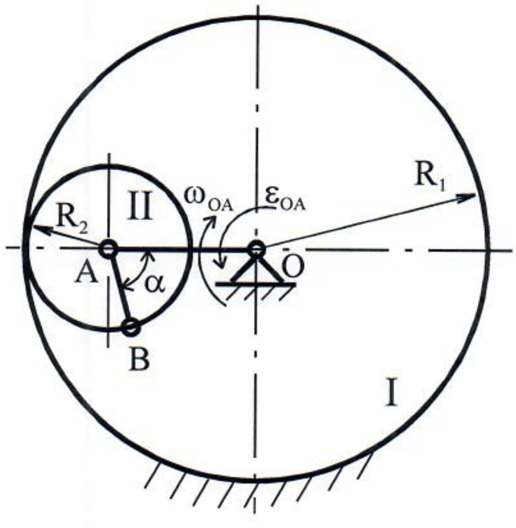

Рис. 3.6

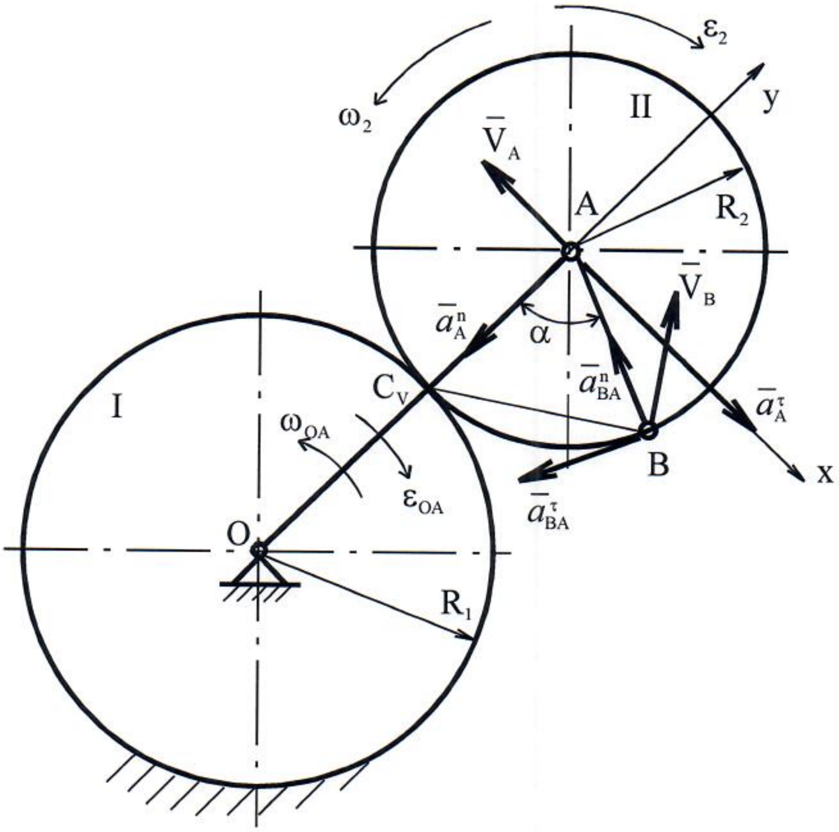

Рис. 3.7

Касательное ускорение $(\vec{a}_A^{\tau})$ направлено по касательной к этой окружности (перпендикулярно OA) в сторону, указанную дуговой стрелкой ε_{OA}. Это объясняется тем, что при замедленном вращении (по условию задачи кривошип OA вращается замедленно) касательное ускорение направляется в сторону, противоположную направлению вращения, указанного дуговой стрелкой ω_{OA} . В то же время при замедленном вращении угловое ускорение направляется также в сторону, противоположную направлению угловой скорости.

Величина ускорения точки A в соответствии с соотношением (3) и с учетом (6) и (7) для заданного положения механизма определится по формуле:

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^n\right)^2 + \left(a_A^{\tau}\right)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{м/с}^2 .$$

2. Шестерня II совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Учитывая, что шестерня II катится без скольжения по неподвижной шестерне I, мгновенный центр скоростей (точка C_V) подвижной шестерни будет находиться в точке соприкосновения двух шестерен (рис.3.5).

Для заданного положения планетарного механизма выше определена скорость центра шестерни II (точки A). Таким образом, зная величину скорости одной из точек и положение мгновенного центра скоростей подвижной шестерни, можно определить величину ее мгновенной угловой скорости (ω_2) по формуле

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_V} \quad , \tag{7}$$

где расстояние $AC_V = R_2$.

В результате подстановки значения $AC_V = R_2$ и (1) в соотношение (7) получим

$$\omega_2 = \frac{\omega_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} \quad . \tag{8}$$

Для заданного положения механизма

$$\omega_2 = \frac{1 \cdot (0{,}6 + 0{,}4)}{0{,}4} = 2{,}5 \quad \text{с}^{-1} \ . \tag{9}$$

Направление мгновенного вращения шестерни II вокруг мгновенного центра скоростей (точки C_V), определяемое направлением скорости точки A ($\vec{V}_A$), условно показано на рис.3.5 дуговой стрелкой ω_2 .

Шестерня II в указанном положении движется замедленно. Это следует из сопоставления направлений векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{a}_A^{\tau}$ (они направлены в противоположные стороны). Следовательно угловое ускорение шестерни II (ε_2) направлено в сторону, противоположную направлению угловой скорости ω_2 , что условно показано на рис.3.5 дуговой стрелкой ε_2 .

Величину углового ускорения ε_2 определим по формуле

$$\varepsilon_2 = |\dot{\omega}_2| \quad . \tag{10}$$

Учитывая (8), на основании (10) получим

$$\varepsilon_2 = \frac{|\dot{\omega}_{OA}| \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} = \frac{\varepsilon_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} \quad . \tag{11}$$

где ε_{OA} - величина углового ускорения кривошипа OA. Для заданного положения механизма

$$\varepsilon_2 = \frac{1 \cdot (0{,}6 + 0{,}4)}{0{,}4} = 2{,}5 \quad \text{с}^{-2} \ . \tag{12}$$

Таким образом, для некоторого момента времени найдены положение мгновенного центра скоростей, угловая скорость, угловое ускорение подвижной шестерни II, а также ускорение точки A. Это позволяет найти скорость и ускорение любой точки шестерни.

Прежде всего определим абсолютную величину скорости точки B (V_B) по формуле

$$V_B = \omega_2 \cdot BC_V \ , \tag{13}$$

где BC_V - расстояние от точки B до мгновенного центра скоростей.

Расстояние BC_V определим из треугольника ABC_V . Этот треугольник равносторонний и, следовательно,

$$BC_V = R_2 = 0{,}4 \ \text{м} \ . \tag{14}$$

Для заданного положения механизма, учитывая (9) и (14), на основании (13) получим

$$V_B = 2{,}5 \cdot 0{,}4 = 1 \ \text{м/с} \ . \tag{15}$$

Вектор скорости $\vec{V}_B$ направлен перпендикулярно прямой BC_V. Ускорение точки B можно найти на основании теоремы об ускорениях точек плоской фигуры, приняв точку A за полюс

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau \quad , \tag{16}$$

где $\vec{a}_{BA}^n$ и $\vec{a}_{BA}^\tau$ - соответственно нормальное и касательное ускорения точки B при относительном вращательном движении шестерни II вокруг полюса A. Учитывая (3), формулу (16) представим в виде

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau \quad . \tag{17}$$

Величины нормального (a_{BA}^n) и касательного (a_{BA}^τ) ускорений точки B при относительном вращательном движении шестерни II вокруг полюса A определяются по формулам

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = \omega_2^2 \cdot R_2 \quad , \tag{18}$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = \varepsilon_2 \cdot R_2 \quad . \tag{19}$$

Для заданного положения механизма на основании (18) и (19) с учетом (9) и (12) получим

$$a_{BA}^n = 2{,}5^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}5 \text{ м/с}^2 , \tag{20}$$

$$a_{BA}^\tau = 2{,}5 \cdot 0{,}4 = 1 \text{ м/с}^2 . \tag{21}$$

При этом нормальное ускорение $\vec{a}_{BA}^n$ направлено вдоль BA к центру относительного вращения (к полюсу A), а касательное ускорение $\vec{a}_{BA}^\tau$ направлено перпендикулярно прямой AB в сторону, указанную дуговой стрелкой ε_2.

Таким образом, найдены модули четырех векторов ускорений, стоящих в правой части векторного равенства (17), и показаны их направления в точке B на рис. 3.5. Найдем ускорение точки B как геометрическую сумму четырех показанных в точке ускорений аналитическим способом. Для этого спроектируем векторы, стоящие в правой и левой части равенства (17), на две оси координат x, y (рис.3.5)

$$a_{Bx} = a_A^\tau - a_{BA}^n \cdot \cos 30° - a_{BA}^\tau \cdot \cos 60° \quad , \tag{22}$$

$$a_{By} = -a_A^n + a_{BA}^n \cdot \cos 60° - a_{BA}^\tau \cdot \cos 30° \quad . \tag{23}$$

Учитывая (6), (7) (20) и (21), на основании (22) и (23) найдем для заданного положения механизма проекции ускорения точки B на оси x, y

$$a_{Bx} = 1 - 2{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -1{,}665 \text{ м/с}^2 \; ,$$

$$a_{By} = -1 + 2{,}5 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}616 \text{ м/с}^2 \; .$$

Проекции вектора ускорения $\vec{a}_B$ (лежащего в плоскости xy) на две оси координат полностью определяют его модуль и направление. Итак, величина

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{1{,}665^2 + 0{,}616^2} = 1{,}775 \text{ м/с}^2 \; .$$