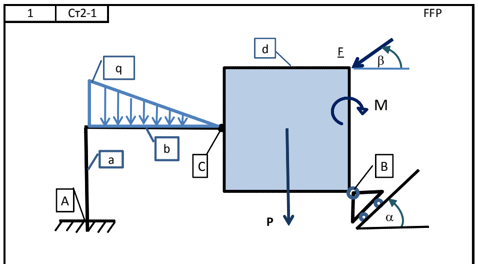
Контрольные задания по теоретической механике для студентов заочной формы обучения

1. Статика

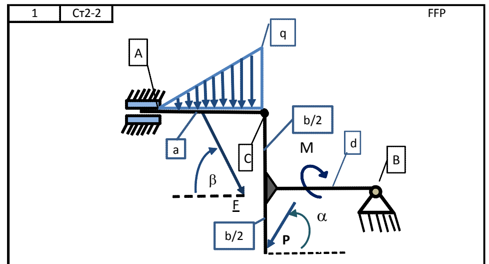
1	Ст2-1	FFP



1.Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в шарнире С.

а (м)	b(м)	d(м)	α	β	P (кн)	F (кн)	q (кн/м)	M (кн*м)
2	3	4	0	0	10	6	2	3

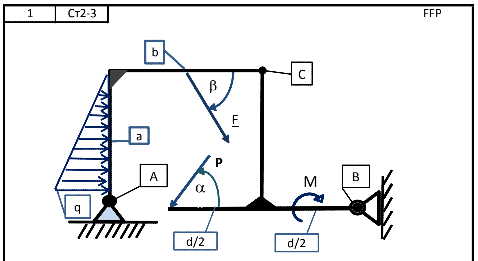
1	Ст2-2	FFP



1.Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в шарнире С.

а (м)	b(м)	d(м)	α	β	P (кн)	F (кн)	q (кн/м)	M (кн*м)
2	3	4	0	30	10	6	2	1

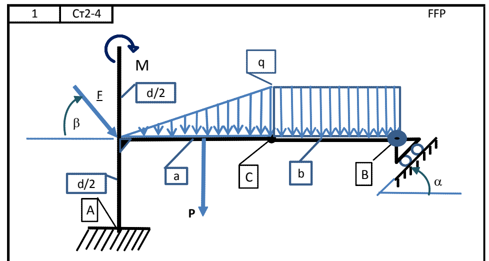
1	Ст2-3	FFP



1.Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в шарнире С.

а (м)	b(м)	d(м)	α	β	P (кн)	F (кн)	q(кн/м)	M(кн*м)
3	3	4	60	30	10	6	2	1

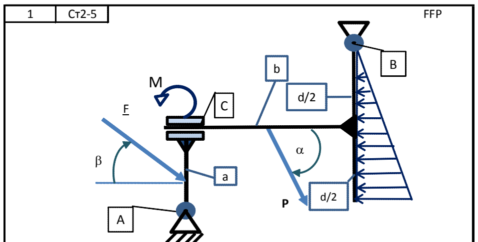
1	Ст2-4	FFP



1.Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в шарнире С.

а (м)	b(м)	d(м)	α	β	P (кн)	F (кн)	q(кн/м)	M(кн*м)
2	3	4	45	0	10	6	2	1

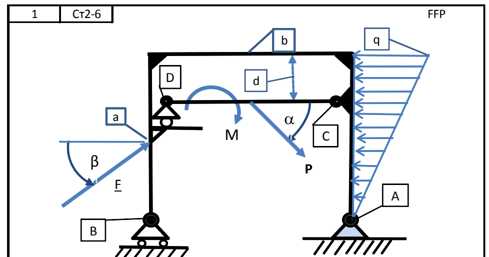
1	Ст2-5	FFP



1.Найти опорные реакции в А и В и реакции в скользящей заделке С.

а (м)	b(м)	d(м)	α	β	P (кн)	F (кн)	q(кн/м)	M(кн*м)
2	3	4	45	0	10	6	2	1

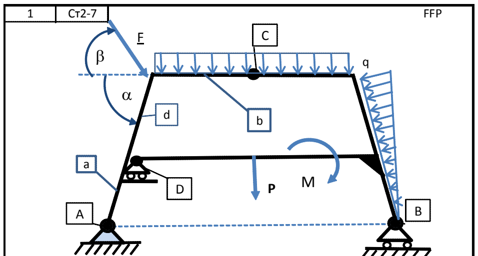
1	Ст2-6	FFP



1.Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в D и C.

а (м)	b(м)	d(м)	α	β	P (кн)	F (кн)	q(кн/м)	M(кн*м)
4	3	3	30	0	10	6	2	4

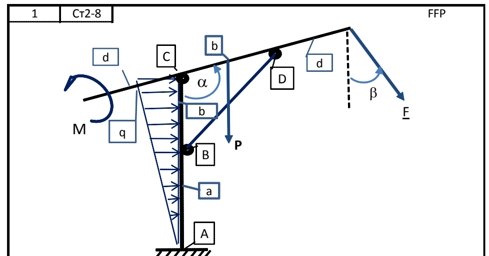
1	Ст2-7	FFP



1.Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в D и C.

а (м)	b(м)	d(м)	α	β	P (кн)	F (кн)	q(кн/м)	M(кн*м)
3	3	2	90	0	40	20	3	15

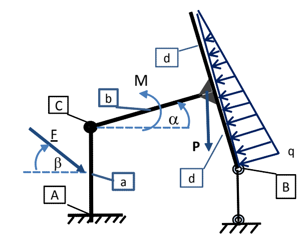
1	Ст2-8	FFP



1.Найти опорные реакции в опоре А и реакции в шарнирах B,C,D.

а (м)	b(м)	d(м)	α	β	P (кн)	F (кн)	q(кн/м)	M(кн*м)
2	3	4	90	30	10	6	2	50

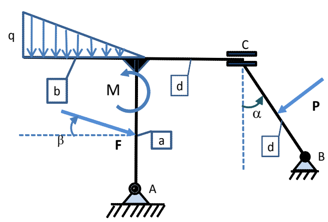
1	Ст2-9	FFP



1.Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в шарниреС.

a (м)	b(м)	d(м)	α	β	P (кн)	F (кн)	q(кн/м)	M(кн*м)
6	3	4	30	0	10	6	2	50

1	Ст2-10	FFP



1.Найти реакции в опорах А, В и реакции в скользящей заделке С.

a (м)	b(м)	d(м)	α	β	P (кн)	F (кн)	q (кн/м)	M (кн*м)
3	2	3	30	-30	10	12	2	3

Определить опорные реакции и реакции в соединении.

Для решения задачи необходимо прочитать главу 2 курса лекций.

Пример задания по статике.

Мост состоит из двух частей, соединенных шарниром С (Рис.1). Левая опора моста – жесткая заделка (консольная опора), правая опора – подвижный шарнир (каток). Вес каждой части моста P, нагрузка и размеры показаны на рисунке. Определить реакции в опорах и в соединении С.

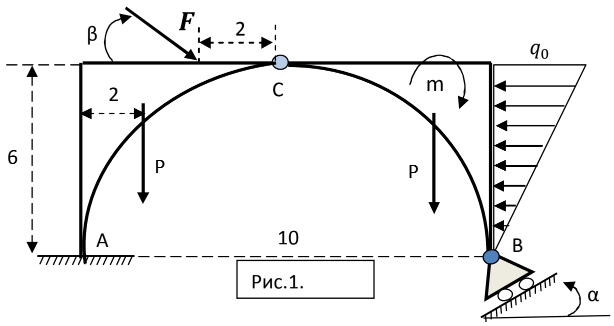


Рис.1.

В заделке А три неизвестных – две составляющих силы X_A, Y_A и момент m_A , в катке В неизвестная по величине сила N_B, направленная перпендикулярно к наклонной плоскости.

Для всего моста, как и для любого тела, можно написать три уравнения равновесия, из которых найти четыре неизвестных невозможно, то есть, на первый взгляд, система статически неопределима. Решить эту, как, впрочем, и любую другую учебную задачу, помогает наличие в конструкции «слабого» соединения, при разделении по которому действие одной части конструкции на другую описывается в плоском случае менее чем тремя реакциями. В данном случае при разделению по шарниру С получаем два тела (рис.2а, 2б), для которых можем написать *шесть* уравнений равновесия с *шестью* неизвестными $X_A, Y_A, m_A, N_B, X_C, Y_C$.

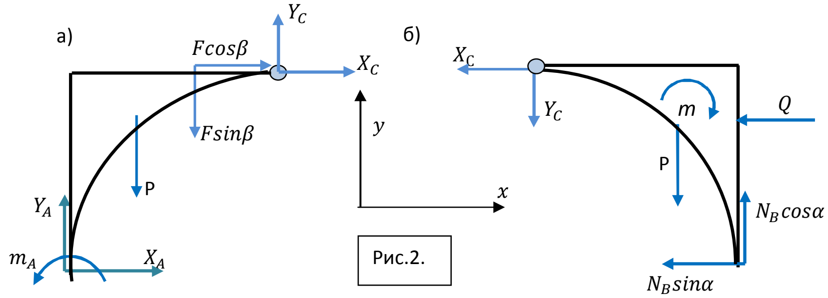


Рис.2.

Для удобства заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой Q, разложим силу $\underline{F}$ на составляющие, параллельные осям координат и выпишем уравнения равновесия для двух тел, объединив их в систему:

$$\begin{cases} F_x^{ext} = X_A + X_C + Fcos\beta = 0, \\ F_y^{ext} = Y_A + Y_C - Fsin\beta - P = 0, \\ M_{Az}^{ext} = m_A - X_C \cdot 6 + Y_C \cdot 5 - P \cdot 2 - Fsin\beta \cdot 3 - Fcos\beta \cdot 6 = 0, \\ F_x^{ext} = -X_C - Q - N_B sin\alpha = 0, \\ F_y^{ext} = -Y_C + N_B cos\alpha - P = 0, \\ M_{Cz}^{ext} = N_B cos\alpha \cdot 5 - N_B sin\alpha \cdot 6 - Q \cdot 2 - P \cdot 3 - m = 0. \end{cases}$$

Опорные точки при вычислении моментов следует выбирать таким образом, чтобы, во-первых, уравнение содержало меньшее число неизвестных, и, во-вторых, легко было бы находить плечи сил. В данном примере для тела б) в качестве опорной точки взята точка С, что позволяет из последнего уравнения найти N_B, а все прочие неизвестные определяются последовательно из оставшихся уравнений.

После определения всех неизвестных следует сделать проверку, которая заключается в проверке равновесия всей конструкции: главный вектор и момент (относительно произвольной опорной точки) *должны быть равны нулю* (рис.3):

$$\begin{cases} F_x^{ext} = X_A + Fcos\beta - Q - N_B sin\alpha (= 0), \\ F_y^{ext} = Y_A + N_B cos\alpha - 2P - Fsin\beta (= 0) \\ M_{Cz}^{ext} = N_B cos\alpha \cdot 5 - N_B sin\alpha \cdot 6 - Q \cdot 2 - m + Fsin\beta \cdot 2 + X_A \cdot 6 - Y_A \cdot 5 + m_A\ (= 0) \end{cases}$$

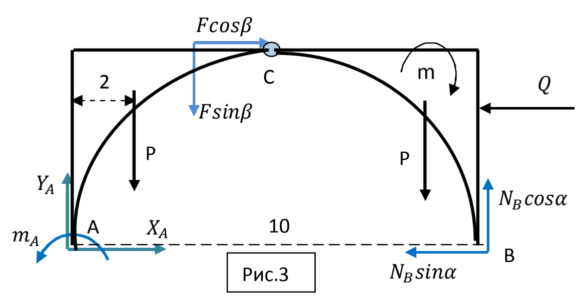
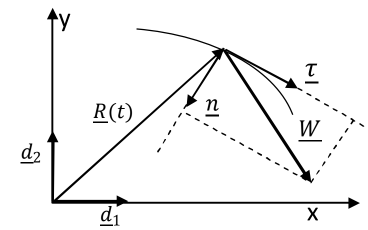


Рис.3

2. Кинематика точки.

Уравнения движения точки имеют вид $\begin{cases} x = x_k(t) \\ y = y_k(t) \end{cases}$, где индекс k – номер варианта.
В момент времени t найти векторы скорости $\underline{V}$, ускорения $\underline{W}$, касательную (тангенциальную) W_τ и нормальную W_n составляющие ускорения, радиус кривизны траектории ρ.

Вариант	$x(t)$	$y(t)$	Момент t
1	t^2-1	$2t$	1
2	$t sin\frac{\pi}{2}t$	$t cos\frac{\pi}{2}t$	1
3	$2sin\frac{\pi}{2}t+3$	$cos\frac{\pi}{2}t-4$	2
4	$t-t^2+1$	$2t-2t^2-3$	1
5	$1-\frac{t^3}{3}$	$-\frac{t^2}{2}-3$	2
6	t^2+1	$\frac{2}{3}t^3-4$	$\frac{1}{2}$
7	$2-4t$	$\frac{t^2}{2}-3$	1
8	$6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	$-3sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	3
9	t	$2(1-cos\frac{t}{2})$	2π
10	$\frac{1}{2}(1-cos2t)$	t	$\frac{\pi}{2}$



Для осознанного выполнения задания следует прочитать главу 3 «Курса лекций по механике»

Вся кинематика точки заключена в двух определениях:

$$\boldsymbol{\underline{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \dot{\boldsymbol{R}}, \quad \boldsymbol{\underline{W}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \ddot{\boldsymbol{R}},$$

где $\underline{V}$ и $\underline{W}$ векторы скорости и ускорения, а $\underline{R}$ –вектор положения точки в системе отсчета.

Если используется система координат с неподвижными базисными векторами (как декартова система в этой задаче), то дифференцируются только координаты. Последовательно находим вектор скорости $\underline{V} = \dot{x}\underline{d}_1 + \dot{y}\underline{d}_2$ и модуль скорости $V = |\underline{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$,

вектор ускорения и его модуль $\underline{W} = \ddot{x}\underline{d}_1 + \ddot{y}\underline{d}_2$, $W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$.

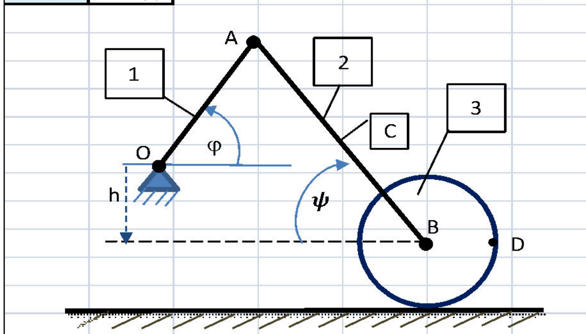
Касательное ускорение – проекция $\underline{W}$ на направление касательной: $W_\tau = \underline{W} \cdot \underline{\tau}$, где единичный орт касательной $\underline{\tau}$ (с точностью до знака) может быть найден как отношение вектора скорости к его величине: $\underline{\tau} = \frac{\underline{V}}{V}$. Таким образом, $W_\tau = \frac{\underline{W} \cdot \underline{V}}{V} = \frac{\ddot{x}\,\dot{x} + \ddot{y}\,\dot{y}}{V}$. Другой способ – касательное ускорение вычисляется как производная по времени от величины скорости: $W_\tau = \frac{dV}{dt}$. Нормальное ускорение $W_n = \sqrt{W^2 - {W_\tau}^2}$, радиус кривизны $\rho = \frac{V^2}{W_n}$.

3. Кинематика плоского движения.

Для заданного положения кривошипно-шатунного механизма вычислить угловую скорость ω_2 шатуна AB, угловую скорость колеса ω_3 и скорость точки D.

Массив исходных данных						
OA	**AB**	**h**	**R**	**Fi**	**OmegaFi**	**EpsFi**
1	3	0	1	30	1	2
2	4	1	1	45	2	4
3	5	-1	1	60	3	5
4	6	-2	1	90	4	8
2	5	1	1	120	5	-2
3	4	0	1	135	-1	0
2	3	1	1	180	1	1
2	4	1	1	-30	-2	2
3	6	0	1	90	6	3
2	5	2	1	-45	3	4

1	КинПд	FFP



OA	**AB**	**h**	**R**	**Fi**	**OmegaFi**	**EpsFi**
1	5	0	2	30	1	1
				φ		

Для выполнения этого задания необходимо прочитать параграф 4.1 главы 4 «Кинематика плоского движения» .

Вся кинематика твердого тела сводится к *основной формуле кинематики твердого тела*

$$\underline{\mathbf{V_B}} = \underline{\mathbf{V_A}} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{AB}} = \underline{\mathbf{V_A}} + \underline{\mathbf{V}}_{\mathbf{BA}}^{\text{вр}},$$

где $\underline{\mathbf{V}}_{\mathbf{BA}}^{\text{вр}}$ –вращательная скорость точки B вокруг точки A , перпендикулярная к $\underline{AB}$.

Дифференцированием из нее получается формула для ускорений

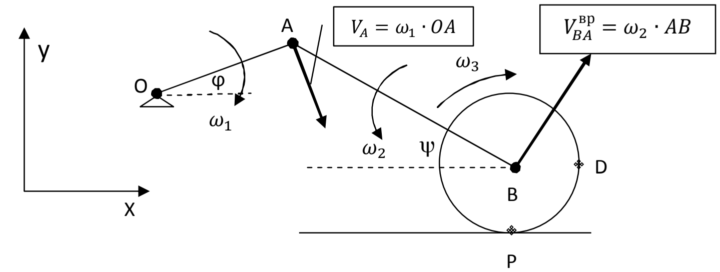
$$\underline{W_B} = \underline{W_A} + \underline{\varepsilon} \times \underline{AB} + \underline{\omega} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{AB}\right) = \underline{W_B} + \underline{W_{BA}^{\text{вр}}} + \underline{W_{BA}^{\text{ос}}},$$ где

$$\underline{W_{BA}^{\text{вр}}} = \underline{\varepsilon} \times \underline{AB}, \quad \underline{W_{BA}^{\text{ос}}} = \underline{\omega} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{AB}\right).$$

При плоском движении векторы угловой скорости $\underline{\omega} = \dot{\varphi}\, \underline{k}$ и углового ускорения $\underline{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\underline{k}$ перпендикулярны плоскости движения. Раскрывая двойное векторное произведение, получим

$\underline{W_{BA}^{\text{ос}}} = \underline{\omega} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{AB}\right) = \underline{\omega}\left(\underline{\omega} \cdot \underline{AB}\right) - \underline{AB}\,\omega^2 = -\underline{AB}\,\omega^2$, так как $\underline{\omega} \perp \underline{AB}$.

При решении учебных задач для плоского движения так называемым графоаналитическим способом, когда вычисляются величины векторов и они изображаются на рисунке, удобно изображать угловую скорость в виде круговой стрелки, показывающей известное либо предполагаемое направление вращения тела.



Скорость точки A $\underline{V_A} = \underline{V_O} + \underline{\omega_1} \times \underline{OA} = \underline{\omega_1} \times \underline{OA}$, ее величина $V_A = \omega_1 \cdot OA$.

Угловую скорость шатуна ω_2 и скорость точки B найдем, спроецировав векторную формулу $\underline{V_B} = \underline{V_A} + \underline{\omega_2} \times \underline{AB}$ на оси X и Y , учитывая при этом, что $V_{By} = 0$.

$$\begin{cases} V_{By} = 0 = . \dots . \\ V_{Bx} = . \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$ (самостоятельно!)

Необходимые для проецирования значения $\sin\psi$ и $\cos\psi$ легко определяются из рисунка $\sin\psi = \frac{h + \square \cdot sin\varphi}{AB}$, $\cos\psi = \sqrt{1 - sin^2\psi}$.

Угловую скорость колеса найдем с помощью все той же формулы, выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей колеса: $\underline{V_B} = \underline{V_P} + \underline{\omega_3} \times \underline{PB} = 0 + \underline{\omega_3} \times \underline{PB}$.

Скорость точки D : $\underline{V_D} = \underline{V_P} + \underline{\omega_3} \times \underline{PD} = 0 + \underline{\omega_3} \times \underline{PD}$.

4. Фундаментальные законы механики.

Следует прочитать параграфы 5.1, 5.1.2, 5.2, 5.2.8, 5.3 и 7.1.2 курса лекций.

Уравнения первого и второго фундаментальных законов полностью описывают трансляционное (поступательное) и вращательное движения любого, в том числе и твердого тела:.

$$\begin{cases} \underline{\dot{Q}} = \underline{F}^{ext} - \text{ первый ФЗМ,} & (1) \\ \underline{\dot{K}}_A = \underline{M}_A^{ext} - \text{ второй ФЗМ.} & (2) \end{cases}.$$

Из этих законов следует теорема об изменении кинетической энергии (частный случай третьего фундаментального закона)

$$\dot{\mathrm{T}} = \mathrm{N}^{\mathrm{ext}} + \mathrm{N}^{\mathrm{int}},$$

использование которой позволяет быстрее получать решение задачи о движении системы.

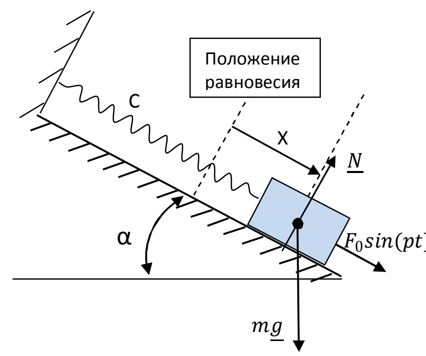
4.1. Динамика точки

Тело массой m, прикрепленное пружиной к неподвижной точке, движется по гладкой плоскости, образующей угол α с горизонтом, под действием возмущающей силы $F = F_0 sin(pt)$.

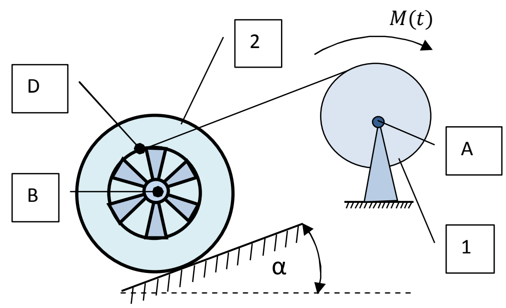
В начальный момент тело находилось в покое в положении равновесия. Найти

1) Частоту и период свободных колебаний
2) Уравнения движения тела

FFP	$C, \frac{\text{Н}}{\text{см}}$	m, кг	α, Град	F_0, н	$p, \frac{1}{\text{с}}$
1	5,12	2	30	12	10
2	50	2	45	30	8
3	180	45	90	6	30
4	12	3	90	1,5	21
5	0,196	0,1	60	3	18
6	0,392	0,8	30	4	8
7	2	2	0	2	11
8	0,75	3	30	4	6
9	12	3	0	5	16
10	4,5	2	45	0,5	17



4.2. Динамика плоского движения



№ вар	m_1	m_2	R_1	R_2	r_2	ρ_2	α	$M(t)$
1	3,0	4,0	0,10	0,35	0,25	0,30	30	$1-0{,}2\,t^2$
2	2,5	5,0	0,20	0,40	0,30	0,35	30	$1+0{,}1\,t^2$
3	4,0	4,0	0,30	0,30	0,20	0,25	30	$3-0{,}2\,t$
4	5,0	6,0	0,30	0,35	0,20	0,30	45	$4+0{,}2\,t^2$
5	6,0	7,0	0,20	0,30	0,20	0,25	30	$5-0{,}25t^2$
6	4,0	6,0	0,15	0,40	0,25	0,30	45	$4-0{,}25\,t^2$
7	2,0	5,0	0,25	0,40	0,20	0,25	30	$3+\ t^2$
8	1,0	2,0	0,15	0,50	0,20	0,40	30	$1+2\,t^2$
9	6,0	8,0	0,30	0,50	0,25	0,30	30	$5+0{,}1\,t^2$
10	3,0	10,0	0,15	0,40	0,20	0,35	30	$2+2\,t^2$

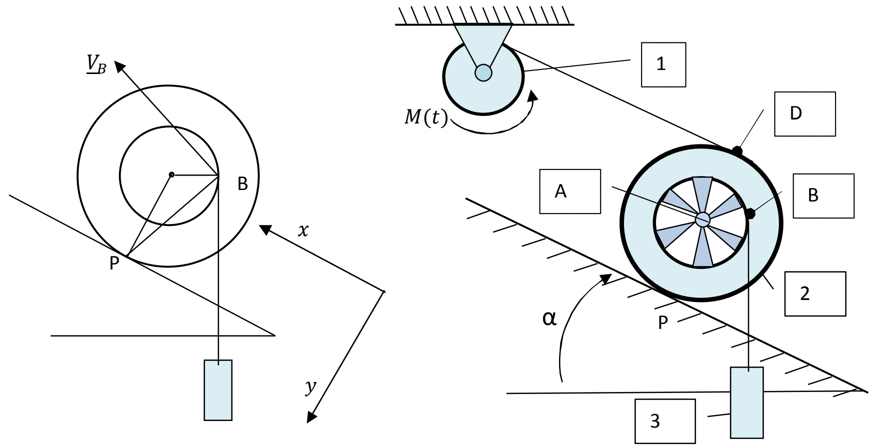
К барабану лебедки (1) приложен момент $M(t)$. Второй конец троса намотан на внутренний барабан колеса (2), которое катится без проскальзывания по наклонной плоскости. Барабан лебедки - однородный цилиндр; радиус инерции колеса ρ_2, то есть момент инерции $I_2 = m_2 \cdot \rho_2^2$. Определить закон вращения лебедки $\varphi_1(t)$. В начальный момент система была в покое. Задачу решить двумя способами:

А) С помощью фундаментальных законов (1) и (2)

В) С помощью теоремы об изменении кинетической энергии (3).

Пример применения теоремы об изменении кинетической энергии.

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме $\dot{T} = N^{ext} + N^{int}$ составить дифференциальное уравнение, описывающее движение системы. При заданных $M(t)$ и начальных условиях найти это движение.



За обобщенную координату примем угол поворота первого тела φ_1. Сообщим системе обобщенную скорость $\dot{\varphi}_1$ и вычислим кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_A^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}m_3V_3^2.$$

Кинематические соотношения имеют вид:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{V_D}{PD} = \frac{\dot{\varphi}_1 \cdot R_1}{2R_2}, V_A = \dot{\varphi}_2 \cdot R_2 = \frac{\dot{\varphi}_1 \cdot R_1}{2}, V_3 = V_B = \dot{\varphi}_2 \cdot b,$$

где обозначено $b \equiv PB = \sqrt{R_2^2 + r_2^2 - 2R_2r_2\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}})$.

Кинетическая энергия записывается в виде

$$T = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2\left(I_1 + m_2\frac{R_1^2}{4} + I_2\frac{R_1^2}{4R_2^2} + m_3\,b^2\,\frac{R_1^2}{4R_2^2}\right) \equiv \frac{1}{2}a\dot{\varphi}_1^2.$$

Мощность внутренних воздействий равна нулю, так как нити нерастяжимы, мощность внешних

$$N^{ext} \triangleq \underline{M} \cdot \left(\dot{\varphi}_1\underline{k}\right) + m_2\underline{g} \cdot \underline{V}_A + m_3\underline{g} \cdot \underline{V}_B,$$

или, с учетом $\underline{g} = g(-\sin\alpha\,\underline{i} + \cos\alpha\,\underline{j})$, $\quad \underline{V}_A = \frac{\dot{\varphi}_1 \cdot R_1}{2}\,\underline{i}$,

$$\underline{V}_B = \left(\dot{\varphi}_2\underline{k}\right) \times \underline{PB} = \left(\dot{\varphi}_2\underline{k}\right) \times (-r_2\cos\alpha\,\underline{i} - (R_2 + r_2\sin\alpha)\,\underline{j}) = \dot{\varphi}_2((R_2 + r_2\sin\alpha)\,\underline{i} - r_2\cos\alpha\,\underline{j}),$$

$$N = \dot{\varphi}_1(M(t) - m_2g\sin\alpha\frac{R_1}{2} - m_3g\frac{R_1}{2R_2}(R_2\sin\alpha + r_2)) \equiv Q_\varphi\dot{\varphi}_1,$$

где коэффициент Q_φ при скорости в выражении мощности называют обобщенной силой.

Записывая теорему в дифференциальной форме, получим $\left(a\ddot{\varphi}_1 - Q_\varphi\right)\dot{\varphi}_1 = 0$, и, поскольку теорема справедлива для любых движений,

$$a\ddot{\varphi}_1 = Q_\varphi.$$

В случае, когда приведенный инерционный коэффициент $a = const$ (как в данном случае), интегрирование уравнения не вызывает трудностей.