

**Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учре-
ждение высшего профессионального образования
Нижегородский государственный
технический университет им. Р. Е. Алексеева**

Кафедра "Теоретические основы электротехники"

Б.Ю. АЛТУНИН, А.А. КРАЛИН, Н.Г. ПАНКОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть 2

Методические указания для студентов направления
13.03.02 и 11.03.04 очной формы обучения

Нижегород
2013 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
Глава 1. Переходные процессы в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами	6
1.1. Определение переходных процессов и методов их анализа	6
1.2. Определение классического метода расчета переходных процессов. Законы коммутации	7
1.3. Алгебраизация системы уравнений для свободных токов. Характеристическое уравнение системы.....	10
1.4. Примеры расчета переходных процессов классическим методом	15
1.4.1. Переходные процессы в $R-L$ цепи при подключении ее к источнику постоянного и переменного напряжения.....	15
1.4.2. Переходные процессы при отключении катушки индуктивности от источника питания	17
1.4.3. Переходные процессы в $R-C$ цепи при ее разряде и заряде от источника постоянного напряжения	18
1.4.4. Переходные процессы при подключении последовательной $R-L-C$ цепи к источнику напряжения	20
1.5. Операторный метод расчета переходных процессов. Операторное изображение функций, их производных и интегралов	25
1.6. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.....	27
1.7. Переход от изображений к оригиналам. Теорема разложения	30
1.8. Последовательность расчета переходных процессов операторным методом. Примеры расчета	32
1.9. Расчет переходных процессов с использованием интеграла Дюамеля	33
1.10. Метод переменных состояния	36
<i>Вопросы и задачи для самопроверки</i>	<i>40</i>
Глава 2. Четырехполюсники и электрические фильтры	42
2.1. Основные определения. Формы записи уравнений пассивного четырехполюсника	42
2.2. Определение коэффициентов А-формы записи уравнений четырехполюсника	44
2.3. Т - и П - образные схемы замещения пассивного четырехполюсника. Пе- реход от одной формы записи уравнений четырехполюсника к другой.....	45
2.4. Характеристическое сопротивление и коэффициент распространения симметричного четырехполюсника	47
2.5. Назначение и классификация электрических фильтров	49

2.6.Простейшие низкочастотные и высокочастотные фильтры	51
2.7.Полосно-пропускающие и полосно-заграждающие фильтры	54
<i>Вопросы и задачи для самопроверки</i>	56
Глава 3. Цепи с распределенными параметрами	57
3.1. Уравнения однородной линии в стационарном режиме.....	58
3.2. Бесконечно длинная однородная линия. Согласованный режим работы.....	61
3.3. Линия без искажений.....	63
3.4 Уравнения линии конечной длины.....	64
3.5 Уравнения длинной линии как четырехполюсника.....	66
3.6 Определение параметров длинной линии из опытов холостого хода и короткого замыкания.....	66
3.7 Линия без потерь.....	67
3.8 Стоячие волны в длинных линиях.....	68
3.9. Входное сопротивление длинной линии.....	70
<i>Вопросы и задачи для самопроверки</i>	72
Глава 4. Практическая часть	76
4.1.Задания и варианты исходных данных для контрольных работ.....	76
4.2. Примеры решения задач.....	99
Рекомендуемая литература	107

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) состоит из двух частей, изучаемых студентами в очной, заочной и очно-заочной сокращенной форм обучения по направлениям подготовки 140400 «Электроэнергетика и электротехника», 210100 «Электроника и наноэлектроника». Настоящее учебное пособие предназначено для использования при изучении второй части курса ТОЭ, посвященной вопросам теории переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами, а также теории четырехполюсников и электрических фильтров.

Основные знания и умения, навыки, которые должны приобрести студенты в результате изучения второй части дисциплины ТОЭ:

- знать и уметь применять основные законы электротехники;
- знать и уметь применять методы анализа переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами;
- уметь использовать компьютерные системы математического и схемотехнического моделирования электрических цепей;
- знать терминологию и символику, применяемую в электротехнике;
- уметь производить измерения основных электрических величин, связанных с профилем инженерной деятельности;
- уметь включать электротехнические приборы и устройства, управлять ими и контролировать их эффективную и безопасную работу.

По второй части курса ТОЭ запланированы лекции, лабораторный практикум, выполнение курсовой работы по расчету переходных процессов в электрических цепях и двух контрольных заданий.

В соответствии с учебным планом курс лекций заканчивается экзаменом.

На лекциях рассматриваются основные вопросы курса. Ряд разделов программы студенты изучают на лабораторных занятиях и при выполнении курсовой работы и контрольных заданий. Большое внимание при изучении курса уделяется самостоятельной работе студентов.

Групповые лабораторные занятия имеют целью обучить студентов собирать схемы, производить измерения и выполнять расчеты электрических цепей на основе методов, изложенных в лекциях и учебных пособиях. В результате обучения студенты должны овладеть навыками решения электротехнических задач, лежащих в основе анализа функционирования электротехнических установок. Выполнение курсовой работы и контрольных заданий позволяет студентам усвоить новые знания в процессе дальнейшего образования и самообразования.

Глава 1. Переходные процессы в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами

1.1. Определение переходных процессов и методов их анализа

Под переходными процессами понимают процессы перехода от одного установившегося режима электрической цепи к другому установившемуся режиму, отличающемуся структурой цепи или параметрами ее элементов. Наиболее часто переходные процессы вызываются коммутацией, т.е. замыканиями или размыканиями выключателей в цепи. Физически переходные процессы представляют процессы перехода от энергетического состояния цепи в докоммутационном режиме к измененному энергетическому состоянию послекоммутационного режима. Они не могут протекать мгновенно, так как невозможно мгновенное изменение энергии, запасенной в электромагнитном поле цепи.

Переходные процессы обычно являются быстро протекающими и их длительность составляет микро- и миллисекунды, редко достигая длительности секунд. При переходных процессах могут возникать большие перенапряжения, сверхтоки, электромагнитные колебания, которые могут нарушить работу устройства вплоть до аварийного выхода его из строя. С другой стороны, переходные процессы находят широкое практическое применение, например, в различных устройствах силовой электроники, где важно задать закономерности изменения импульсов по амплитуде и частоте при прохождении их через различные функциональные блоки.

Основные методы анализа переходных процессов в линейных цепях:

1. *Классический метод*, заключающийся в непосредственном интегрировании линейных дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи.
2. *Операторный метод*, заключающийся в решении системы алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных с последующим переходом от найденных изображений к оригиналам.
3. *Метод переменных состояния*, представляющий собой упорядоченный способ определения электромагнитного состояния цепи на основе решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме (форме Коши).
4. Метод расчета с помощью *интеграла Дюамеля*, используемый при сложной форме кривой возмущающего воздействия.

1.2. Определение классического метода расчета переходных процессов. Законы коммутации

Классический метод расчета переходных процессов заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих изменения токов и напряжений на участках цепи в переходном процессе. В общем случае при использовании классического метода расчета составляются уравнения электромагнитного состояния цепи по законам Ома и Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов, связанных между собой на отдельных элементах цепи следующими соотношениями [1]:

- резистор (идеальное активное сопротивление) $u_R = Ri_R$;
- катушка индуктивности (идеальная индуктивность) $u_L = L \frac{di_L}{dt}$;
- катушка индуктивности при наличии магнитной связи с катушкой, обтекаемой током i_M $u_L = L \frac{di_L}{dt} \pm M \frac{di_M}{dt}$;
- конденсатор (идеальная емкость) $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, $u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$.

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую последовательно соединенные линейные резистор R , катушку индуктивности L и конденсатор C , при ее подключении к источнику с напряжением u (рис. 1).

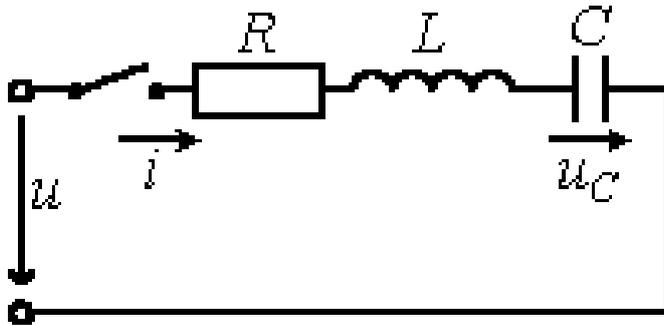


Рис.1.1

По второму закону Кирхгофа запишем для мгновенных значений уравнение равновесия напряжений:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (1.1)$$

Подставим в (1.1) значение тока через конденсатор (табл.1):

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

и получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно напряжения на конденсаторе u_C :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u. \quad (1.2)$$

В общем случае уравнение, описывающее переходный процесс в цепи с n независимыми накопителями энергии, имеет вид:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(\bar{t}), \quad (1.3)$$

где x – искомая функция времени (напряжение, ток, потокосцепление и т.п.); $f(\bar{t})$ – известное возмущающее воздействие (напряжение и (или) ток источника электрической энергии); a_k – постоянный коэффициент, определяемый параметрами цепи.

Порядок данного уравнения равен числу независимых накопителей энергии в цепи, под которыми понимаются катушки индуктивности и конденсаторы в упрощенной схеме, получаемой из исходной путем объединения индуктивностей, соединенных последовательно, и соответственно емкостей, соединения между которыми являются параллельными.

Как известно из математики, общий интеграл линейного дифференциального уравнения (1.3) представляет собой сумму частного решения исходного неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, получаемого из исходного путем приравнивания его левой части к нулю. Поскольку с математической стороны не накладывается каких-либо ограничений на выбор частного решения, применительно к электротехнике в качестве последнего удобно принять решение $x_{пр}$, соответствующее искомой переменной x в установившемся послекоммутационном режиме (теоретически для $t \rightarrow \infty$).

Частное решение $x_{пр}$ уравнения (1.3) определяется видом функции $f(\bar{t})$, стоящей в его правой части, и поэтому называется *принужденной составляющей*. Для цепей с заданными постоянными или периодическими напряжениями (токами) источников принужденная составляющая определяется путем расчета установившегося режима работы схемы после коммутации любым из рассмотренных в [1] методов расчета линейных электрических цепей.

Вторая составляющая $x_{св}$ общего решения уравнения (1.3) соответствует режиму, когда внешние (принуждающие) источники энергии на цепь непосредственно не воздействуют. Влияние источников проявляется опосредованно через энергию, запасенную в полях катушек индуктивности и конденсаторов.

Данный режим работы схемы называется свободным, а переменная $x_{св}$ - *свободной составляющей*.

В соответствии с вышесказанным, общее решение дифференциального уравнения (1.3) имеет вид

$$x = x_{пр} + x_{св} \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) показывает, что при классическом методе расчета послекоммутационный процесс рассматривается как наложение друг на друга двух режимов – принужденного, наступающего как бы сразу после коммутации, и свободного, имеющего место только в течение переходного процесса.

Общее решение (1.4) дифференциального уравнения (1.3) определяет значения полного тока или полного напряжения той или иной ветви цепи, которые имеют место в действительности при переходном процессе и могут быть измерены и зафиксированы на осциллограммах.

Необходимо подчеркнуть, что, поскольку принцип наложения справедлив только для линейных систем, классический метод решения, основанный на разложении общего решения (1.4), справедлив также только для линейных цепей.

В соответствии с определением свободной составляющей $x_{св}$ в ее математическое выражение входят постоянные интегрирования A_k , число которых равно порядку дифференциального уравнения. Постоянные интегрирования находятся из начальных условий, которые принято делить на *независимые* и *зависимые*. К независимым начальным условиям относятся потокосцепление (ток) для катушки индуктивности и заряд (напряжение) на конденсаторе в момент времени $t = 0$ (момент коммутации).

Независимые начальные условия определяются на основании законов (правил) коммутации.

Первый закон (правило) коммутации. Ток через катушку индуктивности L непосредственно до коммутации $i_L \text{ (} \ominus \text{)}_-$ равен току непосредственно после коммутации $i_L \text{ (} \ominus \text{)}_+$:

$$i_L \text{ (} \ominus \text{)}_+ = i_L \text{ (} \ominus \text{)}_- \quad (1.5)$$

Время $t = 0_-$ представляет собой время непосредственно до коммутации, $t = 0_+$ - после коммутации.

Второй закон (правило) коммутации. Напряжение на конденсаторе непосредственно до коммутации $u_C \text{ (} \ominus \text{)}_-$ равно напряжению непосредственно после коммутации:

$$u_C \text{ (} \ominus \text{)}_+ = u_C \text{ (} \ominus \text{)}_- \quad (1.6)$$

Доказать законы коммутации можно от противного: если допустить возможность мгновенного скачка тока индуктивности или напряжения на конден-

саторе, то получаются бесконечно большие значения $u_L = d\psi/dt = \infty$ и $i_C = dq/dt = \infty$, что приводит к нарушению законов Кирхгофа.

Необходимо подчеркнуть, что более общей физической формулировкой законов коммутации является положение о невозможности скачкообразного изменения в момент коммутации для схем с катушкой индуктивности – потокоцеплений, а для схем с конденсаторами – зарядов на них.

Зависимыми начальными условиями называются значения остальных токов и напряжений в схеме (токи через конденсаторы, токи через резисторы, напряжения на индуктивностях, напряжения на резисторах). К ним относят также значения производных от искомой функции, определяемых по независимым начальным условиям при помощи уравнений, составляемых по законам Кирхгофа для момента коммутации $t=0$. Перечисленные токи, напряжения и их производные могут меняться скачком в момент коммутации, поэтому следует различать *докоммутационные* (при $t=0_-$) и *послекоммутационные* (при $t=0_+$) начальные условия.

Необходимое число начальных условий равно числу постоянных интегрирования. Поскольку дифференциальное уравнение вида (1.3) рационально записывать для переменной, начальное значение которой относится к независимым начальным условиям, задача нахождения начальных условий обычно сводится к нахождению значений этой переменной и ее производных до $(n-1)$ порядка включительно при $t=0$.

1.3. Алгебраизация системы уравнений для свободных токов. Характеристическое уравнение системы

Свободный ток представляет собой решение однородного дифференциального уравнения, когда внешние (принуждающие) источники энергии на цепь непосредственно не воздействуют. Решение таких уравнений записывают в виде показательных функций Ae^{pt} , и уравнение для каждого свободного тока представляется в виде $i_{cb} = Ae^{pt}$. Постоянная интегрирования A для каждого свободного тока определяется отдельно, а показатель затухания p одинаков для всех свободных токов, так как цепь охвачена общим переходным процессом.

Определим производную от свободного тока:

$$\frac{di_{cb}}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{pt}) = pAe^{pt} = pi_{cb}.$$

Следовательно, производную от свободного тока можно заменить алгебраическим произведением pi_{cb} и соответственно свободное напряжение на индуктивном элементе $L \frac{di_{cb}}{dt}$ – на Lpi_{cb} .

Определим интеграл от свободного тока и учтем равенство нулю постоянной интегрирования в свободных составляющих тока и напряжения:

$$\int i_{\text{св}} dt = \int Ae^{pt} dt = Ae^{pt}/p = i_{\text{св}}/p.$$

Следовательно, интеграл от свободного тока можно заменить алгебраическим делением $i_{\text{св}}/p$ и соответственно свободное напряжение на конденсаторе $\frac{1}{C} \int i_{\text{св}} dt$ – на $i_{\text{св}}/Cp$.

Алгебраизация исходной системы интегрально-дифференциальных уравнений, составленных для свободных токов электрической цепи на основании законов Кирхгофа или по методу контурных токов, осуществляется заменой символов дифференцирования и интегрирования соответственно умножением и делением на оператор p .

Число полученных алгебраических уравнений равно числу свободных токов электрической цепи, и каждое уравнение имеет нулевую правую часть. В этом случае определитель алгебраизированной системы уравнений свободных токов должен равняться нулю.

$$\Delta = 0. \quad (1.7)$$

Уравнение $\Delta = 0$ называют *характеристическим уравнением*. Единственным неизвестным в нем является показатель затухания p .

Характеристическое уравнение может быть получено следующими способами:

- непосредственно на основе дифференциального уравнения вида (1.2) путем исключения из системы уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи на основании законов Кирхгофа, всех неизвестных величин, кроме одной, относительно которой и записывается уравнение (1.2);

- путем использования выражения для входного сопротивления цепи на синусоидальном токе;

- на основе выражения главного определителя алгебраизированной системы уравнений свободных токов.

Согласно первому способу получено дифференциальное уравнение (1.2) относительно напряжения u_C на конденсаторе для последовательного соединения активного сопротивления, индуктивности и конденсатора (рис. 1.1), на основе которого записывается характеристическое уравнение:

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (1.8)$$

Применение второго и третьего способов составления характеристического уравнения рассмотрим на примере цепи рис. 1.2.

Составление характеристического уравнения по методу входного сопротивления заключается в следующем: записывается входное сопротивление цепи на переменном токе; $j\omega$ заменяется на оператор p ; полученное выражение $Z(\omega) \stackrel{?}{=} 0$ приравнивается к нулю.

Уравнение $Z(\omega) \stackrel{?}{=} 0$ совпадает с характеристическим. Входное сопротивление может быть записано относительно места разрыва любой ветви схемы.

При этом активный двухполюсник заменяется пассивным по аналогии с методом эквивалентного генератора. Данный способ составления характеристического уравнения предполагает отсутствие в схеме магнитосвязанных ветвей; при наличии таковых необходимо осуществить их предварительное развязывание [].

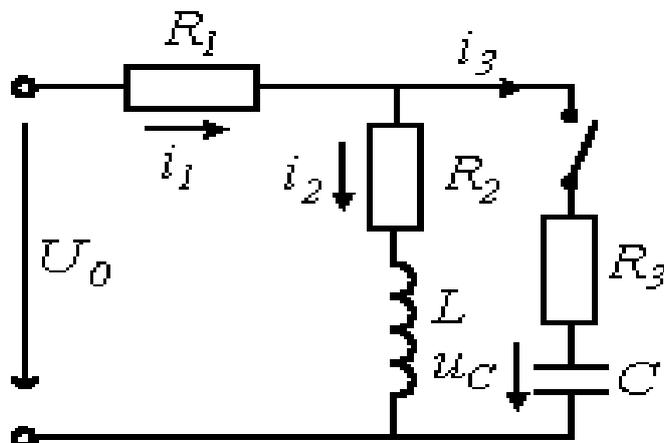


Рис.1.2

Для цепи на рис. 1.2 входное сопротивление относительно зажимов источника составит:

$$Z(\omega) \stackrel{?}{=} R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L)(R_3 + \frac{1}{j\omega C})}{(R_2 + j\omega L) + (R_3 + \frac{1}{j\omega C})}$$

Заменяв $j\omega$ на p и приравняв полученное выражение к нулю, запишем

$$Z(\omega) \stackrel{?}{=} R_1 + \frac{(R_2 + pL)(R_3 + \frac{1}{pC})}{R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC}} = 0$$

или

$$CL(R_1 + R_2)p^2 + C(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)p + (R_1 + R_2) \stackrel{?}{=} 0. \quad (1.9)$$

При составлении характеристического уравнения на основе выражения главного определителя алгебраизированной системы уравнений свободных токов следует учесть, что число уравнений равно числу неизвестных свободных составляющих токов. Характеристическое уравнение получается путем приравнивания записанного определителя к нулю. Поскольку выражение для главного определителя не зависит от правых частей системы неоднородных уравнений, его составление можно производить на основе системы уравнений, записанных для полных токов.

Для цепи на рис. 1.1 алгебраизированная система уравнений на основе метода контурных токов имеет вид

$$\begin{aligned} i_{11} R_1 + R_2 i_{22} &= U_0; \\ -i_{11} R_2 + i_{22} \left(R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда выражение для главного определителя этой системы:

$$D = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix} = R_1 + R_2 \left(R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - R_2^2$$

Приравняв D к нулю, получим результат, аналогичный (1.9).

Число корней характеристического уравнения равно степени этого уравнения. Например, если характеристическое уравнение является уравнением первого порядка, то оно имеет один отрицательный действительный корень. Уравнение второй степени, например 1.8, 1.9, имеет два корня, которые в зависимости от параметров цепи могут быть следующего типа:

- два действительных неравных отрицательных корня;
- два действительных равных отрицательных корня;
- два комплексно-сопряженных корня с отрицательной действительной частью.

Уравнение третьей степени имеет три корня, которые в зависимости от параметров цепи могут быть следующего типа:

- три действительных неравных отрицательных корня;
- три действительных равных отрицательных корня, из которых два равны друг другу;
- три действительных равных отрицательных корня;
- один действительный отрицательный корень и два комплексно-сопряженных корня с отрицательной действительной частью.

Действительные части корней характеристического уравнения должны быть отрицательными, так как в линейной цепи свободная составляющая тока обязательно затухает во времени ввиду отсутствия в цепи источников ЭДС.

Рассмотрим характер изменения свободных составляющих для переходных процессов в цепях с характеристическим уравнением первой и второй степеней.

Когда характеристическое уравнение является уравнением первого порядка и имеет один отрицательный действительный корень, свободный ток

$$i_{\text{св}} = Ae^{pt} = Ae^{-at}, \quad (1.10)$$

где $p = -a$ зависит только от параметров цепи, A - постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями.

Свободный ток затухает по экспоненте, и имеет место *апериодический переходный процесс*. Величину $\tau = 1/a = 1/|p|$ называют *постоянной времени* цепи. Постоянную времени можно интерпретировать как временной интервал, в течение которого свободная составляющая уменьшится в e раз по сравнению с начальным значением. Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Однако на практике считается, что он заканчивается при $t = \dots 4 \tau$.

Если характеристическое уравнение второй степени имеет два действительных неравных отрицательных корня ($p_1 = -a, p_2 = -b$), то свободный ток складывается из двух экспонент с разными постоянными времени

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A_1 e^{-at} + A_2 e^{-bt}, \quad (1.11)$$

Если характеристическое уравнение имеет два действительных равных отрицательных корня ($p_1 = p_2 = -a$), то выражение для свободного тока должно быть взято в виде

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt} = (A_1 + A_2 t) e^{-at}. \quad (1.12)$$

Если характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня ($p_1 = -\delta + j\omega_0, p_2 = -\delta - j\omega_0$), то свободный ток представляет собой затухающее синусоидальное колебание (*колебательный переходный процесс*) при угловой частоте ω_0 и начальной фазе ν . Его выражение записывается в виде

$$i_{\text{св}} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu). \quad (1.13)$$

Огибающая колебаний описывается экспонентой $Ae^{-\delta t}$, где δ - коэффициент затухания.

Поскольку физически колебательный процесс связан с периодическим обменом энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, комплексно-сопряженные корни могут иметь место только для цепей, содержащих емкостной и индуктивный накопители.

В общем случае методика расчета переходных процессов классическим методом включает следующие этапы:

1. Выбор положительных направлений токов в ветвях цепи.
2. Определение токов и напряжений непосредственно до коммутации.
3. Нахождение принужденной составляющей общего решения на основании расчета установившегося режима послекоммутационной цепи.
4. Составление характеристического уравнения и определение его корней. Запись выражения свободной составляющей в форме, определяемой типом найденных корней.
5. Подстановка принужденной и свободной составляющих в соотношение (1.4) и получение уравнений для полных токов и напряжений.
6. Определение начальных условий и на их основе – постоянных интегрирования.

1.4. Примеры расчета переходных процессов классическим методом

1.4.1. Переходные процессы в R - L цепи при подключении её к источнику постоянного и переменного напряжения

Ток в такой цепи (рис.1.3) определяется дифференциальным уравнением:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u,$$

где для источника постоянного напряжения $u = U_0$, для источника переменного напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$.

Согласно рассмотренной методике, для тока можно записать $i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}$.

Для постоянного напряжения принужденная составляющая тока $i_{\text{пр}} = \frac{U_0}{R}$.

Характеристическое уравнение первого порядка

$$Lp + R = 0,$$

его единственный корень $p = -R/L$ и постоянная времени $\tau_L = |1/p| = L/R$.

Таким образом, свободная составляющая тока

$$i_{\text{св}} = Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Запишем уравнение полного тока

$$i = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

В соответствии с первым законом коммутации, $i(0_-) = i(0_+) = 0$.

По начальным условиям определяем постоянную интегрирования:

$$i(0) = \frac{U_0}{R} + A = 0, \quad A = -U_0/R.$$

Таким образом, ток в цепи в переходном процессе описывается уравнением

$$i(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}},$$

а напряжение на катушке индуктивности – выражением

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Качественный вид кривых $i(t)$ и $u_L(t)$, соответствующих полученным решениям, представлен на рис. 1.4.

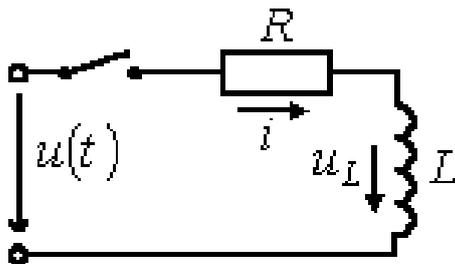


Рис.1.3

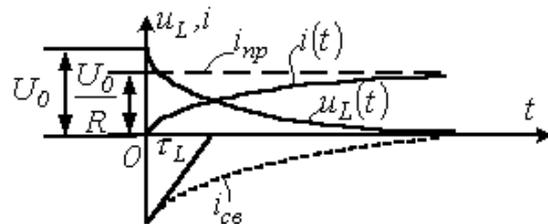


Рис.1.4

При переменном источнике питания комплексная амплитуда принужденной составляющей рассчитывается с использованием символического метода:

$$\dot{I}_{\text{прт}} = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L} = \frac{U_m e^{j\psi U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\varphi}} = I_m e^{j(\psi - \varphi)},$$

где амплитудное значение и фаза $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\varphi = \arctg(\omega L/R)$.
Уравнение принужденной составляющей тока $i_{\text{пр}} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)$.

Выражение свободной составляющей не зависит от типа источника напряжения. Следовательно,

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

По начальным условиям определяем постоянную интегрирования:

$$i(0) = I_m \sin(\psi - \varphi) \quad \text{и} \quad A = 0; A = -I_m \sin(\psi - \varphi).$$

Таким образом, окончательно получаем уравнение полного тока:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

На рис.1.5 приведены графики принужденного, свободного и полного токов.

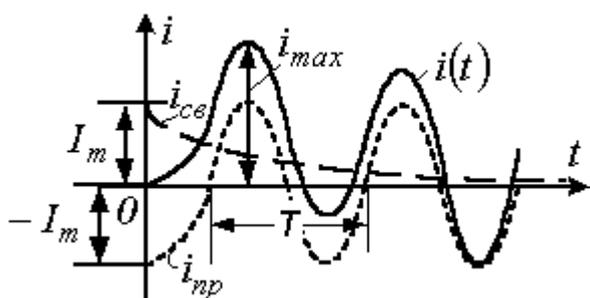


Рис.1.5

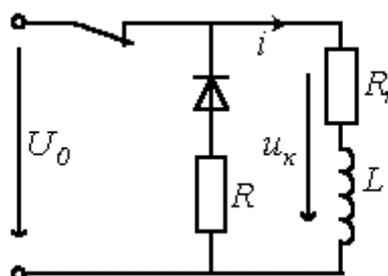


Рис.1.6

Выполним анализ полученного выражения полного тока:

1. При начальной фазе напряжения $\psi = \varphi \pm \pi$ постоянная интегрирования $A=0$. Таким образом, в этом случае коммутация не повлечет за собой переходного процесса и в цепи сразу возникнет принужденный установившийся режим.

2. При $\psi - \varphi = \pm \pi/2$ свободная составляющая тока максимальна по модулю и ток переходного процесса достигает своей наибольшей величины. Если постоянная времени τ_L значительна по величине, то за полпериода свободная составляющая существенно не уменьшается и максимальная величина тока переходного процесса i_{\max} может примерно вдвое превышать амплитуду принужденного тока $i_{\text{пр}}$ установившегося режима (рис.1.5). В пределе при $\tau_L \rightarrow \infty$ максимальное значение тока переходного режима равно удвоенной амплитуде принужденного тока $i_{\max} = 2I_m$.

1.4.2. Переходные процессы при отключении катушки индуктивности от источника питания

При размыкании ключа (рис. 1.6) катушка индуктивности отключается от источника и шунтируется разрядным сопротивлением R , соединенным последовательно с обратным диодом.

Принужденная составляющая тока через катушку индуктивности равна нулю.

Характеристическое уравнение первого порядка

$$Lp + R + R_k = 0,$$

его корень $p = -(R + R_k)/L$ и постоянная времени $\tau_L = L/(R + R_k)$.

В соответствии с первым законом коммутации

$$i(0) = \frac{U_0}{R_k} = A.$$

Ток через катушку индуктивности и напряжение на ней описываются уравнениями:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}, \quad u_k = -\frac{R}{R_k} U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Анализ показывает, что при размыкании цепей, содержащих индуктивные элементы, на них могут возникать большие перенапряжения, которые требуют принятия специальных мер по защите. Действительно, при $n = R/R_k \gg 1$ модуль напряжения на катушке индуктивности в момент коммутации будет превышать напряжение источника: $u(0) = nU_0$. При отсутствии разрядного сопротивления указанное напряжение прикладывается к размыкающим контактам, вследствие чего между ними возникает дуга.

1.4.3. Переходные процессы в R-C цепи при ее разряде и заряде от источника постоянного напряжения

Рассмотрим переходные процессы в цепи, состоящей из последовательно соединенных участков с сопротивлением R и конденсатора емкостью C (рис.1.7).

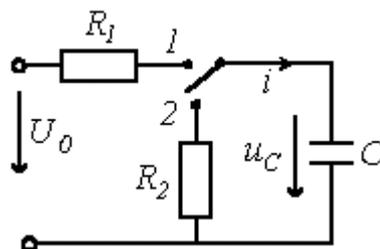


Рис.1.7

При переводе ключа в положение 1 начинается процесс заряда конденсатора от источника постоянного напряжения U_0 :

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв}.$$

Принужденная составляющая напряжения на конденсаторе $u_{Cпр} = U_0$.

Из характеристического уравнения

$$R_1 + \frac{1}{Cp} = 0$$

определяется корень $p = -1/R_1 C$. Отсюда постоянная времени $\tau_{C1} = R_1 C$.

Таким образом,

$$u_C = U_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}.$$

При $t=0$ напряжение на конденсаторе равно $u_C(0)$ (в общем случае к моменту коммутации конденсатор может быть заряженным, т.е. $u_C(0) \neq 0$).

Тогда $A = u_C(0) - U_0$ и

$$u_C = U_0 + (u_C(0) - U_0)e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}.$$

Соответственно для зарядного тока можно записать

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0 - u_C(0)}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}.$$

В зависимости от начальной величины напряжения на конденсаторе $u_C(0)$: 1 - $u_C(0) = 0$; 2 - $0 < u_C(0) < U_0$; 3 - $u_C(0) > 0$; 4 - $u_C(0) > U_0$ возможны четыре вида кривых переходного процесса, которые иллюстрирует рис. 1.8,а.

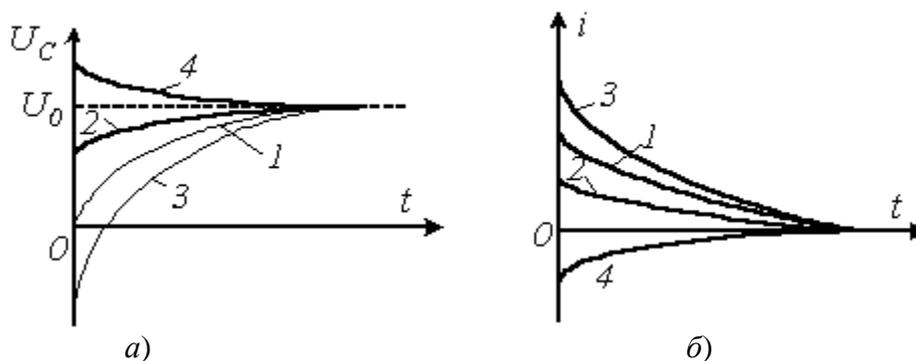


Рис.1.8

При разряде конденсатора на резистор R_2 (ключ на рис.1.7 переводится в положение 2) $u_{Cпр} = 0$. Постоянная времени $\tau_{C2} = R_2 C$.

Тогда, принимая, что к моменту коммутации конденсатор был заряжен до напряжения $u_{C1}(0)$, напряжение на нем в переходном режиме имеет вид

$$u_C \approx u_{C1} e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}}.$$

Соответственно разрядный ток

$$i \approx C \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_{C1}}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}}.$$

В зависимости от начальной величины напряжения на конденсаторе u_{C1} : 1 - $u_{C1} = U_0$; 2 - $0 < u_{C1} < U_0$; 3 - $u_{C1} < 0$; 4 - $u_{C1} > U_0$ возможны также четыре вида кривых переходного процесса, которые иллюстрирует рис. 1.8,б.

В заключение отметим, что процессы заряда и разряда конденсатора используются в генераторах пилообразного напряжения, широко применяемых в автоматике.

1.4.4. Переходные процессы при подключении последовательной R-L-C-цепи к источнику напряжения

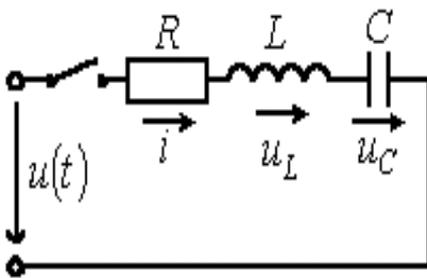


Рис.1.9

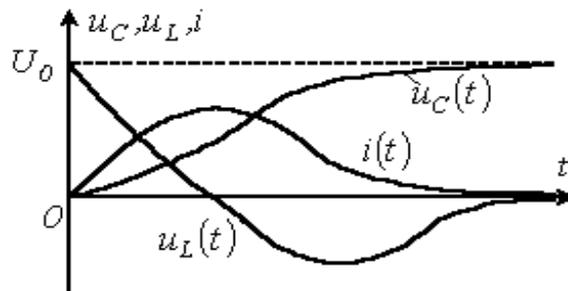


Рис.1.10

Рассмотрим два случая:

а) источник постоянного напряжения $u \approx U_0$;

б) источник переменного напряжения $u \approx U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$, где φ_U - начальная фаза напряжения.

Согласно классическому методу расчета переходных процессов для напряжения на конденсаторе в цепи на рис. 1.9 можно записать

$$u_C \approx u_{Cпр} + u_{Cсв}.$$

Для источника постоянного напряжения принужденная составляющая этого напряжения

$$u_{Cпр} = U_0.$$

Характеристическое уравнение данной цепи (1.8)

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0,$$

корни уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

В зависимости от соотношения параметров цепи возможны три типа корней и соответственно три варианта выражения для свободной составляющей:

$$1. \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad R > R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - \text{апериодический режим.}$$

$R_{\text{кр}}$ - критическое сопротивление контура, меньше которого свободный процесс носит колебательный характер.

В этом случае свободная составляющая определяется выражением (1.11)

$$u_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

2. $R = R_{\text{кр}}$ - предельный случай апериодического режима.

В этом случае корни $p_1 = p_2 = p = -R/2L$ и используется выражение (1.12)

$$u_{\text{св}} = (A_1 + A_2 t) e^{pt}.$$

3. $R < R_{\text{кр}}$ - периодический (колебательный) характер переходного процесса.

В этом случае корни $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ и используется выражение (1.13)

$$u_{\text{св}} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где $\delta = R/2L$ - коэффициент затухания; $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \frac{2\pi}{T_0}$ - угловая частота собственных колебаний; T_0 - период собственных колебаний.

Для апериодического характера переходного процесса можно записать сумму принужденной и свободной составляющих напряжения на конденсаторе:

$$u_C = U_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Для нахождения постоянных интегрирования учтем, что в общем случае $u_C(0) \neq 0$ и в соответствии с первым законом коммутации $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i(0)}{C} = 0$, запишем для $t=0$ два уравнения:

$$\begin{aligned} u_C(0) - U_0 &= A_1 + A_2, \\ 0 &= p_1 A_1 + p_2 A_2, \end{aligned}$$

решая которые, получим постоянные интегрирования и выражение для $u_C(t)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= U_0 - u_C(0) \frac{p_2}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = U_0 - u_C(0) \frac{p_1}{p_2 - p_1}. \\ u_C(t) &= U_0 + U_0 - u_C(0) \left(\frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} \right). \end{aligned}$$

Ток в последовательной R-L-C цепи

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C U_0 - u_C(0) \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = U_0 - u_C(0) \frac{p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}}{L(p_1 - p_2)}$$

и напряжение на катушке индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = U_0 - u_C(0) \frac{p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2}.$$

На рис. 1.10 представлены качественные кривые $u_C(t)$, $i(t)$ и $u_L(t)$, соответствующие аperiodическому переходному процессу при $u_C(0) \neq 0$.

Для аperiodического переходного режима с критическим сопротивлением на основании (1.12) находим сумму принужденной и свободной составляющих напряжения на конденсаторе:

$$u_C(t) = U_0 + (A_1 + A_2 t) e^{pt}.$$

При $t=0$ запишем два уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} u_C(0) - U_0 &= A_1; \\ p A_1 + A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u_C(t) = U_0 + (U_0 - u_C(0)) \left(1 + \frac{R}{2L}t\right) e^{pt}$$

и

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = (A_2 e^{pt} + pA_1 e^{pt} + pA_2 t e^{pt}) = CpA_2 t e^{pt} = \frac{U_0 - u_C(0)}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Для колебательного переходного процесса на основании (1.13) находим сумму принужденной и свободной составляющих напряжения на конденсаторе:

$$u_C(t) = U_0 + A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Для нахождения постоянных интегрирования при $t = 0$ запишем два уравнения:

$$\begin{aligned} u_C(0) - U_0 &= A \sin \varphi; \\ 0 &= -\delta A \sin \varphi + A \omega_0 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Решая уравнения, получим постоянные интегрирования:

$$A = (u_C(0) - U_0) \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \omega_0 / \delta.$$

Определяем уравнения для напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ и тока в цепи:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_0 + \frac{u_C(0) - U_0}{\sin \varphi} e^{-\delta t} (\sin \omega_0 t \cos \varphi + \cos \omega_0 t \sin \varphi) = U_0 + (u_C(0) - U_0) e^{-\delta t} \times \\ &\times \left(\frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) = U_0 + \frac{u_C(0) - U_0}{\omega_0} e^{-\delta t} \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} \sin \left(\omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} \right) = \\ &= U_0 + \frac{u_C(0) - U_0}{\sqrt{LC} \omega_0} e^{-\delta t} \sin \left(\omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} \right); \end{aligned}$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C (U_0 - u_C(0)) \frac{\omega_0^2 + \delta^2}{\omega_0} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t = \frac{U_0 - u_C(0)}{L \omega_0} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t.$$

На рис. 1.11 представлены качественные кривые $u_C(t)$ и $i(t)$, соответствующие колебательному переходному процессу при $u_C(0) = 0$.

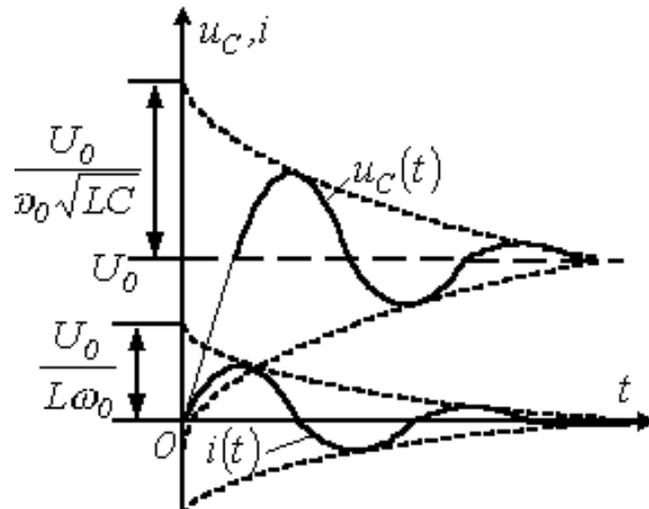


Рис.1.11

При подключении $R-L-C$ -цепи к источнику синусоидального напряжения для нахождения принужденных составляющих тока в цепи и напряжения на конденсаторе следует воспользоваться символическим методом расчета, в соответствии с которым

$$\dot{I}_{\text{прт}} = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{U_m e^{j\varphi_U}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = I_m e^{j(\varphi_U - \varphi)};$$

$$\dot{U}_{\text{Спрт}} = -j\frac{1}{\omega C} \dot{I}_{\text{прт}} = \frac{I_m}{\omega C} e^{j(\varphi_U - \varphi - \frac{\pi}{2})} = U_{Cm} e^{j(\varphi_U - \varphi - \frac{\pi}{2})},$$

где $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$; $\varphi = \arctg(\omega L - 1/\omega C) / R$; $U_{Cm} = I_m / \omega C$.

Таким образом, уравнения принужденных составляющих тока в цепи и напряжения на конденсаторе

$$i_{\text{пр}} = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi); \quad u_{\text{Спр}} = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \varphi_U - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

В зависимости от величины активного сопротивления возможны три режима:

1. $R > R_{\text{кр}};$

2. $R = R_{\text{кр}};$

3. $R < R_{\text{кр}};$

$p_1 \neq p_2$

$p_1 = p_2 = -\delta$

$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$

Наибольший интерес представляет третий режим, связанный с появлением во время переходного процесса собственных колебаний с частотой ω_0 . При

этом возможны, в зависимости от соотношения частот собственных колебаний и напряжения источника, три характерные варианта: 1 - $\omega \gg \omega_0$; 2 - $\omega \ll \omega_0$; 3 - $\omega = \omega_0$ - которые представлены на рис. 1.12, а, б, в соответственно.

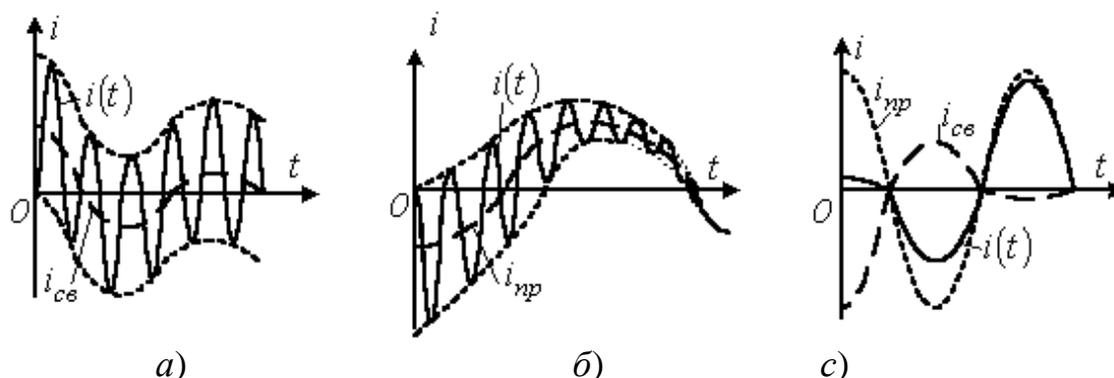


Рис.1.12

1.5. Операторный метод расчета переходных процессов. Операторное изображение функций, их производных и интегралов

Сущность операторного метода заключается в том, что функции $f(t)$ вещественной переменной t , которую называют *оригиналом*, ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + j\omega$, которую называют *изображением*. В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор p , а интегрирование – делением на него), что в свою очередь определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных. При решении этих уравнений находят изображения и, далее, путем обратного перехода – оригиналы. Важнейшим моментом при этом в практическом плане является необходимость определения только независимых начальных условий, что существенно облегчает расчет переходных процессов в цепях высокого порядка по сравнению с классическим методом.

Изображение $F(p)$ заданной функции $f(t)$ определяется в соответствии с *прямым преобразованием Лапласа*:

$$F(p) \stackrel{\text{пр}}{=} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.14)$$

В сокращенной записи соответствие между изображением и оригиналом обозначается как:

$$F\{f\} \text{ или } F\{f\} = L\{f\}.$$

Следует отметить, что если оригинал $f(t)$ увеличивается с ростом t , то для сходимости интеграла (1.14) необходимо более быстрое убывание модуля e^{-st} . Функции, с которыми встречаются на практике при расчете переходных процессов, этому условию удовлетворяют.

В качестве примера в табл. 1 приведены изображения некоторых характерных функций, часто встречающихся при анализе переходных режимов [1].

Таблица 1.1

Изображения типовых функций

Оригинал $f(t)$	A	$e^{\alpha t}$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$\text{sh} \alpha t$	$\text{ch} \alpha t$
Изображение $F(s)$	$\frac{A}{p}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$

Отметим основные свойства изображений функций.

1. Изображение суммы функций равно сумме изображений слагаемых:

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \text{ изображается } \sum_{k=1}^n F_k(s). \quad (1.15)$$

2. При умножении функции на постоянный коэффициент на тот же коэффициент умножается изображение:

$$A f(t) \text{ изображается } A F(s). \quad (1.16)$$

С использованием этих свойств и данных табл. 1, определим изображение экспоненциальной функции:

$$U_0 e^{-\alpha t} \text{ изображается } \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p + \alpha}.$$

Запишем изображение производной функции. В курсе ТОЭ [1] доказывается, что если существует изображение функции $f(t) \text{ изображается } F(s)$, то $df/dt \text{ изображается } pF(s) - f(0)$, где $f(0)$ - начальное значение функции $f(t)$.

Таким образом, для напряжения на индуктивном элементе можно записать:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \text{ изображается } LpI(s) - Li(0) \quad (1.17)$$

или при нулевых начальных условиях из (1.17)

$$u_L(t) \text{ изображается } LpI(s).$$

Отсюда операторное сопротивление катушки индуктивности $Z(p) = Lp$.

Аналогично для интеграла: если $f(t) = F(p)$, то $\int_0^t f(t) dt = \frac{F(p)}{p}$.

С учетом ненулевых начальных условий для напряжения на конденсаторе можно записать:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0). \quad (1.18)$$

Тогда изображение $u_C(p) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}$. (1.19)

При нулевых начальных условиях из (1.19) $u_C(p) = \frac{1}{Cp} I(p)$ и операторное сопротивление конденсатора $Z(p) = \frac{1}{Cp}$.

1.6. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

Пусть имеем некоторую ветвь $m-n$ (рис. 1.13), выделенную из некоторой сложной цепи и содержащую R, L, C и источник ЭДС $e(t)$.

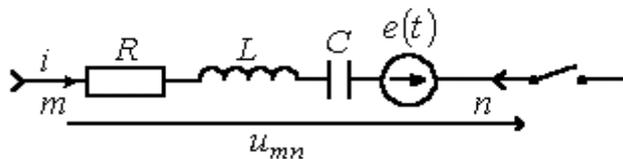


Рис.1.13

Замыкание ключа во внешней цепи приводит к переходному процессу, при этом начальные условия для тока в ветви и напряжения на конденсаторе в общем случае ненулевые.

Для мгновенных значений токов и напряжений можно записать:

$$u_{mn}(t) = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = e(t).$$

Тогда на основании приведенных выше соотношений получим:

$$U_{mn}(p) = I(p) \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} = E(p);$$

$$I(p) \stackrel{\sim}{=} \frac{U_{mn}(p) - Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} + E(p)}{Z(p)}. \quad (1.20)$$

где $Z(p) \stackrel{\sim}{=} R + Lp + \frac{1}{Cp}$ - операторное сопротивление рассматриваемого участка цепи.

Следует обратить внимание, что операторное сопротивление $Z(p)$ соответствует комплексному сопротивлению ветви $Z(j\omega)$ в цепи синусоидального тока при замене оператора p на $j\omega$. Слагаемое $Li(0)$ представляет собой *внутреннюю ЭДС*, обусловленную запасом энергии в магнитном поле индуктивной катушки вследствие протекания через нее тока $i(0)$ до коммутации. Слагаемое $u_C(0)/p$ представляет собой *внутреннюю ЭДС*, обусловленную запасом энергии в электрическом поле конденсатора вследствие наличия напряжения на нем $u_C(0)$ непосредственно до коммутации.

Уравнение (1.20) является математической записью *закона Ома* для участка цепи с источником ЭДС в операторной форме. В соответствии с ним для ветви на рис. 1.13 можно составить *операторную схему замещения*, представленную на рис. 1.14. В соответствии с (1.20) внутренняя ЭДС $Li(0)$ направлена согласно с направлением тока $I(p)$, внутренняя ЭДС $u_C(0)/p$ - встречно току.

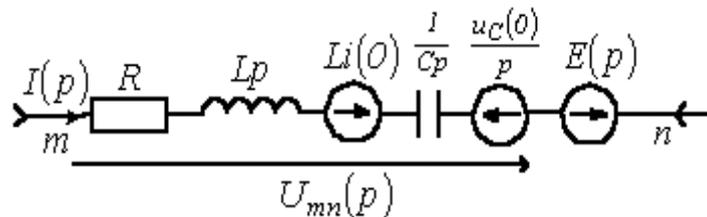


Рис.1.14

Первый закон Кирхгофа в операторной форме: алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле, равна нулю

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) \stackrel{\sim}{=} 0. \quad (1.21)$$

Второй закон Кирхгофа в операторной форме: - алгебраическая сумма изображений ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме изображений напряжений на пассивных элементах этого контура,

$$\sum_{k=1}^m E_k(p) \stackrel{\sim}{=} \sum_{k=1}^m U_k(p). \quad (1.22)$$

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа следует помнить о необходимости учета внутренних ЭДС (ненулевых начальных условий). С их учетом последнее соотношение может быть переписано в развернутом виде:

$$\sum_{k=1}^m \left(E_k \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} + L_k \dot{i}_k \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} - \frac{u_{Ck}}{p} \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \right) = \sum_{k=1}^m \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) I_k \overset{\curvearrowright}{\leftarrow}. \quad (1.23)$$

В качестве примера запишем выражение для изображений токов в цепи на рис. 1.15 для двух случаев: а) - $u_C \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} = 0$; б) - $u_C \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \neq 0$.

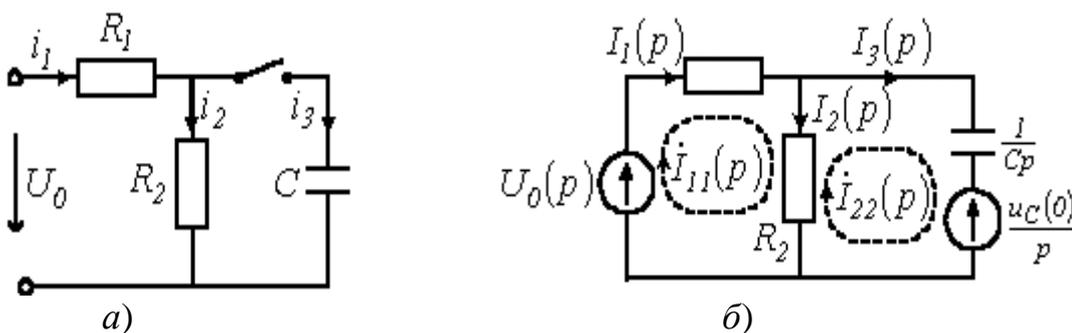


Рис.1.15

В первом случае (рис.1.15, а) при нулевых начальных условиях определим в соответствии с законом Ома в операторной форме (1.20) изображения токов $I_1(p), I_2(p), I_3(p)$:

$$I_1 \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} = \frac{U_0 \overset{\curvearrowright}{\leftarrow}}{R_1 + \frac{R_2}{R_2 Cp + 1}} = \frac{U_0 \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} (R_2 Cp + 1)}{p (R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)};$$

$$I_2 \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} = I_1 \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \frac{1}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0 \overset{\curvearrowright}{\leftarrow}}{p (R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)};$$

$$I_3 \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} = I_1 \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \frac{R_2 Cp}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0 R_2 C \overset{\curvearrowright}{\leftarrow}}{p (R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}.$$

Во втором случае при ненулевых начальных условиях $u_C \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \neq 0$ следует учесть внутреннюю ЭДС $u_C(0)/p$ и составить операторную схему замещения (рис. 1.15, б). Изображения токов в ней определяются любым методом расчета линейных цепей, например, методом контурных токов:

$$I_{11} \Phi_{R_1 + R_2} = I_{22} \Phi_{R_2} = \frac{U_0}{p};$$

$$-I_{11} \Phi_{R_2} + I_{22} \left(R_2 + \frac{1}{Cp} \right) = -\frac{u_C}{p},$$

откуда $I_1 \Phi = I_{11} \Phi - 1$; $I_2 \Phi = I_{11} \Phi - I_{22} \Phi$ и $I_3 \Phi = I_{22} \Phi$.

1.7. Переход от изображений к оригиналам. Теорема разложения

Вторым этапом расчета переходных процессов является переход от изображения искомой величины к ее оригиналу, который может быть осуществлен следующими способами:

1. Непосредственное применение формулы обратного преобразования Лапласа с использованием теоремы вычетов:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} dp,$$

которое представляет собой решение интегрального уравнения (1.14). Этот способ используется в символьных вычислениях компьютерной математики, например Mathcad.

2. По таблицам соответствия между оригиналами и изображениями.

В научной и учебной литературе имеется достаточно большое число формул соответствия, охватывающих практически все задачи электротехники. Согласно данному способу, необходимо получить изображение искомой величины в виде соответствующем табличному, после чего выписать из таблицы выражение оригинала.

Например, для изображения тока в R - L цепи (рис. 1.3) можно записать изображение тока:

$$I \Phi = \frac{U_0 \Phi}{Z \Phi} = \frac{U_0}{pR + pL} = \frac{U_0}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right).$$

Тогда, в соответствии с данными табл. 1.1,

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

что соответствует известному результату.

3. С использованием теоремы разложения.

Пусть изображение $F(p)$ искомой переменной определяется отношением двух полиномов:

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0},$$

где степень полинома в числителе меньше степени полинома в знаменателе ($m < n$) и полином $M(p) = 0$ не имеет кратных корней.

Это выражение может быть представлено в виде суммы простых дробей:

$$\frac{N(p)}{M(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k},$$

где p_k - k -й корень уравнения $M(p) = 0$.

Для определения коэффициентов A_k умножим левую и правую части соотношения на $(p - p_k)$:

$$(p - p_k) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{A_i}{p - p_i} + A_k = \frac{N(p)(p - p_k)}{M(p)}.$$

При $p \rightarrow p_k$

$$A_{k1} = N(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{M(p)}.$$

Раскрывая полученную неопределенность по правилу Лопиталья, получим

$$A_k = N(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{\frac{d}{dp} (p - p_k)}{M'(p)} = \frac{N(p_k)}{M'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}.$$

Учитывая, что множители $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}$ у слагаемых суммы правой части есть по-

стоянные числа и оригиналами простых дробей являются показательные функции (табл.1.1)

$$e^{\alpha t} \underset{\cdot}{=} \frac{1}{\cdot p - \alpha},$$

окончательно получаем формулу разложения

$$f \underset{\cdot}{=} \sum_{k=1}^n \frac{N \underset{\cdot}{\phi}_k}{M' \underset{\cdot}{\phi}_k} e^{p_k t}. \quad (1.24)$$

Если один из корней уравнения $M(p)=0$ равен нулю, то ему в правой части уравнения (1.24) соответствует слагаемое $N(0)/M'(0)$, представляющее собой составляющую искомого тока (напряжения), обусловленную источниками постоянного тока или напряжения.

Сделаем *важные замечания к формуле разложения*.

1. При наличии в цепи синусоидальной ЭДС $e \underset{\cdot}{=} E_m \sin(\omega t + \varphi)$ для перехода от комплекса к функции времени от правой части формулы разложения берется мнимая часть, т.е. выражение при j . Если при этом в цепи есть другие источники, например, постоянная ЭДС E и ЭДС экспоненциальной формы $E_0 e^{-\alpha t}$ и начальные условия для токов в ветвях с индуктивными элементами и напряжений на конденсаторах ненулевые, то они должны быть все введены в формулу предварительно умноженными на j , поскольку только в этом случае они будут учтены при взятии мнимой части от формулы разложения, т.е.

$$i \underset{\cdot}{=} \frac{E_m e^{j\varphi}}{p - j\omega} + j \left(\frac{E}{p} + \frac{E_0}{p + \alpha} + Li \underset{\cdot}{\phi} - \frac{u_C \underset{\cdot}{\phi}}{p} \right) \underset{\cdot}{=} \frac{\cdot}{Z \underset{\cdot}{\phi}}. \quad (1.25)$$

2. Принужденной составляющей от действия источника синусоидальной ЭДС в формуле разложения соответствует слагаемое, определяемое корнем $p = j\omega$. Для сложных схем такое ее вычисление может оказаться достаточно трудоемким, в связи с чем принужденную составляющую в этих случаях целесообразно определять отдельно символическим методом, а свободную – операторным.

3. Комплексно-сопряженным корням уравнения $M \underset{\cdot}{\phi} \underset{\cdot}{=} 0$ в формуле разложения соответствуют комплексно-сопряженные слагаемые, которые в сумме дают удвоенный вещественный член, т.е. для k -й пары комплексно-сопряженных корней имеет место

$$f_k \underset{\cdot}{=} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{N \underset{\cdot}{\phi}_k}{M' \underset{\cdot}{\phi}_k} e^{p_k t} \right). \quad (1.26)$$

1.8. Последовательность расчета переходных процессов операторным методом. Примеры расчета

1. Определение независимых начальных условий путем расчета докоммутационного режима работы цепи.
2. Составление операторной схемы замещения цепи.
3. Запись уравнений по законам Кирхгофа или другим методам расчета линейных цепей в операторной форме с учетом начальных условий.
4. Решение полученных уравнений относительно изображений искомых величин.
5. Определение оригиналов (с помощью формулы разложения или таблиц соответствия оригиналов и изображений) по найденным изображениям.

В качестве примера использования операторного метода определим ток через катушку индуктивности в цепи на рис. 1.16.

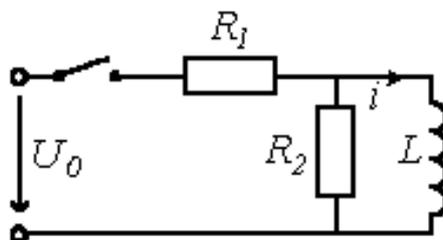


Рис.1.16

С учетом нулевого начального условия операторное изображение тока

$$I(p) = \frac{U_0}{R_1 + \frac{R_2 p L}{R_2 + p L}} \frac{R_2}{R_2 + p L} = \frac{U_0 R_2}{p(R_1 R_2 + (R_1 + R_2) p L)}$$

Для нахождения оригинала $i(t)$ воспользуемся формулой разложения при нулевом корне:

$$i(t) = \frac{N}{M} + \frac{N p_1 e^{p_1 t}}{p_1 M' p_1}, \quad (1.27)$$

где $N = U_0 R_2$, $M = p(R_1 R_2 + (R_1 + R_2) p L)$.

Тогда $\frac{N}{M} = \frac{U_0}{R_1}$ и корень уравнения $p_1 = -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L}$.

Подставляя найденные значения в формулу разложения (1.27), получим

$$i(t) = \frac{U_0}{R_1} - \frac{U_0}{R_1} e^{-\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L} t}$$

1.9. Расчет переходных процессов с использованием интеграла Дюамеля

При рассмотрении метода наложения было показано, что ток в любой ветви схемы может быть представлен в виде

$$i_k = g_{km} U_m,$$

где g_{km} - собственная $k = m$ или взаимная $k \neq m$ проводимость.

Это соотношение будет иметь силу и в переходном режиме, если в момент времени $t=0$ замыкание ключа в m -й ветви подключает к цепи находящийся в этой ветви источник постоянного напряжения U_m :

$$i_k \Leftarrow g_{km} \Leftarrow U_m$$

При этом $g_{km} \Leftarrow$ является функцией времени и называется *переходной проводимостью*.

В соответствии с определением переходная проводимость численно равна току в ветви при подключении цепи к постоянному напряжению $U_m = 1B$.

Переходная функция. Если линейную электрическую цепь с нулевыми начальными условиями подключить к источнику постоянного напряжения U , то между произвольными точками m и n цепи возникнет напряжение, являющееся функцией времени

$$u_{mn} \Leftarrow h \Leftarrow U, \quad (1.28)$$

где $h \Leftarrow$ - *переходная функция*, численно равная напряжению между точками m и n схемы при подаче на ее вход постоянного напряжения $U_m = 1B$.

Переходную проводимость $g \Leftarrow$ и переходную функцию по напряжению $h \Leftarrow$ можно найти расчетным или экспериментальным (осциллографирование) путями.

В качестве примера определим эти функции для цепи на рис. 1.17

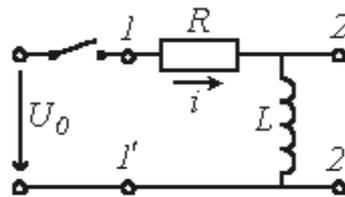


Рис.1.17

В этой схеме при замыкании ключа

$$i \Leftarrow \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau L}} \right),$$

где $\tau_L = \frac{L}{R}$.

Тогда переходная проводимость

$$g \approx \frac{i}{U_0} = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right).$$

Переходная функция по напряжению согласно (1.28)

$$h \approx \frac{u_{22}}{U_0} = \frac{L \frac{di}{dt}}{U_0} = \frac{U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}}{U_0} = e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Зная реакцию цепи на единичное возмущающее воздействие, т.е. функцию переходной проводимости g или переходную функцию h , можно найти реакцию цепи на воздействие произвольной формы. В основе метода расчета с помощью интеграла Дюамеля лежит принцип наложения.

При использовании интеграла Дюамеля для разделения переменной, по которой производится интегрирование, и переменной, определяющей момент времени, в который определяется ток в цепи, первую принято обозначать как τ , а вторую - как t .

Пусть в момент времени $t = 0$ к цепи с нулевыми начальными условиями (пассивному двухполюснику ПД на рис. 1.18) подключается источник с напряжением u произвольной формы. Для нахождения тока в цепи заменим исходную кривую ступенчатой (рис. 1.19) и просуммируем токи от начального скачка напряжения u и всех ступенек напряжения Δu до момента t .

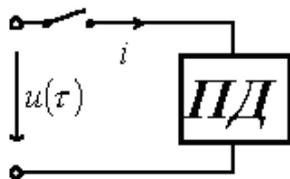


Рис.1.18

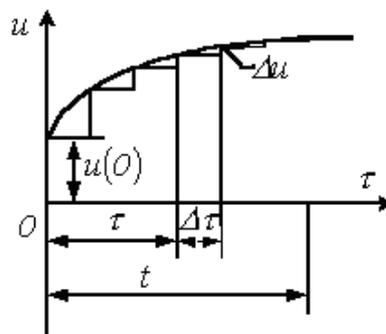


Рис.1.19

В момент времени t составляющая общего тока, определяемая начальным скачком напряжения u , равна $u g$.

В момент времени $(\tau + \Delta\tau)$ имеет место скачок напряжения $\Delta u \approx u' \Delta\tau$, который с учетом временного интервала от начала скачка до интересующего момента времени t обусловит составляющую тока $u' g(-\tau - \Delta\tau) \Delta\tau$.

Полный ток i в момент времени t равен, очевидно, сумме всех составляющих тока от отдельных скачков напряжения с учетом $u g$, т.е.

$$i(t) = u(t)g(t) + \sum u'(t)g(t-\tau - \Delta\tau)\Delta\tau$$

Заменяя конечный интервал приращения времени $\Delta\tau$ на бесконечно малый, т.е. переходя от суммы к интегралу, запишем

$$i(t) = u(t)g(t) + \int_0^t u'(t-\tau)g(\tau) d\tau \quad (1.29)$$

Соотношение (1.29) называется *интегралом Дюамеля*.

Следует отметить, что с использованием интеграла Дюамеля можно определять также напряжение. При этом в (1.29), вместо переходной проводимости $g(t)$, будет входить переходная функция по напряжению.

Методика расчета с использованием интеграла Дюамеля.

1. Определение функции $g(t)$ (или $h(t)$) для исследуемой цепи.
2. Запись выражения $g(t-\tau)$ (или $h(t-\tau)$) путем формальной замены переменной t на $t-\tau$.
3. Определение производной $u'(t)$.
4. Подстановка найденных функций в (1.29) и интегрирование определенного интеграла.

В качестве примера использования интеграла Дюамеля определим ток при включении R - L цепи (рис. 1.3) к источнику $u(t) = 1000e^{-5t}$ В и параметрах цепи $R=10$ Ом, $L=1$ Гн.

1. Определяем переходную проводимость:

$$g(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = 0,1(-e^{-10t})'$$

2. Замена переменной:

$$g(t-\tau) = 0,1(-e^{-10t}e^{10\tau})'$$

3. Определение производной:

$$u'(t) = -5000e^{-5t}$$

4. Нахождение тока:

$$\begin{aligned} i(t) = u(t)g(t) + \int_0^t u'(t-\tau)g(\tau) d\tau &= 100(-e^{-10t})' + 500 \int_0^t e^{-5\tau} d\tau + \\ + 500e^{-10t} \int_0^t e^{5\tau} d\tau &= 100(-e^{-10t})' + 100 \Big|_0^t e^{-5t} + 100e^{-10t} \Big|_0^t e^{5\tau} = 200(-e^{-5t} - e^{-10t})' \end{aligned}$$

1.10. Метод переменных состояния

Уравнения электромагнитного состояния – это система уравнений, определяющих энергетический режим (состояние) электрической цепи.

Метод переменных состояния основывается на упорядоченном составлении и решении системы дифференциальных уравнений первого порядка, которые разрешены относительно производных, т.е. записаны в виде, наиболее удобном для применения численных методов интегрирования, реализуемых средствами вычислительной техники.

Количество переменных состояния, и следовательно, число уравнений состояния равно числу независимых накопителей энергии.

К уравнениям состояния выдвигаются два основных требования:

-независимость уравнений;

-возможность восстановления на основе переменных состояния (переменных, относительно которых записаны уравнения состояния), любых других переменных.

Первое требование удовлетворяется специальной методикой составления уравнений состояния, которая будет рассмотрена далее.

Для выполнения второго требования в качестве переменных состояния следует принять потокосцепления (токи в ветвях с индуктивными элементами) и заряды (напряжения) на конденсаторах. Действительно, зная закон изменения этих переменных во времени, их всегда можно заменить источниками ЭДС и тока с известными параметрами. Остальная цепь оказывается резистивной, и следовательно, всегда рассчитывается при известных параметрах источников. Кроме того, начальные значения этих переменных относятся к независимым, т.е. в общем случае рассчитываются проще других.

При расчете методом переменных состояния, кроме самих уравнений состояния, связывающих первые производные $\frac{d\psi}{dt}$ ($\frac{di_L}{dt}$) и $\frac{dq}{dt}$ ($\frac{du_C}{dt}$) с самими переменными ψ (i_L) и q (u_C) и источниками внешних воздействий – ЭДС и тока, необходимо составить систему алгебраических уравнений, связывающих искомые величины с переменными состояния и источниками внешних воздействий.

Таким образом, полная система дифференциальных уравнений первого порядка в матричной форме записи имеет вид:

$$X' = A_1 X + B_1 V, \quad (1.30)$$

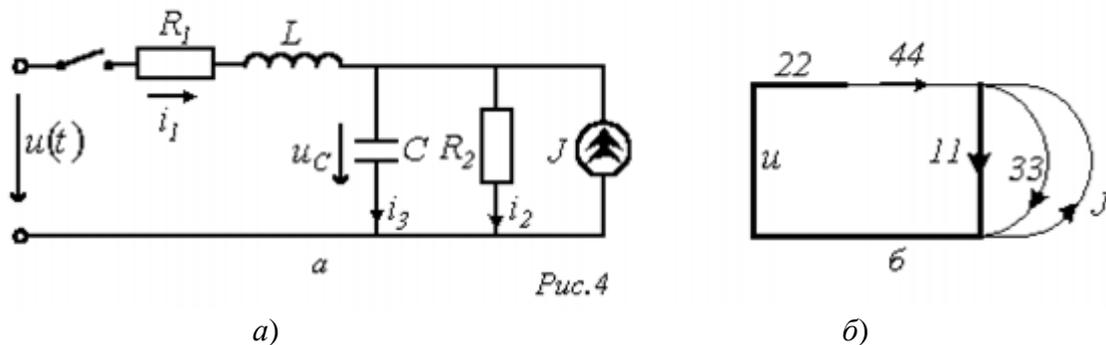
$$Y = A_2 X + B_2 V. \quad (1.31)$$

Здесь X и X' - столбцовые матрицы соответственно переменных состояния и их первых производных по времени; V - столбцовая матрица источников ЭДС и токов, называемая *вектором входных величин*; A_1 - квадратная матрица размерностью $n \times n$ (где n – число переменных состояния), определяемая топологией электрической цепи и параметрами ее элементов; B_1 - прямо-

угольная матрица связи между источниками и переменными состояниями (число строк равно n , а столбцов – числу источников m); Y - столбцовая матрица выходных (искомых) величин, называемая *вектором выходных величин*; A_2 - прямоугольная матрица связи переменных состояний с искомыми величинами (число строк равно числу искомых величин k , а столбцов – n); B_2 - прямоугольная размерностью $k \times m$ матрица связи входных и выходных величин.

Начальные условия для уравнения (1.30) задаются вектором начальных значений $X(0)$.

В качестве примера составления уравнений состояния рассмотрим цепь на рис. 1.20,а, в которой требуется определить токи i_2 и i_3 .



По законам Кирхгофа для данной цепи запишем уравнения:

$$-i_1 + i_2 + i_3 - J = 0, \quad (1.32)$$

$$R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} + u_C = u, \quad (1.33)$$

$$u_C - i_2 R_2 = 0. \quad (1.34)$$

Поскольку $i_3 = C du_C / dt$ с учетом соотношения (1.34) перепишем уравнения (1.32) и (1.33) в следующем виде:

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{CR_2} u_C + \frac{1}{C} i_1 + 0u + \frac{1}{C} J;$$

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{L} u_C + \frac{R_1}{L} i_1 + 0J + \frac{1}{L} u;$$

или в матричной форме записи согласно (1.30):

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_2} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ J \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение вида (1.31) вытекает из соотношений (1.32) и (1.34):

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ J \end{bmatrix}.$$

Вектор начальных значений $X(0) = \begin{bmatrix} u_C(0) \\ i_1(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Непосредственное использование законов Кирхгофа при составлении уравнений состояния для сложных цепей может оказаться затруднительным. В этой связи используют специальную методику упорядоченного составления уравнений состояния [Д].

Методика включает в себя следующие основные этапы:

1. Составляется граф схемы (рис. 1.20,б), к ветвям дерева которого последовательно включаются сначала ветви с источниками ЭДС, затем ветви с конденсаторами. Если дерево не связывает все узлы, то добавляются ветви с резисторами и в последнюю очередь ветви с катушками индуктивности. Дерево, составленное по этим правилам, называют *нормальным*.

В качестве связей (хорд) сначала выделены источники тока, затем индуктивные элементы, резистивные ветви и в последнюю очередь ветви связи с конденсаторами. Подграф, составленный по этим правилам, называют *нормальным подграфом связей (хорд)*.

2. Осуществляется нумерация ветвей графа (и элементов в схеме), проводимая в следующей последовательности: первыми нумеруются участки графа (схемы) с конденсаторами, затем резисторами, включенными в дерево, следующими нумеруются ветви связи с резисторами и, наконец, ветви с индуктивными элементами (рис. 1.20,б).

3. Составляется таблица, описывающая соединение элементов в цепи. В первой строке таблицы (табл. 2) перечисляются емкостные и резистивные элементы дерева, а также источники напряжения (ЭДС). В первом столбце перечисляются резистивные и индуктивные элементы ветвей связи, а также источники тока.

Таблица 1.2

	11	22	u
33	-1	0	0
44	1	1	1
J	1	0	

Процедура заполнения таблицы заключается в поочередном мысленном замыкании ветвей дерева с помощью ветвей связи до получения контура с последующим обходом последнего согласно ориентации соответствующей ветви

связи. Со знаком «+» записываются ветви графа, ориентация которых совпадает с направлением обхода контура, и со знаком «-» ветви, имеющие противоположную ориентацию. Осуществляется расписывание таблицы по столбцам и по строкам. В первом случае получаются уравнения по первому закону Кирхгофа, во втором – по второму. В рассматриваемом случае $i_{11} = -i_{33} + i_{44} + J$, откуда в соответствии с нумерацией токов в исходной цепи

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \left(i_2 + i_1 + J \right) = \frac{1}{C} \left(-\frac{u_C}{R_2} + i_1 + J \right).$$

При расписывании таблицы соединений по строкам напряжения на пассивных элементах необходимо брать со знаками противоположными табличным:

$$u_{33} = u_{11}; u_{44} = -u_{11} - u_{22} + u. \quad (1.35)$$

Из (1.35) непосредственно вытекает

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L} \left(u_C - R_1 i_1 + u \right).$$

Таким образом, формализованным способом получены уравнения, аналогичные составленным выше с использованием законов Кирхгофа.

Вопросы и задачи для самопроверки

1. Как находится общее решение линейного дифференциального уравнения в классическом методе расчета переходных процессов? Объясните понятия принужденной и свободной составляющих общего решения.
2. Сформулируйте законы коммутации с энергетических позиций.
3. В каких электрических цепях и почему возможен колебательный переходный процесс?
4. Определите величину токов i_1 , i_2 , i_3 , напряжений на конденсаторе u_C и на катушке индуктивности u_L в момент коммутации в цепи на рис. 1.2, если $R_1 = R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 20$ Ом, $U_0 = 300$ В.
5. Сформулируйте понятие характеристического уравнения и получите его в общем виде для схемы на рис. 1.2.
6. Может ли характеристическое уравнение электрической цепи иметь корни: а) $5-5j$; б) $-3j$; в) $5j, 5j$; г) $-8-8j$; д) $-2+3j, -2-3j$; е) $-4+2j, 4+2j$; ж) $-5, 5$.
7. Составить характеристическое уравнение для цепи на рис. 1.2, используя выражение входного сопротивления относительно места разрыва ветви с резистором R_3 .
8. Почему можно разрывать ветвь с конденсатором и нельзя – ветвь с индуктивным элементом?
9. Для цепи на рис. 1.21 составить характеристическое уравнение и определить, при каких значениях R_2 переходный процесс в ней будет носить

апериодический характер, если $L=1$ Гн, $R_1 = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ.

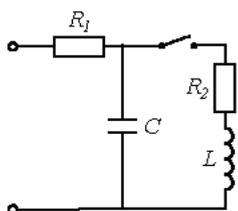


Рис.1.21

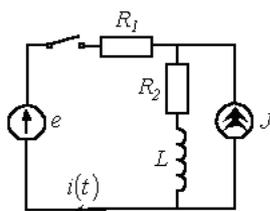


Рис.1.22

10. Определить $i(t)$ в цепи на рис. 1.22, если $R_1 = R_2 = 5$ Ом, $L = 0,01$ Гн, $e = 100\sqrt{2} \sin(1000t - 0,2618)$ В, $J = 4$ А.

Ответ: $i(t) = -2 + 10 \sin(1000t - \pi/6) - 7e^{-1000t}$ А.

11. Определить ток $i(t)$ через катушку индуктивности в цепи на рис. 1.23, если; $U_0 = 500$ В, $R_1 = R_3 = 20$ Ом; $R_2 = R_4 = 80$ Ом; $R_5 = 8$ Ом; $L = 2$ Гн.

Ответ: $i(t) = 7,5(1 - e^{-20t})$ А.

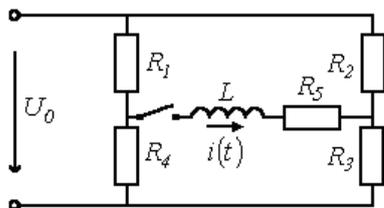


Рис.1.23

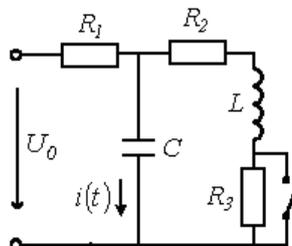


Рис.1.24

12. Определить ток $i(t)$ в ветви с конденсатором в цепи на рис. 1.24, если $U_0 = 60$ В; $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = R_3 = 40$ Ом, $L = 0,2$ Гн; $C = 1$ мкФ.

Ответ: $i(t) = 2,4(e^{-1,5 \cdot 10^3 t} - e^{-10^3 t})$ А.

13. Для схемы на рис.1.24 изобразите операторную схему замещения и поясните, как в ней учитываются ненулевые независимые начальные условия?

14. Сформулируйте законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.

15. Какими способами на практике осуществляется переход от изображения к оригиналу?

16. Какие этапы включает в себя операторный метод расчета переходных процессов?

17. Чему численно соответствуют переходная проводимость и переходная функция по напряжению?

18. Какой принцип лежит в основе метода расчета переходных процессов с использованием интеграла Дюамеля и для каких цепей может быть использован данный метод?

19. Что включает в себя система уравнений при расчете переходного процесса в цепи методом переменных состояния?

20. Перечислите основные этапы методики составления уравнений состояния.

Глава 2. Четырехполюсники и электрические фильтры

2.1. Основные определения. Формы записи уравнений пассивного четырехполюсника

Четырехполюсник – это часть схемы произвольной конфигурации, имеющая две пары зажимов, обычно называемые входными и выходными. Примерами четырехполюсника являются трансформатор, усилитель, потенциометр, линия электропередачи и другие электротехнические устройства, у которых можно выделить две пары полюсов. Четырехполюсник является передаточным звеном между источником питания, который присоединяется к входным зажимам, и нагрузкой, которая присоединяется к выходным зажимам. В общем случае четырехполюсники можно разделить на *активные*, в структуру которых входят источники энергии, и *пассивные*, ветви которых не содержат источников энергии. В данном разделе рассматриваются элементы теории пассивных четырехполюсников. Пассивный четырехполюсник будем обозначать прямоугольником с буквой П (рис.2.1), у которого имеется два входных зажима 1,1' и два выходных зажима 2,2'. Входной ток обозначим \dot{I}_1 , входное напряжение - \dot{U}_1 , ток и напряжение на выходе - \dot{I}_2 и \dot{U}_2 .

Для записи уравнений четырехполюсника выделим в произвольной схеме ветвь с единственным источником энергии и любую другую ветвь с некоторым сопротивлением \underline{Z}_2 (рис. 2.1,а).

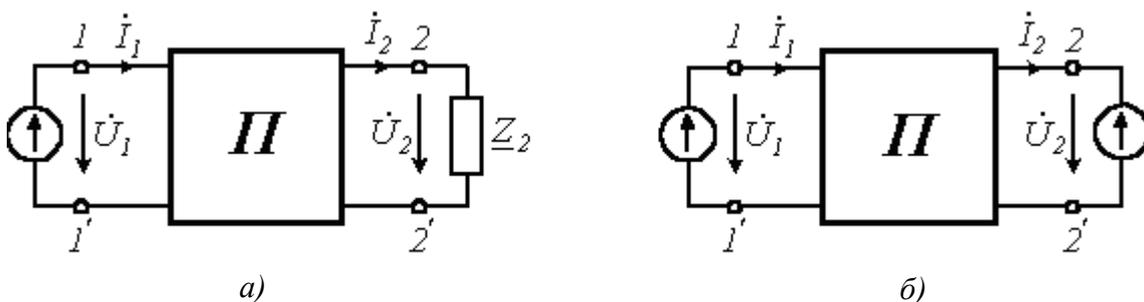


Рис.2.1

В соответствии с принципом компенсации заменим исходное сопротивление \underline{Z}_2 источником с напряжением $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_2$ (рис. 2.1,б). Тогда на основании метода наложения для цепи на рис. 2.1,б можно записать:

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 - \underline{Y}_{12} \dot{U}_2; \quad (2.1)$$

$$\dot{I}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 - \underline{Y}_{22} \dot{U}_2. \quad (2.2)$$

Решая полученные уравнения (2.1) и (2.2) относительно напряжения и тока на первичных зажимах, получим

$$\dot{U}_1 = \frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}} \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = Y_{11} \left(\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}} \dot{I}_2 \right) - Y_{12} \dot{U}_2 = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{21}} \dot{U}_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \dot{I}_2.$$

Преобразуем полученные уравнения:

$$\dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2; \quad (2.3)$$

$$\dot{I}_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2, \quad (2.4)$$

где $\underline{A} = Y_{22}/Y_{21}$; $\underline{B} = 1/Y_{21}$; $\underline{C} = (Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21})/Y_{21}$; $\underline{D} = Y_{11}/Y_{21}$ - коэффициенты четырехполюсника.

Учитывая, что в соответствии с принципом взаимности $Y_{12} = Y_{21}$, получаем соотношение связи коэффициентов четырехполюсника между собой

$$\underline{AD} - \underline{BC} = \frac{Y_{22}Y_{11}}{Y_{21}Y_{21}} - \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{21}Y_{21}} = 1. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.3) и (2.4) представляют собой основные уравнения четырехполюсника, называемые уравнениями четырехполюсника в *A*-форме (табл.1). Существует шесть форм записи уравнений пассивного четырехполюсника, который характеризуется двумя напряжениями \dot{U}_1 и \dot{U}_2 и двумя токами \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , причем любые две величины можно выразить через остальные. Так как число сочетаний из четырех по два равно шести, то и возможно шесть форм записи уравнений пассивного четырехполюсника, которые приведены в табл. 1. Положительные направления токов для различных форм записи уравнений приведены на рис. 2.2.

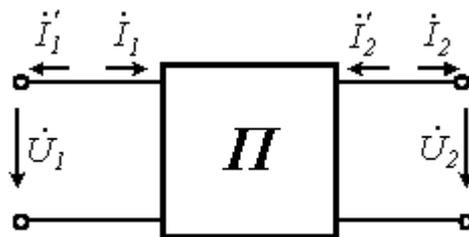


Рис.2.2

Выбор той или иной формы уравнений определяется областью и типом решаемой задачи.

Таблица 2.1

Форма	Уравнения	Связь с коэффициентами основных уравнений
A-форма	$\dot{U}_1 = \underline{A}_{11}\dot{U}_2 + \underline{A}_{12}\dot{I}_2;$ $\dot{I}_1 = \underline{A}_{21}\dot{U}_2 + \underline{A}_{22}\dot{I}_2;$	
Y-форма	$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2;$ $\dot{I}'_2 = \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2;$	$\underline{Y}_{11} = \underline{D}/\underline{B}; \quad \underline{Y}_{12} = -1/\underline{B};$ $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}; \quad \underline{Y}_{22} = \underline{A}/\underline{B};$
Z-форма	$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}'_2;$ $\dot{U}_2 = \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}'_2;$	$\underline{Z}_{11} = \underline{A}/\underline{C}; \quad \underline{Z}_{12} = 1/\underline{C};$ $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \quad \underline{Z}_{22} = \underline{D}/\underline{C};$
H-форма	$\dot{U}_1 = \underline{H}_{11}\dot{I}_1 + \underline{H}_{12}\dot{U}_2;$ $\dot{I}'_2 = \underline{H}_{21}\dot{I}_1 + \underline{H}_{22}\dot{U}_2;$	$\underline{H}_{11} = \underline{B}/\underline{D}; \quad \underline{H}_{12} = 1/\underline{D};$ $\underline{H}_{21} = -\underline{H}_{12}; \quad \underline{H}_{22} = \underline{C}/\underline{D};$
G-форма	$\dot{I}_1 = \underline{G}_{11}\dot{U}_1 + \underline{G}_{12}\dot{I}'_2;$ $\dot{U}_2 = \underline{G}_{21}\dot{U}_1 + \underline{G}_{22}\dot{I}'_2;$	$\underline{G}_{11} = \underline{C}/\underline{A}; \quad \underline{G}_{12} = -1/\underline{A};$ $\underline{G}_{21} = \underline{G}_{12}; \quad \underline{G}_{22} = \underline{B}/\underline{A};$
B-форма	$\dot{U}_2 = \underline{B}_{11}\dot{U}_1 + \underline{B}_{12}\dot{I}'_1;$ $\dot{I}'_2 = \underline{B}_{21}\dot{U}_1 + \underline{B}_{22}\dot{I}'_1.$	$\underline{B}_{11} = \underline{D}; \quad \underline{B}_{12} = \underline{B};$ $\underline{B}_{21} = \underline{C}; \quad \underline{B}_{22} = \underline{A}.$

Если при перемене местами источника и приемника энергии их токи не меняются, то такой четырехполюсник называется *симметричным*. Как видно из сравнения A- и B- форм в табл. 1, это выполняется при $\underline{A} = \underline{D}$. Четырехполюсники, не удовлетворяющие данному условию, называются *несимметричными*.

2.2. Определение коэффициентов A - формы записи уравнений четырехполюсника

При практическом использовании уравнений четырехполюсника для анализа цепей необходимо знать значения его коэффициентов. Коэффициенты четырехполюсника могут быть определены экспериментальным или расчетным путями. При этом в соответствии с соотношением (2.5) определение любых трех коэффициентов дает возможность определить и четвертый.

Один из наиболее удобных экспериментальных методов определения коэффициентов четырехполюсника основан на опытах холостого хода и короткого замыкания при питании со стороны вторичных зажимов и опыте холостого хода при питании со стороны первичных зажимов.

В этих режимах на основании уравнений (2.3) и (2.4) получаем:

$$\text{при } \dot{I}_2 = 0 \quad Z_{1XX} = \frac{\dot{U}_{1XX}}{\dot{I}_{1XX}} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}, \quad (2.6)$$

$$\text{при } \dot{I}'_1 = 0 \quad Z_{2XX} = \frac{\dot{U}_{2XX}}{\dot{I}'_{2XX}} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}, \quad (2.7)$$

$$\text{при } \dot{U}_1 = 0 \quad Z_{2K3} = \frac{\dot{U}_{2K3}}{\dot{I}'_{2K3}} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}. \quad (2.8)$$

Решение уравнений (2.6)-(2.8) относительно коэффициентов четырехполюсника

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1XX}}{\underline{Z}_{2XX} - \underline{Z}_{2K3}}}; \quad \underline{B} = \underline{A}\underline{Z}_{2K3}; \quad \underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{1XX}}; \quad \underline{D} = \underline{C}\underline{Z}_{2XX}.$$

2.3. Т - и П - образные схемы замещения пассивного четырехполюсника. Переход от одной формы записи уравнений четырехполюсника к другой

При определении коэффициентов четырехполюсника расчетным путем должны быть известны схема соединения и величины сопротивлений четырехполюсника. Как было отмечено ранее, пассивный четырехполюсник характеризуется тремя независимыми постоянными коэффициентами. Следовательно, пассивный четырехполюсник можно представить в виде трехэлементной эквивалентной Т - (рис. 2.3,а) или П - образной (рис. 2.3,б) схемы замещения.

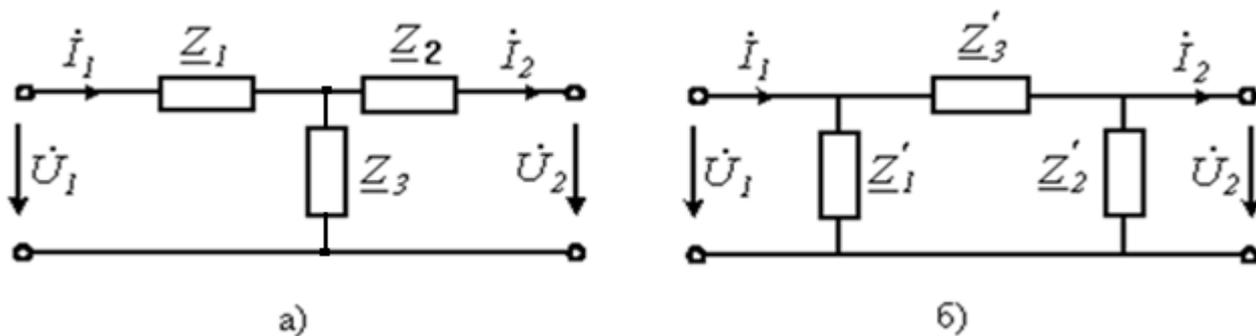


Рис.2.3

Для определения коэффициентов четырехполюсника для Т-образной схемы (рис. 2.3,а) с использованием первого и второго законов Кирхгофа выразим \dot{U}_1 и \dot{I}_1 через \dot{U}_2 и \dot{I}_2 :

$$\dot{i}_1 = \dot{i}_2 + \frac{\dot{U}_2 + \dot{i}_2 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{\underline{Z}_3} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \dot{i}_2, \quad (2.9)$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{i}_2 \underline{Z}_2 + \dot{i}_1 \underline{Z}_1 = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right) \dot{U}_2 + \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \dot{i}_2. \quad (2.10)$$

Сопоставление полученных выражений (2.9) и (2.10) с соотношениями (2.3) и (2.4) дает:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 / \underline{Z}_3; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{C} = 1 / \underline{Z}_3; \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}.$$

Данная задача может быть решена и другим путем. При $\dot{I}_2 = 0$ (холостой ход со стороны вторичных зажимов) в соответствии с (2.3) и (2.4)

$$\dot{U}_{1XX} = \underline{A} \dot{U}_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_{1XX} = \underline{C} \dot{U}_2.$$

С другой стороны из схемы 2.3,а получаем

$$\dot{I}_{1XX} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_3} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{1XX} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \dot{I}_{1XX} = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right) \dot{U}_2;$$

откуда следует: $\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 / \underline{Z}_3$ и $\underline{C} = 1 / \underline{Z}_3$.

При $\dot{U}_2 = 0$ (короткое замыкание вторичных зажимов четырехполюсника)

$$\dot{U}_{1K3} = \underline{B} \dot{I}_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_{1K3} = \underline{D} \dot{I}_2.$$

Из схемы на рис. 3,а получаем

$$\dot{I}_{1K3} = \dot{I}_2 + \frac{\dot{I}_2 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_{1K3} = \underline{Z}_1 \dot{I}_{1K3} + \dot{I}_2 \underline{Z}_2 = \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \dot{I}_2.$$

Следовательно, $\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$ и $\underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$.

Коэффициенты четырехполюсника для схемы на рис. 2.3,б могут быть определены аналогично. Из вышесказанного можно сделать вывод, что, зная коэффициенты четырехполюсника, всегда можно найти параметры Т- и П-образных схем замещения.

На практике часто возникает потребность в переходе от одной формы записи уравнений четырехполюсника к другой. Для решения этой задачи, т.е. чтобы определить коэффициенты одной формы записи уравнений через коэффициенты другой, следует выразить какие-либо две одинаковые величины в этих формулах через две остальные и сопоставить их с учетом положительных направлений токов для каждой из этих форм. Так, при переходе от A - к Z -форме на основании (2.4) имеем

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{\underline{C}} \dot{I}_1 - \frac{\underline{D}}{\underline{C}} \dot{I}_2 = \frac{1}{\underline{C}} \dot{I}_1 - \frac{\underline{D}}{\underline{C}} \dot{I}'_2. \quad (2.11)$$

Подстановка соотношения (2.11) в (2.3) дает

$$\dot{U}_1 = \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} \dot{I}_1 - \frac{\underline{AD}}{\underline{C}} \dot{I}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} \dot{I}_1 - \frac{\underline{AD} - \underline{BC}}{\underline{C}} \dot{I}_2 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} - \frac{1}{\underline{C}} \dot{I}'. \quad (2.12)$$

Сопоставляя выражения (2.11) и (2.12) с уравнениями четырехполюсника в Z -форме (табл. 1), получим

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{12} = \frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}.$$

В табл.2.1 приведены соотношения для перехода от одной формы уравнений четырехполюсника к любой другой форме.

2.4. Характеристическое сопротивление и коэффициент распространения симметричного четырехполюсника

При анализе работы четырехполюсника на нагрузку \underline{Z}_H удобно использовать понятие *входного сопротивления* с первичной стороны $\underline{Z}_{\text{вх}}$ и *коэффициента передачи* $\underline{K} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$.

Учитывая, что $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_H$ и $\dot{U}_1 = \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B} \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H}$, можно записать:

$$\underline{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B} \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H}} = \frac{\underline{Z}_H}{\underline{A}\underline{Z}_H + \underline{B}};$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B} \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H}}{\underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D} \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H}} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_H + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_H + \underline{D}}.$$

Зная \underline{K} , $\underline{Z}_{\text{вх}}$ и \dot{U}_1 , можно определить остальные переменные на входе и выходе четырехполосника: $\dot{U}_2 = \underline{K}\dot{U}_1$; $\dot{I}_2 = \dot{U}_2/\underline{Z}_{\text{н}}$; $\dot{I}_1 = \dot{U}_1/\underline{Z}_{\text{вх}}$.

На практике широко используется режим работы симметричного четырехполосника, при котором его входное сопротивление равно нагрузочному:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_{\text{н}}.$$

Это сопротивление обозначают $\underline{Z}_{\text{с}}$ и называют *характеристическим сопротивлением* симметричного четырехполосника, а режим работы четырехполосника, для которого справедливо соотношение

$$\underline{Z}_{\text{с}} = \underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{н}},$$

называется *режимом согласованной нагрузки*.

В указанном режиме для симметричного четырехполосника ($\underline{A} = \underline{D}$) на основании (2.3) и (2.4) можно записать

$$\dot{U}_1 = \left(\underline{A} + \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_{\text{с}}} \right) \dot{U}_2 ; \quad (2.13)$$

$$\dot{I}_1 = \underline{C}\underline{Z}_{\text{с}} + \underline{A}\dot{I}_2. \quad (2.14)$$

Разделив соотношение (2.13) на (2.14), получаем уравнение

$$\underline{Z}_{\text{с}} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_{\text{с}} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{\text{с}} + \underline{A}},$$

решением которого является

$$\underline{Z}_{\text{с}} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}. \quad (2.15)$$

С учетом (2.15) уравнения (2.13) и (2.14) приобретают вид

$$\dot{U}_1 = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}} \dot{U}_2 ;$$

$$\dot{I}_1 = \underline{C} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}} \dot{I}_2.$$

Таким образом, $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}} = e^{\gamma} = e^{\alpha} e^{j\beta}$,

где $\gamma = \alpha + j\beta$ - коэффициент распространения; α - коэффициент затухания, измеряемый в неперах (Нп); β - коэффициент фазы, измеряемый в радианах.

Неперы определяются на основе натуральных логарифмов, одному неперу соответствует затухание по напряжению или току в $e = 2,718$ раз. Если $\alpha = 1$ Нп, то это значит, что напряжение и ток на выходе U_2, I_2 меньше напряжения и тока на входе U_1, I_1 в 2,718 раза, а по мощности, поскольку для рассматриваемого случая $S_1/S_2 = P_1/P_2 = U_1 I_1 / U_2 I_2 = e^{2\alpha}$, - в e^2 раз.

Запишем уравнение симметричного четырехполюсника с использованием коэффициента распространения.

По определению

$$\underline{A} + \sqrt{\underline{BC}} = e^\gamma \quad (2.16)$$

Преобразуем (2.16)

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{\underline{A} + \sqrt{\underline{BC}}} = \frac{\underline{A} - \sqrt{\underline{BC}}}{\underline{A}^2 - \underline{BC}} = \underline{A} - \sqrt{\underline{BC}}. \quad (2.17)$$

Решая (2.17) и (2.18) относительно \underline{A} и $\sqrt{\underline{BC}}$, получим

$$\underline{A} = \frac{1}{2} (e^\gamma + e^{-\gamma}) = \text{ch}\gamma \quad \text{и} \quad \sqrt{\underline{BC}} = \frac{1}{2} (e^\gamma - e^{-\gamma}) = \text{sh}\gamma.$$

Учтем соотношения $\underline{B} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} \sqrt{\underline{BC}} = \underline{Z}_c \text{sh}\gamma$ и $\underline{C} = \frac{\sqrt{\underline{BC}}}{\sqrt{\underline{B}/\underline{C}}} = \frac{\text{sh}\gamma}{\underline{Z}_c}$ и получаем уравнения четырехполюсника, записанные через гиперболические функции:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \text{ch}\gamma + \dot{I}_2 \underline{Z}_c \text{sh}\gamma;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh}\gamma + \dot{I}_2 \text{ch}\gamma.$$

Форму записи уравнений четырехполюсника через гиперболические функции используют в теории фильтров.

2.5. Назначение и классификация электрических фильтров

Электрическим фильтром называется четырехполюсник, устанавливаемый между источником питания и нагрузкой и служащий для беспрепятственного (с малым затуханием) пропускания токов одних частот и задержки (или пропускания с большим затуханием) токов других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без затухания (с малым затуханием), называется **полосой пропускания** или **полосой прозрачности**; диапазон частот, пропускаемых с большим затуханием, называется **полосой затухания** или **полосой задерживания**. Качество фильтра считается тем выше, чем

ярче выражены его фильтрующие свойства, т.е. чем сильнее возрастает затухание в полосе задерживания.

В качестве пассивных фильтров обычно применяются четырехполюсники на основе катушек индуктивности и конденсаторов. Возможно также применение пассивных RC -фильтров, используемых при больших сопротивлениях нагрузки. Фильтры применяются как в радиотехнике и технике связи, где имеют место токи достаточно высоких частот, так и в силовой электронике и электротехнике.

Для упрощения анализа будем считать, что фильтры составлены из идеальных катушек индуктивности и конденсаторов, т.е. элементов соответственно с нулевым активным сопротивлением и проводимостью. Это допущение достаточно корректно при высоких частотах, когда индуктивные сопротивления катушек много больше их активных сопротивлений ($\omega L \gg R_k$), а емкостные проводимости конденсаторов много больше их активных проводимостей ($\omega C \gg g_c$).

Фильтрующие свойства четырехполюсников обусловлены возникающими в них резонансными режимами – резонансами токов и напряжений. Фильтры обычно собираются по симметричной Т- или П-образной схеме, т.е. при $Z_1 = Z_2$ или $Z'_1 = Z'_2$. В этой связи при изучении фильтров будем использовать введенные в предыдущей лекции понятия коэффициентов затухания и фазы.

Классификация фильтров в зависимости от диапазона пропускаемых частот приведена в табл.2.2.

Таблица 2.2

Классификация фильтров

Название фильтра	Диапазон пропускаемых частот
Низкочастотный фильтр (фильтр нижних частот)	$0 \leq \omega \leq \omega_{C1}$
Высокочастотный фильтр (фильтр верхних частот)	$\omega_{C2} \leq \omega \leq \infty$
Полосовой фильтр (полосно-пропускающий фильтр)	$\omega_{C1} \leq \omega \leq \omega_{C2}$
Режекторный фильтр (полосно-задерживающий фильтр)	$0 \leq \omega \leq \omega_{C1}$ и $\omega_{C2} \leq \omega \leq \infty$, где $\omega_{C1} < \omega_{C2}$

В соответствии с материалом, изложенным в предыдущей лекции, если фильтр имеет нагрузку, сопротивление которой при всех частотах равно характеристическому, то напряжения и соответственно токи на его входе и выходе связаны соотношением:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^{\gamma} = e^{\alpha + j\beta} = e^{\alpha} e^{j\beta}. \quad (2.18)$$

В идеальном случае в полосе пропускания (прозрачности), т.е. в соответствии с (1), $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$, $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2$. Следовательно, идеальный фильтр должен быть реализован на основе идеальных катушек индуктивности и конденсаторов. Вне области пропускания (в полосе затухания) в идеальном случае $\alpha = \infty$, т.е. $\dot{U}_2 = 0$ и $\dot{I}_2 = 0$.

2.6. Простейшие низкочастотные и высокочастотные фильтры

Рассмотрим схему простейшего **низкочастотного фильтра**, представленную на рис. 2.4,а.

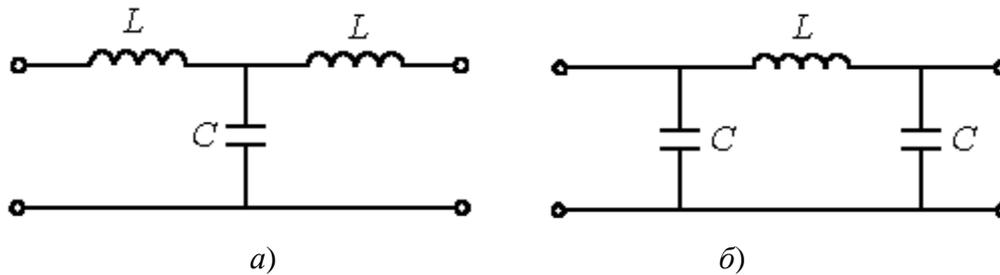


Рис. 2.4

Связь коэффициентов четырехполюсника с параметрами элементов Т-образной схемы замещения определяется соотношениями $\underline{A}=1+\underline{Z}_1/\underline{Z}_3$; $\underline{B}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_1\underline{Z}_2/\underline{Z}_3$; $\underline{C}=1/\underline{Z}_3$; $\underline{D}=1+\underline{Z}_2/\underline{Z}_3$ или конкретно для фильтра на рис. 2.4,а

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \frac{j\omega L}{1/j\omega C} = 1 - j\omega^2 LC, \quad (2.19)$$

$$\underline{B} = 2j\omega L + \frac{(j\omega L)^2}{1/j\omega C} = 2j\omega L - j\omega^3 L^2 C; \quad (2.20)$$

$$\underline{C} = \frac{1}{1/j\omega C} = j\omega C. \quad (2.21)$$

Из уравнений четырехполюсника, записанных с использованием гиперболических функций, вытекает, что:

$$\underline{A} = \operatorname{ch} \gamma = \operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + j \operatorname{sh} \alpha \sin \beta.$$

Однако в соответствии с (2.19) \underline{A} - вещественная переменная, а следовательно,

$$\underline{A} = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 1 - \omega^2 LC. \quad (2.22)$$

Поскольку в полосе пропускания частот коэффициент затухания $\alpha=0$, то на основании (2.21)

$$\cos \beta = 1 - \omega^2 LC.$$

Так как пределы изменения $\cos \beta$: $-1 \leq \cos \beta \leq 1$, то границы полосы определяются неравенством

$$-1 \leq 1 - \omega^2 LC \leq 1,$$

которому удовлетворяют частоты, лежащие в диапазоне

$$0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2}{LC}}. \quad (2.23)$$

Для характеристического сопротивления фильтра на основании (2.20) и (2.21) имеем

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{2j\omega L - j\omega^3 L^2 C}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}(2 - \omega^2 LC)}. \quad (2.24)$$

Анализ соотношения (2.24) показывает, что с ростом частоты ω в пределах, определяемых неравенством (2.23), характеристическое сопротивление фильтра уменьшается до нуля, оставаясь активным. Поскольку, при нагрузке фильтра сопротивлением, равным характеристическому, его входное сопротивление также будет равно \underline{Z}_c , то, вследствие вещественности \underline{Z}_c , можно сделать заключение, что фильтр работает в режиме резонанса, что было отмечено ранее. При частотах больших $\sqrt{2/(LC)}$, как это следует из (2.24), характеристическое сопротивление приобретает индуктивный характер.

На рис. 2.5 приведены качественные зависимости $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, и $\underline{Z}_c(\omega)$.

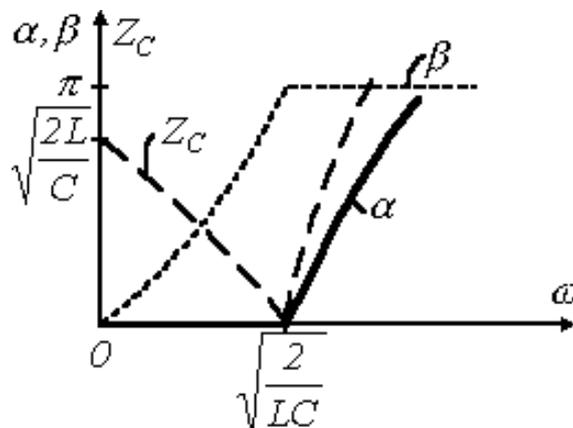


Рис. 2.5

Следует отметить, что вне полосы пропускания $\beta=\pi$. Действительно, поскольку коэффициент A – вещественный, то всегда должно удовлетворяться равенство

$$\text{sh } \alpha \sin \beta = 0. \quad (2.25)$$

Так как вне полосы прозрачности $\alpha \neq 0$, то соотношение (2.25) может выполняться только при $\sin \beta = 0$.

В полосе задерживания коэффициент затухания α определяется из уравнения (2.21) при $\beta=\pi$. Существенным при этом является факт постепенного нарастания α , т.е. в полосе затухания фильтр не является идеальным. Аналогичный

вывод о неидеальности реального фильтра можно сделать и для полосы прозрачности, поскольку обеспечить практически согласованный режим работы фильтра во всей полосе прозрачности невозможно, а следовательно, в полосе пропускания коэффициент затухания α будет отличен от нуля.

Другим вариантом простейшего низкочастотного фильтра может служить четырехполосник по схеме на рис. 2.4,б.

Схема простейшего **высокочастотного фильтра** приведена на рис. 2.6,а.

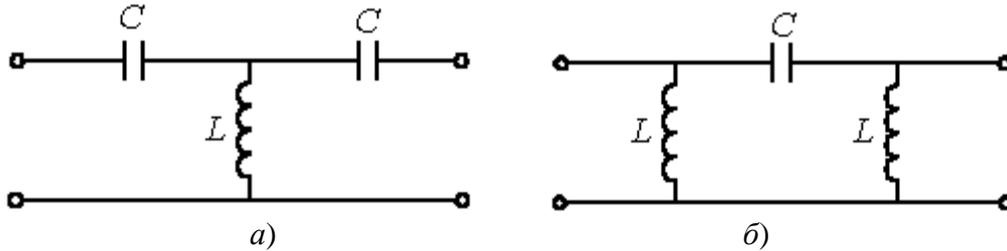


Рис.2.6

Для данного фильтра коэффициенты четырехполосника определяются выражениями:

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \frac{1/j\omega C}{j\omega L} = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC}; \quad (2.26)$$

$$\underline{B} = \frac{2}{j\omega C} + \frac{(1/j\omega C)^2}{j\omega L} = \frac{1}{j\omega C} \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right); \quad (2.27)$$

$$\underline{C} = \frac{1}{j\omega L}. \quad (2.28)$$

Как и для рассмотренного выше случая, A – вещественная переменная. Поэтому на основании (2.26)

$$-1 \leq 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \leq 1.$$

Данному неравенству удовлетворяет диапазон изменения частот:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \leq \omega \leq \infty. \quad (2.29)$$

Характеристическое сопротивление фильтра

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{j\omega C} \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)}{\frac{1}{j\omega L}}} = \sqrt{\frac{L}{C} \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)} \quad (2.30)$$

изменяясь в пределах от нуля до $\sqrt{2L/C}$ с ростом частоты, остается вещественным. Это соответствует, как уже отмечалось, работе фильтра, нагруженного ха-

рактическим сопротивлением в резонансном режиме. Поскольку такое согласование фильтра с нагрузкой во всей полосе пропускания практически невозможно, реально фильтр работает с $\alpha=0$ в ограниченном диапазоне частот. Вне области пропускания частот α определяется из уравнения

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \quad (2.31)$$

при $\beta = -\pi$. Плавное изменение коэффициента затухания в соответствии с (2.30) показывает, что в полосе задерживания фильтр не является идеальным.

Качественный вид зависимостей $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ и $Z_c(\omega)$ для высокочастотного фильтра представлен на рис. 2.6.

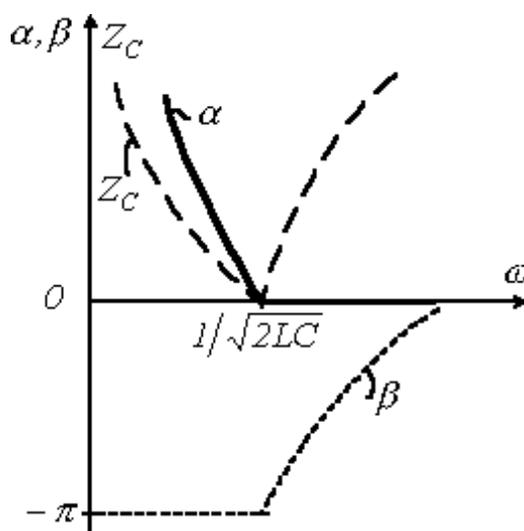


Рис. 2.6

Следует отметить, что другим примером простейшего высокочастотного фильтра может служить П-образный четырехполюсник на рис. 2.5,б.

2.7. Полосно-пропускающие и полосно-заграждающие фильтры

Полосовой фильтр формально получается путем последовательного соединения низкочастотного фильтра с полосой пропускания $\omega \leq \omega_{C2}$ и высокочастотного фильтра с полосой пропускания $\omega \geq \omega_{C2}$, причем $\omega_{C1} \leq \omega_{C2}$. Схема простейшего полосового фильтра приведена на рис. 2.7,а, а на рис. 2.7,б представлены качественные зависимости для него.

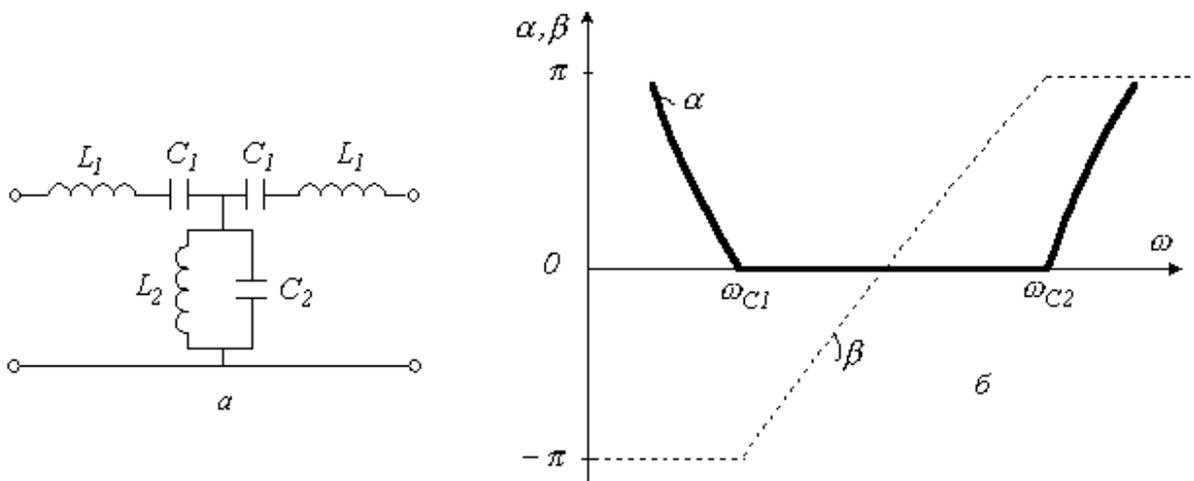


Рис.2.7

У **режекторного фильтра** полоса прозрачности разделена на две части полосой затухания. Схема простейшего режекторного фильтра и качественные зависимости $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ для него приведены на рис.2.8.

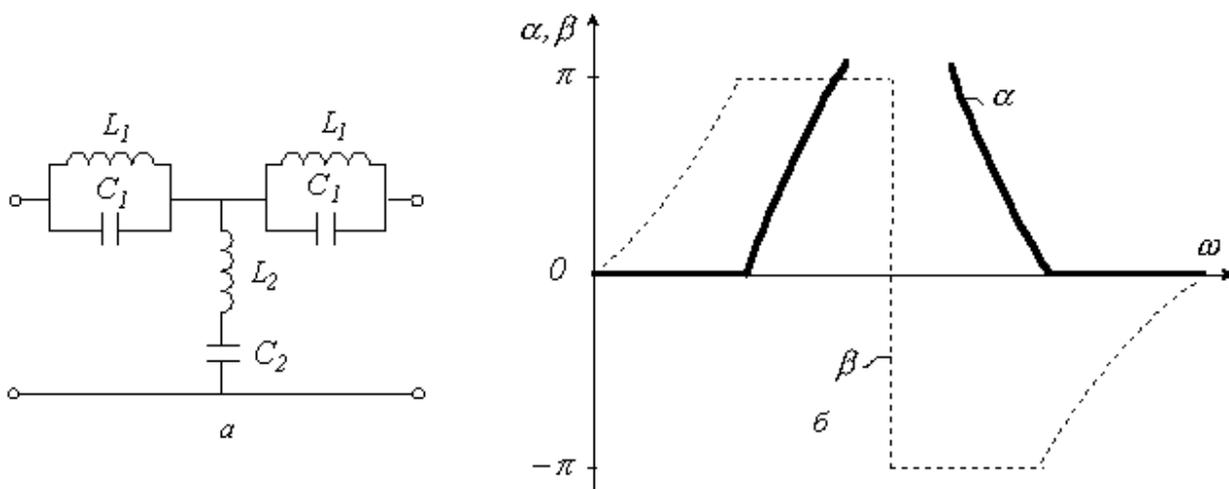


Рис. 2.8

В заключение необходимо отметить, что для улучшения характеристик фильтров всех типов их целесообразно выполнять в виде цепной схемы, представляющей собой каскадно включенные четырехполюсники. При обеспечении согласованного режима работы всех n звеньев схемы коэффициент затухания $\alpha_{ц}$ такого фильтра возрастает в соответствии с выражением $\alpha_{ц} = n\alpha$, что приближает фильтр к идеальному.

Вопросы и задачи для самопроверки

1. Приведите уравнения четырехполюсника в A -форме. Сколько коэффициентов четырехполюсника являются независимыми?
2. Как определить коэффициенты A -формы четырехполюсника?
3. Приведите схемы замещения четырехполюсника.
4. Как определяются коэффициенты одной формы записи уравнений четырехполюсника через коэффициенты другой? Определить связь коэффициентов Y -, H - и G -форм с коэффициентами A -формы.
5. Дайте определение режима согласованной нагрузки симметричного четырехполюсника. Что определяет коэффициент распространения?
6. Определить коэффициенты A , B , C и D для Π -образной схемы замещения четырехполюсника на рис. 2.3,б.

Ответ: $\underline{A} = 1 + \underline{Z}'_3 / \underline{Z}'_2$; $\underline{B} = \underline{Z}'_3$; $\underline{C} = (\underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_3) / (\underline{Z}'_1 \underline{Z}'_2)$;
 $\underline{D} = 1 + \underline{Z}'_3 / \underline{Z}'_1$.

7. Коэффициенты уравнений пассивного четырехполюсника: $\underline{A} = 1 - j$;
 $\underline{B} = -j10$ Ом; $\underline{C} = -j0,1$ См. Определить параметры T -образной схемы замещения.
8. Параметры T -образной схемы замещения четырехполюсника: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 10$ Ом; $\underline{Z}_3 = j10$ Ом. Определить, при каком сопротивлении нагрузки входное сопротивление четырехполюсника будет равно нагрузочному сопротивлению.

Ответ: $\underline{Z}_H = 14,95 e^{j31,72^\circ}$ Ом.

9. Для чего служат фильтры? Что такое полосы прозрачности и затухания?
10. Как классифицируются фильтры в зависимости от диапазона пропускаемых частот?
11. В каком режиме работают фильтры в полосе пропускания частот?
12. Как можно улучшить характеристики фильтра?
13. Определить границы полосы прозрачности фильтров на рис. 2.4,а и 2.6,а, если $L = 10$ мГн, а $C = 10$ мкФ.

Ответ: $\omega_{C1} = 4472$ рад/с, $\omega_{C2} = 2236$ рад/с.

Глава 3. Цепи с распределенными параметрами

В предыдущих лекциях рассматривались электрические цепи, геометрические размеры которых, а также входящих в них элементов не играли роли, т.е. электрические и магнитные поля были локализованы соответственно в пределах конденсатора и катушки индуктивности, а потери мощности – в резисторе. Однако на практике часто приходится иметь дело с цепями (линии электропередачи, передачи информации, обмотки электрических машин и аппаратов и т.д.), где электромагнитное поле и потери равномерно или неравномерно распределены вдоль всей цепи. В результате напряжения и токи на различных участках даже неразветвленной цепи отличаются друг от друга, т.е. являются функциями двух независимых переменных: времени t и пространственной координаты x . Такие цепи называются цепями с распределенными параметрами. Смысл данного названия заключается в том, что у цепей данного класса каждый бесконечно малый элемент их длины характеризуется сопротивлением, индуктивностью, а между проводами – соответственно емкостью и проводимостью.

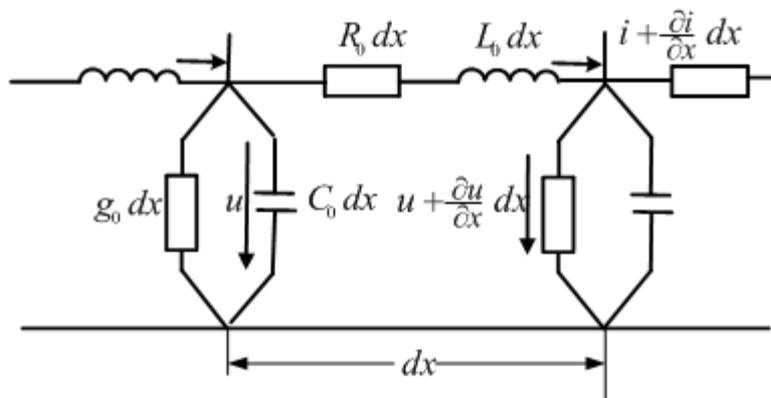


Рис. 3.1

Для оценки, к какому типу отнести цепь: с сосредоточенными или распределенными параметрами, следует сравнить ее длину l с длиной электромагнитной волны $\lambda = VT$. Если $l > 0,05...0,1\lambda$, то линию следует рассматривать как цепь с распределенными параметрами. Например, для $f=50\text{Гц}$ и $V = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, $l > 300...600 \text{ км}$. Для $f = 10^8 \text{ Гц}$ и $\lambda = 3 \text{ м}$, т.е. уже при $l > 0,15...0,3 \text{ м}$, к линии следует подходить как к цепи с распределенными параметрами.

Для исследования процессов в цепи с распределенными параметрами (другое название – **длинная линия**) введем дополнительное условие о равномерности распределения вдоль линии ее параметров: индуктивности, сопротивления, емкости и проводимости. Такую линию называют **однородной**. Линию с неравномерным распределением параметров часто можно разбить на однородные участки.

3.1. Уравнения однородной линии в стационарном режиме

Под первичными параметрами линии будем понимать сопротивление R_0 , индуктивность L_0 , проводимость g_0 и емкость C_0 , отнесенные к единице ее длины. Для получения уравнений однородной линии разобьем ее на отдельные участки бесконечно малой длины dx со структурой, показанной на рис. 3.1.

Пусть напряжение и ток в начале такого элементарного четырехполюсника равны u и i , а в конце соответственно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$.

Разность напряжений в начале и конце участка определяется падением напряжения на резистивном и индуктивном элементах, а изменение тока на участке равно сумме токов утечки и смещения через проводимость и емкость. Таким образом, по законам Кирхгофа:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} dx = R_0 dx + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx = R_0 dx + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

или после сокращения на dx

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (3.1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = R_0 + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Теорию цепей с распределенными параметрами в установившихся режимах будем рассматривать для случая синусоидального тока. Тогда полученные соотношения при $f = 0$ можно распространить и на цепи постоянного тока, а воспользовавшись разложением в ряд Фурье, – на линии периодического несинусоидального тока. Вводя комплексные величины и заменяя $\frac{\partial}{\partial t}$ на $j\omega$, на основании (3.1) и (3.2) получаем

$$-\frac{\partial \dot{U}}{\partial x} = (R_0 + j\omega L_0) \dot{I} = \underline{Z}_0 \dot{I}; \quad (3.3)$$

$$-\frac{\partial \dot{I}}{\partial x} = (g_0 + j\omega C_0) \dot{U} = \underline{Y}_0 \dot{U}; \quad (3.4)$$

где $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$ и $\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0$ – соответственно комплексные сопротивление и проводимость на единицу длины линии.

Продифференцировав (3.3) по x и подставив выражение $\frac{\partial I}{\partial x}$ из (3.4), запишем

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{U}.$$

Характеристическое уравнение

$$p^2 - \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 = 0,$$

откуда

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \pm \gamma = \pm(\alpha + j\beta).$$

Таким образом,

$$\dot{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\beta x} = \underline{A}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

, (3.5) где $\gamma = \alpha + j\beta$ - постоянная распространения; α - коэффициент затухания; β - коэффициент фазы.

(3.5) где $\gamma = \alpha + j\beta$ - постоянная распространения; α - коэффициент затухания; β - коэффициент фазы.

где $\gamma = \alpha + j\beta$ - постоянная распространения; α - коэффициент затухания; β - коэффициент фазы.

Для тока согласно уравнению (3.3) можно записать:

$$\dot{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x})$$

, (3.6) где $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}$ - волновое сопротивление.

(3.6) где $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}$ - волновое сопротивление.

где $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}$ - волновое сопротивление.

Волновое сопротивление \underline{Z}_0 и постоянную распространения γ называют **вторичными параметрами** линии, которые характеризуют ее свойства как устройства для передачи энергии или информации.

Определяя $\underline{A}_1 = A_1 e^{-j\varphi_1}$ и $\underline{A}_2 = A_2 e^{-j\varphi_2}$, на основании (3.5) запишем

$$u(x, t) = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\alpha t - \beta x + \varphi_1) + \sqrt{2} A_2 e^{-\alpha x} \sin(\alpha t - \beta x + \varphi_2)$$

(3.7) Аналогичное уравнение гласно (3.6) можно записать для тока. Слагаемые в правой части соотношения (3.7) можно трактовать как бегущие волны: первая движется и затухает в направлении возрастания x , вторая – убывания. Действительно, в данный момент времени каждое из слагаемых представляет собой затухающую (вследствие потерь энергии) гармоническую функцию координаты x , а в фиксированной точке – синусоидальную функцию времени.

(3.7) Аналогичное уравнение гласно (3.6) можно записать для тока. Слагаемые в правой части соотношения (3.7) можно трактовать как бегущие волны: первая движется и затухает в направлении возрастания x , вторая – убывания. Действительно, в данный момент времени каждое из слагаемых представляет собой затухающую (вследствие потерь энергии) гармоническую функцию координаты x , а в фиксированной точке – синусоидальную функцию времени.

Аналогичное уравнение согласно (3.6) можно записать для тока. Слагаемые в правой части соотношения (3.7) можно трактовать как бегущие волны: первая движется и затухает в направлении возрастания x , вторая – убывания. Действительно, в фиксированный момент времени каждое из слагаемых представляет собой затухающую (вследствие потерь энергии) гармоническую функцию координаты x , а в фиксированной точке – синусоидальную функцию времени.

Волну, движущую от начала линии в сторону возрастания x , называют **прямой**, а движущуюся от конца линии в направлении убывания x , – **обратной**.

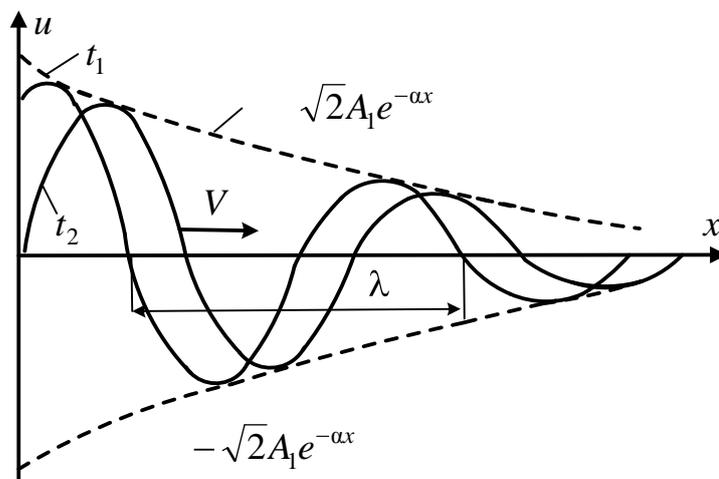


Рис. 3.2

На рис. 3.2 представлена затухающая синусоида прямой волны для моментов времени t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$). Перемещение волны характеризуется **фазовой скоростью**. Это скорость перемещения по линии неизменного фазового состояния, т.е. скорость, с которой нужно перемещаться вдоль линии, чтобы наблюдать одну и ту же фазу волны:

$\alpha x - \beta x + \varphi_1 = \text{const.}$ (3.8) Продифференцировав (3.8) по времени, получим

(3.8) Продифференцировав (3.8) по времени, получим

Продифференцировав (3.8) по времени, получим

$V = \frac{\omega}{\beta}$. (3.9) Длиной волны λ называется расстояние между двумя ее ближайшими точками, различающимися по фазе на 2π рад. В соответствии с данным определением

(3.9) Длиной волны λ называется расстояние между двумя ее ближайшими точками, различающимися по фазе

на 2π рад. В соответствии с данным разделением

Длиной волны λ называется расстояние между двумя ее ближайшими точками, различающимися по фазе на 2π рад. В соответствии с данным делением

Длиной волны λ называется расстояние между двумя ее ближайшими точками, различающимися по фазе на 2π рад. В соответствии с данным делением

Длиной волны λ называется расстояние между двумя ее ближайшими точками, различающимися по фазе на 2π рад. В соответствии с данным определением

$$\alpha\pi - \beta(x + \lambda) + \varphi_1 = \alpha\pi - \beta x - 2\pi + \varphi_1,$$

откуда

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

и с учетом (3.9)

$$\lambda = VT = \frac{V}{f}.$$

В соответствии с введенными понятиями прямой и обратной волн распределение напряжения вдоль линии в любой момент времени можно трактовать как результат наложения двух волн: прямой и обратной, перемещающихся вдоль линии с одинаковой фазовой скоростью, но в противоположных направлениях:

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{пр}} + \dot{U}_{\text{обр}}, \quad (3.10) \quad \text{где в соот-}$$

ветствии с (3.5) $\dot{U}_{\text{пр}} = A_1 e^{-\gamma x}$ и

$$\dot{U}_{\text{обр}} = A_2 e^{\gamma x}.$$

(3.10) где в соответствии с (3.5)

$$\dot{U}_{\text{пр}} = A_1 e^{-\gamma x} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{\text{обр}} = A_2 e^{\gamma x}.$$

где в соответствии с (3.5) $\dot{U}_{\text{пр}} = A_1 e^{-\gamma x}$ и $\dot{U}_{\text{обр}} = A_2 e^{\gamma x}$.

Представление напряжения в виде суммы прямой и обратной волн согласно (3.10) означает, что положительные направления напряжения для обеих волн выбраны одинаково: от верхнего провода к нижнему.

Аналогично для тока на основании (3.6) можно записать

$$\dot{I} = \dot{I}_{\text{пр}} - \dot{I}_{\text{обр}}, \quad (3.11) \quad \text{где}$$

$$\dot{I}_{\text{пр}} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} / \underline{Z}_c \quad \text{и} \quad \dot{I}_{\text{обр}} = \underline{A}_2 e^{\gamma x} / \underline{Z}_c.$$

$$(3.11) \quad \text{где} \quad \dot{I}_{\text{пр}} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} / \underline{Z}_c \quad \text{и}$$

$$\dot{I}_{\text{обр}} = \underline{A}_2 e^{\gamma x} / \underline{Z}_c.$$

где $\dot{I}_{\text{пр}} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} / \underline{Z}_c$ и $\dot{I}_{\text{обр}} = \underline{A}_2 e^{\gamma x} / \underline{Z}_c$.

Положительные направления прямой и обратной волн тока в соответствии с (11) различны: положительное направление прямой волны совпадает с положительным направлением тока \bar{I} (от начала к концу линии), а положительное направление обратной волны ему противоположно.

На основании (3.10) и (3.11) для прямых и обратных волн напряжения и тока выполняется закон Ома:

$$\dot{I}_{\text{пр}} = \frac{\dot{U}_{\text{пр}}}{\underline{Z}_c}; \quad \dot{I}_{\text{обр}} = \frac{\dot{U}_{\text{обр}}}{\underline{Z}_c}$$

3.2. Бесконечно длинная однородная линия. Согласованный режим работы

В случае бесконечно длинной линии в выражениях (3.5) и (3.6) для напряжения и тока слагаемые, содержащие $e^{\gamma x}$, должны отсутствовать, так как стремление $x \rightarrow \infty$ лишает эти составляющие физического смысла.

Следовательно, в рассматриваемом случае $\underline{A}_2 = 0$. Таким образом, в решении уравнений линии бесконечной длины отсутствуют обратные волны тока и напряжения. В соответствии с вышесказанным

$$\dot{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x}, \quad \dot{I} = \frac{\underline{A}_1 e^{-\gamma x}}{\underline{Z}_c}.$$

(3.12) На основании соотношений (3.12) можно сделать важный вывод, что для бесконечно длинной линии в

любой ее точке, в том числе и на входе, отношение комплексных напряжений и тока есть постоянная величина, равная волновому сопротивлению:

На основании соотношений (3.12) можно сделать важный вывод, что для бесконечно длинной линии в любой ее точке, в том числе и на входе, отношение комплексных напряжений и тока есть постоянная величина, равная волновому сопротивлению:

На основании соотношений (3.12) можно сделать важный вывод, что для бесконечно длинной линии в любой ее точке, в том числе и на входе, отношение комплексных напряжений и тока есть постоянная величина, равная волновому сопротивлению:

На основании соотношений (3.12) можно сделать важный вывод, что для бесконечно длинной линии в любой ее точке, в том числе и на входе, отношение комплексных напряжений и тока есть постоянная величина, равная волновому сопротивлению:

$$\underline{Z}_c = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \underline{Z}_{вх}.$$

Таким образом, если такую линию мысленно расцезать в любом месте и вместо откинутой бесконечно длинной части подключить сопротивление, численно равное волновому, то режим работы оставшегося участка конечной длины не изменится. Отсюда можно сделать два вывода:

- уравнения бесконечно длинной линии распространяются на линию конечной длины, нагруженную на сопротивление, равное волновому. В этом случае также имеют место только прямые волны напряжения и тока;

- у линии, нагруженной на волновое сопротивление, входное сопротивление также равно волновому.

Режим работы длинной линии, нагруженной на сопротивление, равное волновому, называется **согласованным**, а сама линия называется линией с **согласованной нагрузкой**.

Отметим, что данный режим практически важен для передачи информации, поскольку характеризуется отсутствием отраженных (обратных) волн, обуславливающих помехи.

Согласованная нагрузка полностью поглощает мощность волны, достигшей конца линии. Эта мощность называется натуральной. Поскольку в любом

сечении согласованной линии сопротивление равно волновому, угол сдвига φ между напряжением и током неизменен. Таким образом, если мощность, получаемая линией от генератора, равна $P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi$, то мощность в конце линии длиной l в данном случае

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi = U_1 e^{-\alpha l} I_1 e^{-\alpha l} \cos \varphi = P_1 e^{-2\alpha l},$$

откуда КПД линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}$$

и затухание

$$\alpha l = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}.$$

Как указывалось при рассмотрении четырехполюсников, единицей затухания является непер, соответствующий затуханию по мощности в e^2 раз, а по напряжению или току – в e раз.

3.3. Линия без искажений Пусть сигнал, который требуется передать без искажений по линии, является чистым, т.е. его можно разложить в ряд Фурье. Сигнал будет искажаться, если для составляющих его гармонических затухание и фазовая скорость различны, т.е. если последние являются ми частоты. Таким образом, для отсутствия искажений, что очень важно, например, в линиях передачи информации, необходимо, чтобы все гармоники распространялись с одинаковой скоростью и одинаковым затуханием, поскольку только в этом случае, шире, они образуют в конце линии сигнал, подобный входному.

Пусть сигнал, который требуется передать без искажений по линии, является периодическим, т.е. его можно разложить в ряд Фурье. Сигнал будет искажаться, если для составляющих его гармонических затухание и фазовая скорость различны, т.е. если последние являются функциями частоты. Таким образом, для отсутствия искажений, что очень важно, например, в линиях передачи информации, необходимо, чтобы все гармоники распространялись с одинаковой скоростью и одинаковым затуханием, поскольку только в этом случае,

сложившись, они образуют в конце линии сигнал, подобный входному.

Идеальным в этом случае является так называемая **линия без потерь**, у которой сопротивление R_0 и проводимость g_0 равны нулю.

Действительно, в этом случае

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = j\beta,$$

т.е. независимо от частоты коэффициент затухания $\alpha = 0 = \text{const}$ и фазовая скорость

$$V = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \text{const}.$$

Однако искажения могут отсутствовать и в линии с потерями. Условие передачи сигналов без искажения вытекает из совместного рассмотрения выражений для постоянной распространения:

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \underline{Z}_c \underline{Y}_0 = \underline{Z}_c g_0 + j\omega \underline{Z}_c C_0 = \alpha + j\beta \quad (3.13)$$

и фазовой скорости:

$$V = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{C_0 \underline{Z}_c}. \quad (3.14)$$

Из (3.13) и (3.14) вытекает, что для получения $\alpha = \text{const}$ и $V = \text{const}$, что обеспечивает отсутствие искажений, необходимо, чтобы $\underline{Z}_c = \text{const}$, т.е. чтобы волновое сопротивление не зависело от частоты.

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{R_0/L_0 + j\omega}{g_0/C_0 + j\omega}}. \quad (3.15)$$

Как показывает анализ (3), при

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0} \quad (3.16)$$

$Z_c = \sqrt{L_0/C_0}$ есть вещественная константа.

Линия, параметры которой удовлетворяют условию (3.16), называется линией без искажений. Фазовая скорость для такой линии

$$V = \frac{1}{C_0 Z_c} = \frac{1}{C_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

и затухание

$$V = g_0 Z_c = \sqrt{R_0 g_0} = \frac{R_0}{Z_c}.$$

Следует отметить, что у реальных линий (и воздушных, и кабельных) $V = R_0/L_0 \gg g_0/C_0$. Поэтому для придания реальным линиям свойств линий без искажения искусственно увеличивают их индуктивность путем включения через одинаковые интервалы специальных катушек индуктивности, а в случае кабельных линий – также за счет обвивания их жил ферромагнитной лентой.

3.4. Уравнения линии конечной длины

Постоянные \underline{A}_1 и \underline{A}_2 в полученных в предыдущей лекции формулах

$$\dot{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}; \quad (3.17)$$

$$\dot{I} = \frac{1}{\underline{Z}_c} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}) \quad (3.18)$$

определяются на основании граничных условий.

Пусть для линии длиной l (см. рис. 3.1) заданы напряжение \dot{U} и ток \dot{I} в начале линии, т.е. при $x = 0$. Тогда из (3.17) и (3.18) получаем

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \\ \bar{I}_1 \underline{Z}_c &= \underline{A}_1 - \underline{A}_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \frac{1}{2} (\bar{U}_1 + \bar{I}_1 \underline{Z}_c); \\ \underline{A}_2 &= \frac{1}{2} (\bar{U}_1 - \bar{I}_1 \underline{Z}_c). \end{aligned}$$

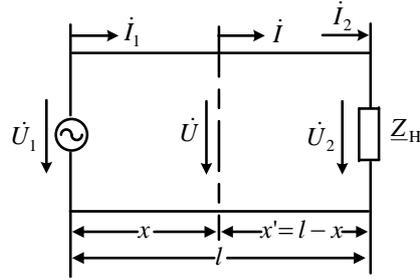


Рис. 3.3

Подставив найденные выражения \underline{A}_1 и \underline{A}_2 в (3.5) и (3.6), получим

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_c) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_c) e^{\gamma x} = \dot{U}_1 \frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) - \\ &- \dot{I}_1 \underline{Z}_c \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \gamma x, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{1}{2\underline{Z}_c}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_c) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2\underline{Z}_c}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_c) e^{\gamma x} = -\frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) + \\ &+ \dot{I}_1 \frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = -\frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \gamma x + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Уравнения (3.19) и (3.20) позволяют определить ток и напряжение в любой точке линии по их известным значениям в начале линии. Обычно в практических задачах бывают заданы напряжение \dot{U}_2 и ток \dot{I}_2 в конце линии. Для выражения напряжения и тока в линии через эти величины перепишем уравнения (5) и (6) в виде

$$\dot{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma(l-x')} + \underline{A}_2 e^{\gamma(l-x')}; \quad (3.21)$$

$$\dot{I} = \frac{1}{\underline{Z}_c} (\underline{A}_1 e^{-\gamma(l-x')} - \underline{A}_2 e^{\gamma(l-x')}). \quad (3.22)$$

Обозначив $\underline{B}_1 = \underline{A}_1 e^{-\gamma l}$ и $\underline{B}_2 = \underline{A}_2 e^{\gamma l}$ из уравнений (3.21) и (3.22) при $x'=0$, получим

$$\dot{U}_2 = \underline{B}_1 + \underline{B}_2,$$

$$\dot{I}_2 \underline{Z}_c = \underline{B}_1 - \underline{B}_2,$$

откуда

$$\underline{B}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + I_2 \underline{Z}_c),$$

$$\underline{B}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - I_2 \underline{Z}_c).$$

После подстановки найденных выражений \underline{B}_1 и \underline{B}_2 в (3.21) и (3.22) получаем уравнения, позволяющие определить ток и напряжение по их значениям в конце линии:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch}\gamma(l-x) + I_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh}\gamma(l-x); \quad (3.23)$$

$$I = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh}\gamma(l-x) + I_2 \operatorname{ch}\gamma(l-x). \quad (3.24)$$

3.5. Уравнения длинной линии как четырехполюсника

В соответствии с (3.23) и (3.24) напряжения и токи в начале и в конце линии связаны между собой соотношениями

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l + I_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh}\gamma l;$$

$$I_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh}\gamma l + I_2 \operatorname{ch}\gamma l.$$

Эти уравнения соответствуют уравнениям симметричного четырехполюсника, коэффициенты которого $\underline{A} = \underline{D} = \operatorname{ch}\gamma l$; $\underline{B} = \underline{Z}_c \operatorname{sh}\gamma l$ и $\underline{C} = \operatorname{sh}\gamma l / \underline{Z}_c$; при этом условие $\underline{A} - \underline{D} = \operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1$ выполняется.

Указанное означает, что к длинным линиям могут быть применены элементы теории четырехполюсников, и, следовательно, как всякий симметричный четырехполюсник, длинная линия может быть представлена симметричной Т- или П-образной схемами замещения.

3.6. Определение параметров длинной линии из опытов холостого хода и короткого замыкания

Как и у четырехполюсников, параметры длинной линии могут быть определены из опытов холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ).

При ХХ $\underline{U}_{l_{\text{ХХ}}} = \underline{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l$ и $I_{l_{\text{ХХ}}} = \underline{U}_2 \operatorname{sh}\gamma l / \underline{Z}_c$, откуда входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{BX XX}} = \frac{\dot{U}_{l \text{ XX}}}{\dot{I}_{l \text{ XX}}} \underline{Z}_{\text{C}} \text{cth} \gamma l. \quad (3.25)$$

При КЗ $\dot{U}_{l \text{ КЗ}} = \dot{I}_2 \underline{Z}_{\text{C}} \text{sh} \gamma l$ и $\dot{I}_{l \text{ КЗ}} = \dot{I}_2 \text{ch} \gamma l$. Следовательно,

$$\underline{Z}_{\text{BX КЗ}} = \frac{\dot{U}_{l \text{ КЗ}}}{\dot{I}_{l \text{ КЗ}}} \underline{Z}_{\text{C}} \text{th} \gamma l. \quad (3.26)$$

На основании (3.25) и (3.26)

$$\underline{Z}_{\text{C}} = \sqrt{\underline{Z}_{\text{BX XX}} \cdot \underline{Z}_{\text{BX КЗ}}} \quad (3.27)$$

и

$$\text{th}^2 \gamma l = \frac{\underline{Z}_{\text{BX КЗ}}}{\underline{Z}_{\text{BX XX}}},$$

откуда

$$\gamma l = \text{Arcth} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{BX КЗ}}}{\underline{Z}_{\text{BX XX}}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{BX КЗ}}}{\underline{Z}_{\text{BX XX}}}}}{1 - \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{BX КЗ}}}{\underline{Z}_{\text{BX XX}}}}}. \quad (3.28)$$

Выражения (3.27) и (3.28) на основании данных эксперимента позволяют определить вторичные параметры \underline{Z}_{C} и γ линии, по которым затем могут быть рассчитаны ее первичные параметры R_0, L_0, g_0 и C_0 .

3.7. Линия без потерь

Линией без потерь называется линия, у которой первичные параметры R_0 и g_0 равны нулю. В этом случае, как было показано ранее,

$\alpha = 0$ и $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$. Таким образом,

$$\gamma = j\beta = j \frac{\omega}{V} = j \frac{2\pi}{VT} = j \frac{2\pi}{\lambda},$$

откуда $\gamma l = j2\pi l / \lambda$.

Раскроем гиперболические функции от комплексного аргумента $\gamma l = \alpha l + j\beta l$:

$$\text{ch}(\alpha l + j\beta l) = \text{ch} \alpha l \cdot \cos \beta l + j \text{sh} \alpha l \cdot \sin \beta l,$$

$$\text{sh}(\alpha l + j\beta l) = \text{sh} \alpha l \cdot \cos \beta l + j \text{ch} \alpha l \cdot \sin \beta l.$$

Тогда для линии без потерь, т.е. при $\alpha = 0$, имеют место соотношения:

$$\operatorname{ch}\gamma(l-x) = \cos \frac{2\pi}{\lambda}(l-x) \quad \text{и} \quad \operatorname{sh}\gamma(l-x) = j \sin \frac{2\pi}{\lambda}(l-x).$$

Таким образом, уравнения длинной линии в гиперболических функциях от комплексного аргумента для линии без потерь трансформируются в уравнения, записанные с использованием круговых тригонометрических функций от вещественного аргумента:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(l-x) + j \dot{I}_2 Z_C \sin \frac{2\pi}{\lambda}(l-x); \quad (3.29)$$

$$\dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(l-x) + \dot{I}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(l-x). \quad (3.30)$$

Строго говоря, линия без потерь (цепь с распределенными параметрами без потерь) представляет собой идеализированный случай. Однако при выполнении $R_0/(\omega L_0) \ll 1$ и $g_0/(\omega C_0) \ll 1$, что имеет место, например, для высокочастотных цепей, линию можно считать линией без потерь и, следовательно, описывать ее уравнениями (3.29) и (3.30).

3.8. Стоячие волны в длинных линиях

Как было показано выше, решение уравнений длинной линии можно представить в виде суммы прямой и обратной волн. В результате их наложения в цепях с распределенными параметрами возникают стоячие волны. Рассмотрим два предельных случая: ХХ и КЗ в линии без потерь, когда поглощаемая приемником активная мощность равна нулю. При ХХ на основании уравнений (3.29) и (3.30) имеем

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x' \quad \text{и} \quad \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x',$$

откуда для мгновенных значений напряжения и тока можно записать:

$$u(x', t) = U_{2m} \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = \frac{U_{2m}}{2} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x' \right) + \frac{U_{2m}}{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x' \right), \quad (3.31)$$

$$u(x', t) = \frac{U_{2m}}{Z_C} \cos \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x' = \frac{U_{2m}}{2Z_C} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x' \right) - \frac{U_{2m}}{2Z_C} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x' \right). \quad (3.32)$$

Последние уравнения представляют собой уравнения стоячих волн, являющихся результатом наложения прямой и обратной волн с одинаковыми амплитудами.

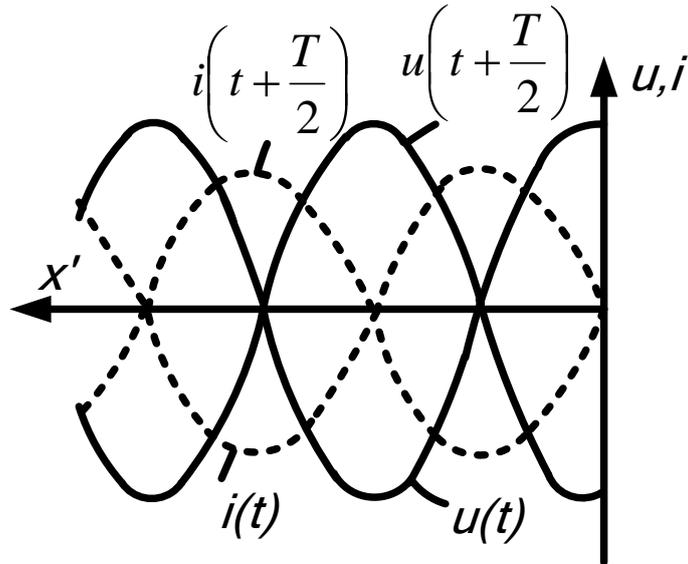


Рис. 3.4

При ХХ в соответствии с (3.31) и (3.32) в точках с координатами $x' = \frac{\lambda}{2}k$, где k - целое число, имеют место максимумы напряжения, называемые **пучностями**, и нули тока, называемые **узлами**. В точках с координатами $x' = \frac{\lambda}{4}(2k + 1)$ пучности и узлы напряжения и тока меняются местами (см. рис. 3.4). Таким образом, узлы и пучности неподвижны и пучности одной переменной совпадают с узлами другой, и наоборот. При КЗ на основании уравнений (3.29) и (3.30)

$$\dot{U} = j I_2 Z_C \sin \frac{2\pi}{\lambda} x' \quad \text{и} \quad \dot{I} = I_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x',$$

откуда для мгновенных значений можно записать

$$u(x't) = \dot{I}_{2m} Z_C \cdot \cos \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x',$$

$$i(x't) = \dot{I}_{2m} \cdot \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'.$$

В этом случае напряжение и ток представляют собой стоячие волны, причем по сравнению с режимом ХХ пучности и узлы напряжения и тока соответственно меняются местами. Поскольку в узлах мощность тождественно равна нулю, стоячие волны в передаче энергии вдоль линии не участвуют. Ее передают только бегущие волны. Чем сильнее нагрузка отличается от согласованной, тем сильнее выражены обратные и, следовательно, стоячие волны. В рассмотренных предельных случаях ХХ и КЗ имеют место только стоячие волны, и мощность на нагрузке равна нулю.

3.9. Входное сопротивление длинной линии

Входным сопротивлением длинной линии (цепи с распределенными параметрами) называется такое сосредоточенное сопротивление, подключение которого вместо линии к зажимам источника не изменит режим работы последнего. В общем случае для линии с произвольной нагрузкой \underline{Z}_H для входного сопротивления можно записать

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_C \operatorname{sh}\gamma l}{\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}\gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_H \operatorname{ch}\gamma l + \underline{Z}_C \operatorname{sh}\gamma l}{\underline{Z}_H \operatorname{sh}\gamma l + \underline{Z}_C \operatorname{ch}\gamma l} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C \operatorname{th}\gamma l}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_H \operatorname{th}\gamma l}. \quad (3.33)$$

Полученное выражение показывает, что входное сопротивление является функцией параметров линии γ и \underline{Z}_C , ее длины l и нагрузки \underline{Z}_H . При этом зависимость входного сопротивления от длины линии, т.е. функция $\underline{Z}_{\text{BX}}(l)$, не является монотонной, а носит колебательный характер, обусловленный влиянием обратной (отраженной) волны. С ростом длины линии как прямая, так соответственно и отраженная волны затухают все сильнее. В результате влияние последней ослабевает и амплитуда колебаний функции $\underline{Z}_{\text{BX}}(l)$ уменьшается. При согласованной нагрузке, т.е. при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$, как было показано ранее, обратная волна отсутствует, что полностью соответствует выражению (3.33), которое при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$ трансформируется в соотношение

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}_C = \text{const}.$$

Такой же величиной определяется входное сопротивление при $l \rightarrow \infty$. При некоторых значениях длины линии ее входное сопротивление может оказаться чисто активным. Длину линии, при которой $\underline{Z}_{\text{BX}}$ вещественно, называют **резонансной**. Как и в цепи с сосредоточенными параметрами, резонанс наиболее ярко наблюдается при отсутствии потерь. Для линии без потерь на основании (3.33) можно записать

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_H + j\underline{Z}_C \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l}{\underline{Z}_C + j\underline{Z}_H \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l}. \quad (3.34)$$

Из (3.34) для режимов холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ), т.е. случаев, когда потребляемая нагрузкой активная мощность равна нулю, соответственно получаем:

$$\underline{Z}_{\text{ВХ. XX}} = -jZ_c \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} l; \quad (3.35)$$

$$\underline{Z}_{\text{ВХ. КЗ}} = jZ_c \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l. \quad (3.36)$$

Исследование характера изменения $\underline{Z}_{\text{ВХ. XX}}$ в зависимости от длины l линии на основании (3.35) показывает, что при $0 \leq l < \lambda/4$ $\underline{Z}_{\text{ВХ. XX}}$ по модулю изменяется в пределах $-\infty < \underline{Z}_{\text{ВХ. XX}} < 0$ и имеет емкостной характер, а при $\lambda/4 \leq l < \lambda/2$ - в пределах $0 \leq \underline{Z}_{\text{ВХ. XX}} < \infty$ и имеет индуктивный характер. Такое чередование продолжается и далее через отрезки длины линии, равные четверти длины волны (см. рис. 3.5,а).

В соответствии с (3.36) аналогичный характер, но со сдвигом на четверть волны, будет иметь зависимость $\underline{Z}_{\text{ВХ. КЗ}}(l)$ при КЗ (см. рис. 3.5,б).

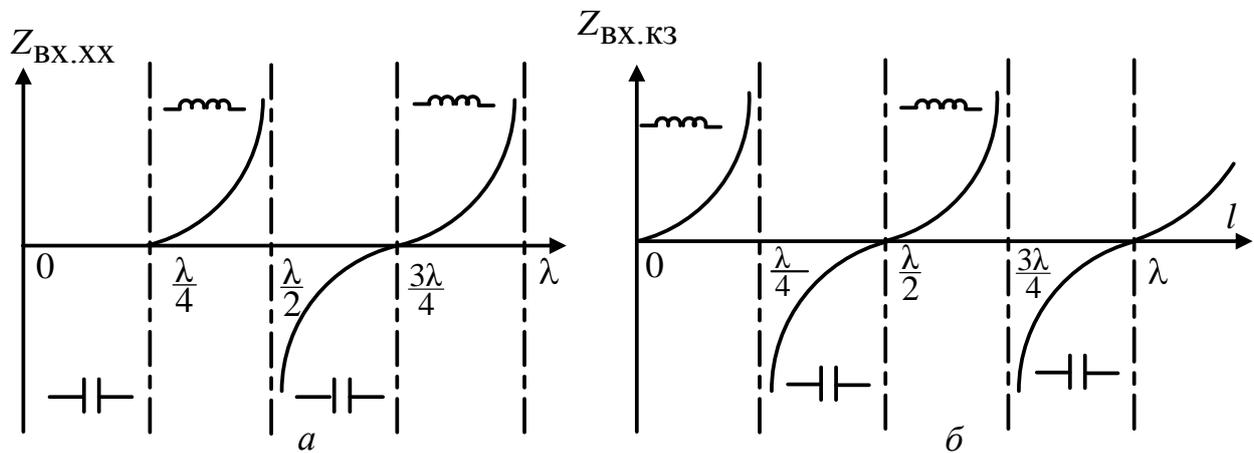


Рис. 3.5

Точки, где $\underline{Z}_{\text{ВХ}} = 0$, соответствуют резонансу напряжений, а точки, где $\underline{Z}_{\text{ВХ}} \rightarrow \infty$, - резонансу токов.

Таким образом, изменяя длину линии без потерь, можно имитировать емкостное и индуктивное сопротивления любой величины. Поскольку длина волны λ есть функция частоты, то аналогичное изменение $\underline{Z}_{\text{ВХ}}$ можно обеспечить не изменением длины линии, а частоты генератора. При некоторых частотах входное сопротивление цепи с распределенными параметрами также становится вещественным. Такие частоты называются **резонансными**. Таким образом, резонансными называются частоты, при которых в линии укладывается целое число четвертей волны.

Вопросы и задачи для самопроверки

1. Что называется линией без искажений? Как соотносятся первичные параметры в такой линии?
2. Запишите уравнения линии конечной длины для случаев, когда заданы ее входные напряжение и ток и когда выходные.
3. Как определяются параметры цепи с распределенными параметрами?
4. Что называется линией без потерь? Какими свойствами она обладает?
5. При каких условиях в линии образуются стоячие волны?
6. Определить напряжение и ток на входе трехфазной линии электропередачи длиной $l = 200$ км, если $U_{2\phi} = 63,5$ кВ, $P_2 = 68$ МВт, $\cos 2\varphi = 0,8$. Параметры линии на фазу: $R_0 = 0,2$ Ом/км, $\omega L_0 = 0,45$ Ом/км, $g_0 = 0$, $\omega C_0 = 2,62 \cdot 10^{-6}$ См/км. Определить КПД линии.

Ответ: $\bar{U}_1 = 102,5 \cdot 10^3 e^{j12,5^\circ}$ В; $\bar{I}_1 = 415 e^{-j32,5^\circ}$ А; $\eta = 75\%$.

7. Определить входное сопротивление линии без потерь длиной в четверть волны, нагруженной на емкостную нагрузку $C = 50$ пФ при частоте 100 МГц. Волновое сопротивление $Z_C = 500$ Ом.

Ответ: $Z_{\text{вх}} = j1250$ Ом.

8. Однородная двухпроводная линия без искажений имеет волновое сопротивление $Z_C = 500$ Ом, скорость распространения волны $V = 3 \cdot 10^5$ км/с и затухание 1,5 Нп на 100 км. Определить первичные параметры линии и также ее КПД при длине $l = 100$ км и нагрузке, равной волновой.

Ответ: $R_0 = 7,5$ Ом/км; $L_0 = 1,66 \cdot 10^{-3}$ Гн/км; $g_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ См/км; $C_0 = 6,67$ нФ; $\eta = 5\%$.

9. Линия без потерь нагружена на емкостное сопротивление, численно равное волновому. $f = 100$ МГц, $V = 3 \cdot 10^8$ м/с. В конце линии $U_2 = 200$ В. Найти \bar{U} на расстоянии 1 м от конца линии.

Ответ: $\bar{U} = -273$ В.

10. Линия без потерь длиной $l = \lambda/10$ разомкнута на конце. $Z_C = 200$ Ом, в начале линии $U_1 = 200$ В. Найти \bar{I} в середине линии.

Ответ: $\bar{I} = j0,38$ А.

Глава 4. Практическая часть

4.1. Задания и варианты исходных данных для контрольных работ

Контрольные задания являются одним из основных видов занятий по курсу ТОЭ. При выполнении контрольных заданий студенты закрепляют знания об основных методах расчета и физических процессах, происходящих в электрических цепях.

К представленным на рецензию контрольным заданиям предъявляются следующие требования.

1. Основные положения решения должны быть достаточно подробно пояснены.

2. Рисунки, графики, схемы, в том числе и заданные условием задачи, не следует размещать среди текста. Они должны быть выполнены на отдельном листе бумаги, аккуратно и в удобочитаемом масштабе. Для элементов электрических схем следует использовать обозначения, применяемые в учебниках по ТОЭ.

3. В тетради следует оставлять поля шириной не менее 4 см для замечаний рецензента.

4. Контрольные задания должны быть датированы и подписаны студентом.

5. Незачтенное контрольное задание должно быть выполнено заново и прислано на повторную рецензию вместе с первоначальной работой и замечаниями рецензента. Исправления ошибок в отрецензированном тексте не допускаются. Если неправильно выполнена не вся работа, а только часть ее, то после переработки исправленный текст нужно написать в тетради после первоначального текста, указав, что это исправление ошибок.

Контрольные задания зачитываются, если решения не содержат ошибок принципиального характера и выполнены перечисленные требования.

При выполнении контрольной задачи следует руководствоваться следующими требованиями.

1. Перед решением задачи указать, какие физические законы или расчетные методы предполагается использовать при решении, привести математическую запись этих законов и методов.

2. В начале решения на схеме следует указать положительные направления токов (напряжений), обозначив токи в соответствии с номером ветви.

3. В ходе решения задачи не следует изменять однажды принятые направления токов и наименования узлов, сопротивлений и т.д. При решении одной и той же задачи различными методами одну и ту же величину надлежит обозначать одним и тем же буквенным символом.

4. Выражение для каждой величины, подлежащей расчету, следует записать в общем виде, а затем в полученную формулу подставить численные значения и привести окончательный результат с указанием единицы измерения. При решении системы уравнений целесообразно применять ПК с использованием программного пакета «MathCAD».

5. Промежуточные и конечный результаты расчетов должны быть ясно выделены из общего текста.

6. Решение задач не следует перегружать приведением всех алгебраических преобразований и арифметических расчетов.

7. Каждому этапу задачи нужно давать пояснения.

8. При построении кривых градуировку осей выполнять, начиная с нуля, равномерно, через один или два сантиметра. Числовые значения координат точек, по которым строятся кривые, не приводить. Весь график в целом и отдельные кривые на нем должны иметь названия. Для построения графиков возможно применение ПК.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Работа состоит из одной задачи, в которой исследуется переходный режим линейной электрической цепи тремя методами: классическим, операторным и методом переменных состояния.

Задача 3

Электрическая цепь для исследований задается каждому студенту в соответствии с индивидуальным вариантом (см. ниже). Каждая цепь содержит один источник постоянной ЭДС, элементы R , L , C и два переключателя ($S1$ и $S2$), один из которых находится в фиксированном положении (1 или 2), а другой периодически переключается через каждые 10 мс, т.е. с частотой 50 Гц. На рис.4.1 и 4.2 приведены 12 схем исследуемых цепей.

Индивидуальное задание в соответствии с табл. 1 кодируется выражением из пяти символов (например 12. 1. 1. 6. L), определяющих :

первый - номер (1 - 12) схемы из рис.1 или 2 (в примере - 12 на рис.4.2);

второй - номер работающего ключа (в примере 1, т.е. $S1$);

третий - положение зафиксированного ключа $S2$ (в примере - 1);

четвертый – шифр в табл. 4.2, где задаются соотношения между параметрами резисторов в исследуемой цепи (в примере - шифр 6);

пятый - элемент, в котором необходимо определить законы изменения тока и напряжения в переходных процессах (в примере - L).

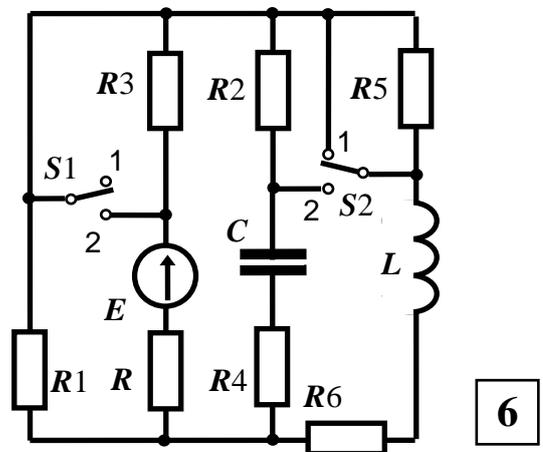
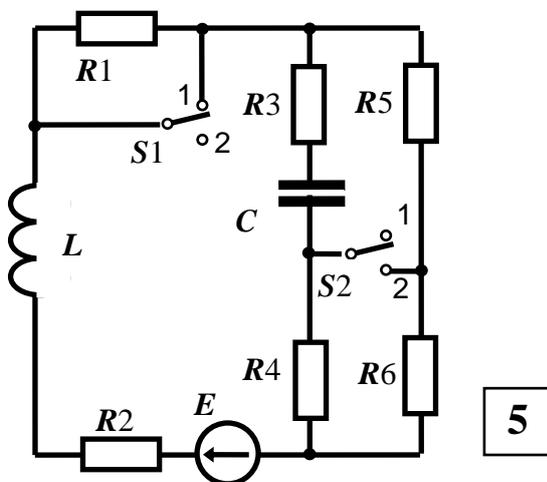
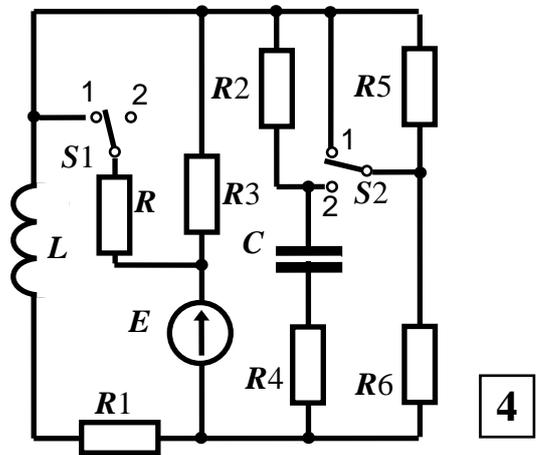
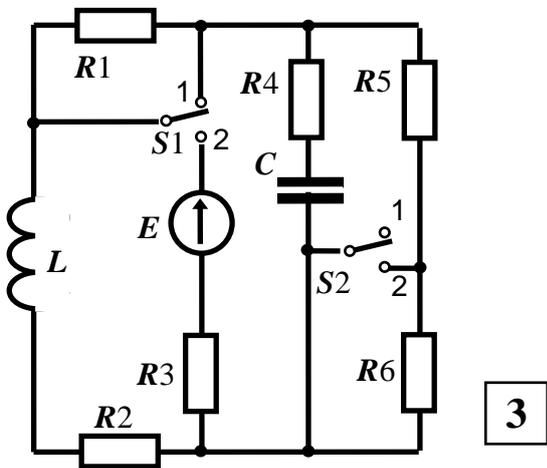
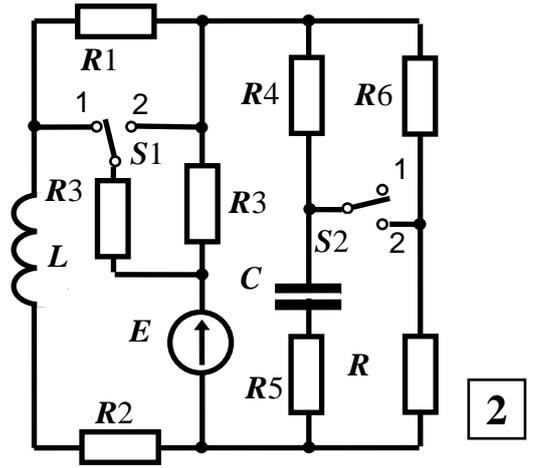
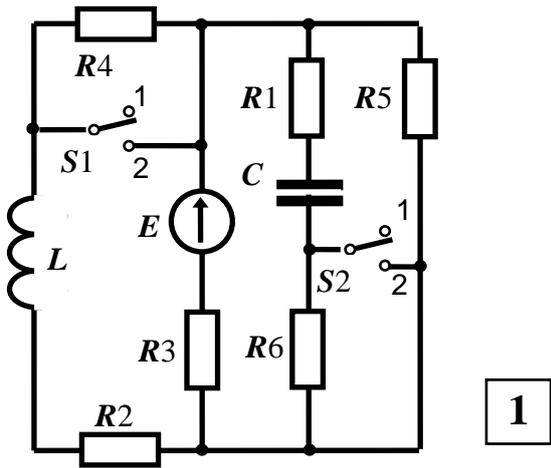


Рис. 4.1. Схемы исследуемых цепей

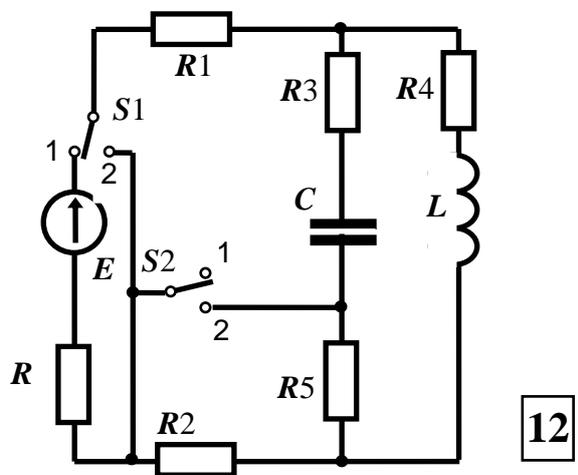
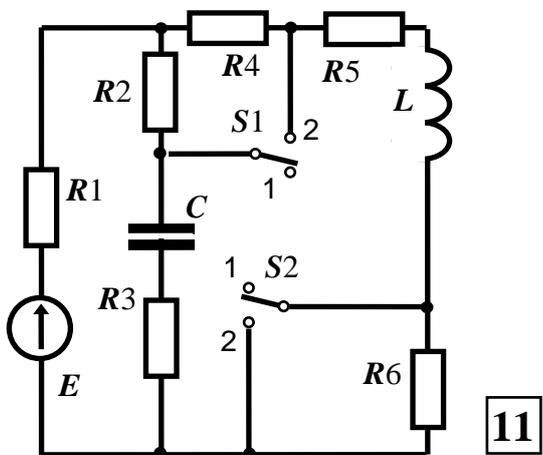
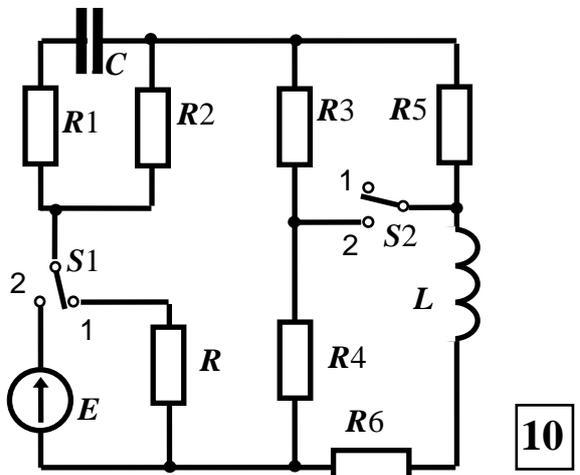
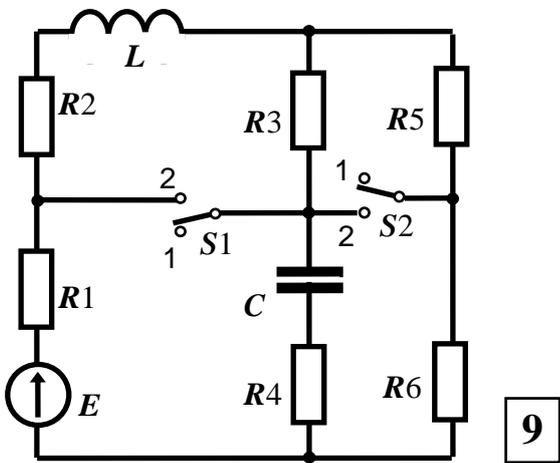
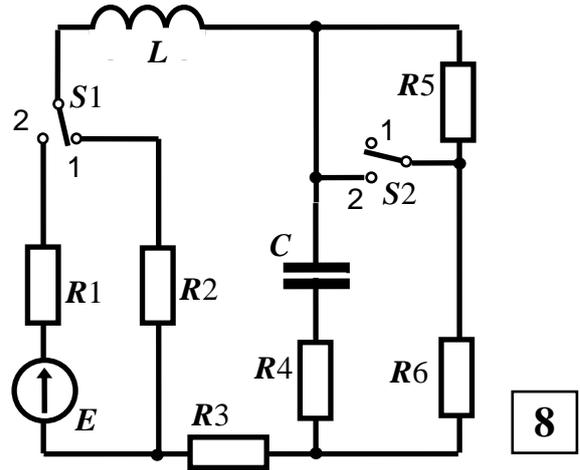
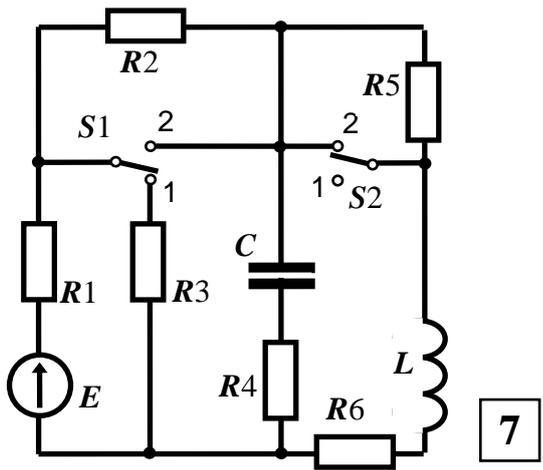


Рис. 4.2 Схемы исследуемых цепей

Таблица 4.1

Индивидуальные задания

№ п/п	Шифр	R , Ом	L , мГн	C , мкФ	E , В
1	2	3	4	5	6
1	1.1.1.1.L	50	30	2	10
2	2.1.1.4.L	60	10	8	15
3	3.1.1.5.C	55	12	10	12
4	4.1.1.4.C	65	15	9	8
5	5.1.1.5.L	70	14	12	20
6	6.1.1.5.L	75	20	11	18
7	7.1.1.3.L	50	30	2	10
8	8.1.1.3.L	60	10	8	15
9	9.1.1.4.L	55	12	10	12
10	10.1.1.3.C	65	15	9	8
11	11.1.1.3.L	70	14	12	20
12	12.1.1.1.C	75	20	11	18
13	1.2.2.1.L	50	30	2	10
14	2.1.2.4.L	60	10	8	15
15	3.2.2.4.L	55	12	10	12
16	4.2.1.6.C	65	15	9	8
17	5.2.2.3.L	70	14	12	20
18	6.2.1.4.L	75	20	11	18
19	7.2.1.4.C	50	30	2	10
20	8.2.2.4.L	60	10	8	15
21	9.2.1.1.C	55	12	10	12
22	10.2.2.4.L	65	15	9	8
23	11.2.1.5.L	70	14	12	20
24	12.2.1.1.L	75	20	11	18
25	1.1.2.1.C	55	12	10	12
26	2.1.2.6.C	65	15	9	8
27	3.1.2.3.C	70	14	12	20
28	4.1.2.5.L	75	20	11	18
29	5.1.2.5.L	50	30	2	10

Продолжение табл. 4.1.

№ п/п	Шифр	R , Ом	L , мГн	C , мкФ	E , В
30	6.1.2.5.L	60	10	8	15
31	7.1.2.4.L	70	14	12	20
32	8.1.2.5.L	75	20	11	18
33	9.1.2.2.L	50	30	2	10
34	10.1.2.4.C	60	10	8	15
35	11.1.2.5.L	55	12	10	12
36	12.1.2.3.C	65	15	9	8
37	1.1.1.3.C	75	20	11	18
38	2.1.1.5.L	50	30	2	10
39	3.1.1.1.L	60	10	8	15
40	4.1.1.5.L	70	14	12	20
41	5.1.1.4.C	75	20	11	18
42	6.1.1.6.C	50	30	2	10
43	7.1.1.5.C	50	30	2	10
44	8.1.1.5.C	60	10	8	15
45	9.1.1.1.L	70	14	12	20
46	10.1.1.5.L	75	20	11	18
47	11.1.1.5.C	50	30	2	10
48	12.1.1.6.L	75	20	11	18
49	1.2.1.4.C	70	14	12	20
50	2.2.1.3.L	75	20	11	18
51	3.2.1.4.L	50	30	2	10
52	4.2.1.4.L	60	10	8	15
53	5.2.1.5.L	55	12	10	12
54	6.2.1.2.C	65	15	9	8
55	7.2.1.6.L	75	20	11	18
56	8.1.2.4.C	50	30	2	10
57	9.2.1.6.C	60	10	8	15
58	10.1.2.5.L	70	14	12	20
59	11.2.1.4.C	75	20	11	18
60	12.2.1.5.L	50	30	2	10
61	1.1.1.6.L	70	14	12	20

Продолжение табл. 4.1.

№ п/п	Шифр	R , Ом	L , мГн	C , мкФ	E , В
62	2.1.1.6.C	75	20	11	18
63	3.1.1.4.L	50	30	2	10
64	4.1.1.2.L	60	10	8	15
65	5.1.1.4.L	55	12	10	12
66	6.1.2.3.C	65	15	9	8
67	7.1.1.6.L	75	20	11	18
68	8.2.2.3.C	50	30	2	10
69	9.1.2.4.C	60	10	8	15
70	10.2.2.5.C	70	14	12	20
71	11.1.1.4.C	75	20	11	18
72	12.2.1.5.C	50	30	2	10
73	1.2.2.3.L	70	14	12	20
74	2.2.1.2.L	75	20	11	18
75	3.2.2.1.C	50	30	2	10
76	4.2.2.4.L	60	10	8	15
77	5.2.2.6.C	55	12	10	12
78	6.2.2.4.L	65	15	9	8
79	7.2.2.2.C	75	20	11	18
80	9.2.2.5.L	50	30	2	10
81	11.2.2.6.L	60	10	8	15
82	12.2.1.4.C	70	14	12	20
83	1.2.1.5.C	75	20	11	18
84	2.2.2.4.C	50	30	2	10
85	3.1.2.1.L	70	14	12	20
86	4.2.2.5.C	75	20	11	18
87	5.2.1.4.C	50	30	2	10
88	6.2.2.1.C	60	10	8	15
89	7.2.2.5.L	55	12	10	12
90	9.2.2.5.C	65	15	9	8
91	11.2.2.1.C	75	20	11	18
92	1.1.2.3.C	50	30	2	10
93	3.2.1.4.C	60	10	8	15

Окончание табл. 4.1.

№ п/п	Шифр	R , Ом	L , мГн	C , мкФ	E , В
94	4.1.1.6.C	70	14	12	20
95	5.1.2.5.C	75	20	11	18
96	6.2.1.5.L	50	30	2	10
97	7.1.2.2.C	65	15	9	8
98	9.2.1.5.L	75	20	11	18
99	11.1.2.2.L	50	30	2	10
100	8.2.2.5.L	60	10	8	15

Таблица 4.2

Соотношения между параметрами резисторов

Шифр	$R1$	$R2$	$R3$	$R4$	$R5$	$R6$
1	2	3	4	5	5	7
1	1,2 R	0,5 R	0,7 R	1,2 R	0,8 R	2,0 R
2	1,4 R	0,7 R	1,1 R	1,2 R	1,5 R	R
3	1,5 R	0,8 R	0,5 R	R	2,4 R	1,4 R
4	0,5 R	1,2 R	1,8 R	0,7 R	R	2,5 R
5	0,6 R	0,7 R	2,0 R	1,1 R	R	R
6	1.3 R	1.6 R	1.2 R	R	1.5 R	R

Задание к задаче 3

1. Рассчитать **классическим методом** ток и напряжение в элементе схемы, указанным пятым символом кода задания, для двух схем, соответствующих двум положениям работающего ключа, при условии, что к моменту коммутации в цепи имеет место установившийся процесс.

2. Рассчитать **операторным методом** законы изменения тех же переменных. Сравнить полученные выражения с результатами расчетов классическим методом, убедиться в их совпадении.

3. Построить графики рассчитанных токов и напряжений в переходных процессах на одном рисунке, причем график процесса после второго переключения должен быть продолжением во времени графика после первого переключения.

4. Рассчитать **методом переменных состояния** законы изменения напряжения на емкостном элементе и тока в индуктивном элементе в переходных режимах после двух коммутаций. Построить графики временных зависимо-

стей, используя при численном интегрировании дифференциальных уравнений одну из систем математических расчетов на ПК (MathCad или др.).

5. Сравнить результаты, полученные в пп. 2, 3 и 4. Сделать выводы.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Работа состоит из одной задачи по разделу курса «Цепи с распределенными параметрами (Длинные линии)».

Задача 4

В задаче исследуется длинная линия сначала искажающая и с потерями, затем без искажения и, наконец, без потерь в режимах гармонического и несинусоидального воздействий. Индивидуальные задания к задаче даются в табл. 4.3, 4.4.

Задание к задаче 4

1. Линия с потерями

1.1. По известным данным (табл.4.3) линии с потерями определить первичные параметры линии: R_0 , Ом/км, L_0 , Гн/км, G_0 , См/км, C_0 , Ф/км, длину волны λ , км, фазовую скорость V , км/с, а также параметры, отмеченные в табл. 4.3 знаком вопроса (?).

1.2. Линия с потерями работает в установившемся гармоническом режиме. Режим работы линии определяется для каждого варианта табл. 4.4.

1.2.1. Определить параметры, отмеченные в табл. 4.4 знаком вопроса (?).

1.2.2. Выразить мгновенные значения напряжения и мгновенные значения тока как сумму соответствующих падающих и отраженных волн:

$$u(t) = u_{\text{пад}}(t) + u_{\text{отр}}(t); \quad i(t) = i_{\text{пад}}(t) + i_{\text{отр}}(t).$$

Построить эти зависимости для точки X , находящейся в середине линии, при этом на одном рисунке построить функцию $u(t)$ и его составляющие; на втором рисунке функцию $i(t)$ и его составляющие.

1.2.3. Определить коэффициенты отражения по току q_i и напряжению q_u .

1.2.4. Рассчитать активные P и полные мощности S в начале и в конце линии, вычислить коэффициент полезного действия линии η .

1.2.4. На вход длинной линии подано несинусоидальное напряжение, состоящее из двух гармонических составляющих: $u(t) = u_{(1)}(t) + u_{(k)}(t)$,

где $u_{(1)}(t) = U_{m(1)} \sin(\omega t + \psi_1)$; $u_{(k)}(t) = U_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_k)$.

Амплитуда $U_{m(1)}$ и начальная фаза ψ_1 первой гармонической составляющей берутся из табл. 4.4, колонка 2, номер k -й гармонической состав-

ляющей указан в колонке 8, а амплитуда напряжения $Um(k)$ и начальная фаза k -й гармоники ψ_k берутся из табл. 4.4, колонка 9.

Линия работает в согласованном режиме как для первой гармоники, так и для k -й.

Построить временные диаграммы мгновенных значений падающего напряжения в начале и в конце линии в функции времени $u_{\text{пад}}(t)$. Сравнить форму напряжения на входе линии и в конце линии. Сделать письменное заключение.

2. Линия без искажений

2.1. Рассчитать величину параметра линии, указанного в табл. 4.2 (колонка 10), чтобы при найденных в п. 1.1 значениях трех остальных параметров линия стала неискажающей.

2.2. На вход линии без искажения подано напряжение п. 1.2.4. Линия работает в режиме согласования. Выразить мгновенное значение падающего напряжения в конце линии $u_{\text{пад}}(t)$.

2.3. Построить кривые мгновенных значений падающего напряжения в функции времени $u_{\text{пад}}(t)$ для линии без искажения на отдельном рисунке. Сравнить формы напряжения в начале и в конце линии без искажения. Сделать письменное заключение.

3. Линия без потерь

3.1. Для линии без потерь, включенной на синусоидальное напряжение (колонка 2 в табл. 4.2), увеличить частоту в 10^6 раз и полагать начальную фазу равной нулю.

3.2. Рассчитать $Z_{\text{вх}}$ входное сопротивление отрезков линии без потерь длиной в $\lambda/8, \lambda/4, \lambda/4, 3\lambda/8, \lambda/2$ (где λ — длина волны) для режимов линии: либо холостой ход, либо короткое замыкание. (См. «Указание к выбору режима линии без потерь»).

У к а з а н и е к выбору режима работы линии без потерь:

для четных вариантов задания принять режим –холостой ход;

для нечетных вариантов задания принять режим –короткое замыкание.

3.3. Для каждого отрезка линии (см. п. 3.2) составить и вычертить эквивалентную схему замещения линии.

3.4. Построить кривые изменения входного сопротивления $Z_{\text{вх}}$ в функции длины линии $Z_{\text{вх}}(y)$.

3.5. Выразить мгновенные значения напряжений и токов линии без потерь $u(t,x)$ и $i(t,x)$ для соответствующего режима линии: холостого хода или короткого замыкания.

3.6. Построить графики зависимостей $u(x)$ или $i(x)$ для двух моментов времени:

$u(x)$, если режим линии - холостой ход, $t_1 = (3/2) \times \pi / \omega$, $t_2 = (1/2) \pi / \omega$;

$i(x)$, если режим линии - короткое замыкание, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$.

Таблица 4.3

Исходные данные для расчета первичных параметров линии

№ п/п	f , Гц	l , км	γ	Z_c , Ом	Z_o , Ом	Y_o , См	$Z_{кз}$, Ом	$Z_{хх}$, Ом
1	400	120	$9.6 \cdot 10^{-3} \angle 68$?	18 \angle 56.5	?	?	?
2	450	130	0.011 \angle 70.2	1854 \angle -10.7	?	?	?	?
3	60	100	$2.7 \cdot 10^{-3} \angle 43.5$?	?	$8.8 \cdot 10^{-7} \angle 77$?	?
4	370	110	$9.7 \cdot 10^{-3} \angle 69$?	?	?	1781 \angle 30.9	?
5	280	90	$5.5 \cdot 10^{-3} \angle 56$?	?	?	?	4781 \angle -64
6	100	80	?	3998 \angle 2	9.956 \angle 15.4	?	?	?
7	520	95	?	4547 \angle 8.7	?	$9.1 \cdot 10^{-7} \angle 52$?	?
8	680	75	?	736 \angle 4.7	?	?	1025 \angle 5.8	?
9	700	84	?	708.4 \angle -1.	?	?	?	249 \angle 61.7
10	500	140	?	?	?	?	938 \angle -53.6	354.4 \angle 38
11	400	120	$9.6 \cdot 10^{-3} \angle 68$	1882 \angle -11.7	?	?	?	?
12	450	130	0.011 \angle 70.2	?	?	$5.7 \cdot 10^{-6} \angle 80.9$?	?
13	60	100	$2.7 \cdot 10^{-3} \angle 43.5$?	?	?	861.7 \angle 8.5	?
14	370	110	$9.7 \cdot 10^{-3} \angle 69.$?	?	?	?	900.1 \angle -65.4
15	280	90	?	2428 \angle -13	13.3 \angle 43	?	?	?
16	100	80	?	3998 \angle 2	?	$6.23 \cdot 10^{-7} \angle 12$?	?
17	520	95	?	4547 \angle 8.7	?	?	1837 \angle 67	?

Продолжение табл.4.3

№ п/п	f , Гц	l , км	γ	Z_c , Ом	Z_o , Ом	Y_o , См	$Z_{кз}$, Ом	$Z_{хх}$, Ом
18	680	75	?	736∠4.7	?	?	?	529∠3.6
19	700	84	?	?	?	?	2014∠-64	249∠61.7
20	450	130	0.011∠70.2	?	19.7∠60.6	?	?	?
21	400	120	$9.6 \cdot 10^{-3}$ ∠68	?	?	$5.1 \cdot 10^{-6}$ ∠79.8	?	?
22	450	130	0.011∠70.2	?	?	?	3611∠14.9	?
23	60	100	$2.7 \cdot 10^{-3}$ ∠43.5	?	?	?	?	11260∠-75.5
24	370	110	?	1266∠-17	12.3∠52.4	?	?	?
25	280	90	?	2428∠-13	?	$2.26 \cdot 10^{-6}$ ∠69	?	?
26	100	80	?	3998∠2	?	?	787.2∠15	?
27	520	95	?	4547∠8.7	?	?	?	11260∠-49
28	680	75	?	?	?	?	1025∠5.8	529∠3.6
29	500	140	0.015∠80	?	8.5∠72	?	?	?
30	60	100	$2.7 \cdot 10^{-3}$ ∠43.5	3115∠-33	?	?	?	?
31	400	120	$9.6 \cdot 10^{-3}$ ∠68	?	?	?	2835∠29.3	?
32	450	130	0.011∠70.2	?	?	?	?	952.5∠-36
33	60	100	?	3115∠-33	8.6∠10	?	?	?
34	370	110	?	1266∠-17	?	$7.6 \cdot 10^{-6}$ ∠87	?	?
35	280	90	?	2428∠-13	?	?	1233∠38.8	?
36	100	80	?	3998∠2	?	?	?	20310∠-11

Продолжение табл.4.3

№ п/п	f , Гц	l , км	γ	Z_c , Ом	Z_o , Ом	Y_o , См	$Z_{кз}$, Ом	$Z_{хх}$, Ом
37	520	95	?	?	?	?	1837∠67	11250∠-49
38	700	84	0.022∠85.5	?	15.9∠84	?	?	?
39	500	140	0.015∠80	576.6∠-7.6	?	?	?	?
40	370	110	$9.7 \cdot 10^{-3}$ ∠69	?	?	$7.6 \cdot 10^{-6}$ ∠87	?	?
41	400	120	$9.6 \cdot 10^{-3}$ ∠68	?	?	?	?	1250∠-52.7
42	450	130	?	1854∠-10.7	19.7∠59.4	?	?	?
43	60	100	?	3115∠-33	?	$8.8 \cdot 10^{-7}$ ∠77	?	?
44	370	110	?	1266∠-17	?	?	1781∠30.9	?
45	280	90	?	2428∠-13	?	?	?	4781∠-64
46	100	80	?	?	?	?	787.2∠15	20310∠-11
47	680	75	0.024∠59	?	17.54∠64	?	?	?
48	700	84	0.022∠85.5	708.4∠-1	?	?	?	?
49	500	140	0.015∠80	?	?	$2.58 \cdot 10^{-5}$ ∠87	?	?
50	280	90	$5.5 \cdot 10^{-3}$ ∠56	?	?	?	1233∠38.8	?
51	400	120	?	1882∠-11.7	18.1∠56.5	?	?	?
52	450	130	?	1854∠-10.7	?	$5.7 \cdot 10^{-6}$ ∠80.9	?	?
53	60	100	?	3115∠-33	?	?	861.7∠8.6	?
54	370	110	?	1266∠-17	?	?	?	900.1∠-65.4
55	280	90	?	?	?	?	1233∠38.8	4781∠-64

Продолжение табл.4.3

№ п/п	f, Гц	l, км	γ	Z _c , Ом	Z _o , Ом	Y _o , См	Z _{кз} , Ом	Z _{хх} , Ом
56	520	95	4.14·10 ⁻³ ∠61	?	18.8∠69	?	?	?
57	680	75	0.024∠59	736∠4.7	?	?	?	?
58	700	84	0.022∠85.5	?	?	3.17·10 ⁻⁵ ∠86	?	?
59	500	140	0.015∠80	?	?	?	938∠-53.6	?
60	100	80	2.5·10 ⁻³ ∠13.5	?	?	?	?	20310∠-11
61	400	120	?	1882∠-11.7	?	5.1·10 ⁻⁶ ∠79.8	?	?
62	450	130	?	1854∠-10.7	?	?	3611∠14.9	?
63	60	100	?	3115∠-33	?	?	?	11260∠-77.5
64	370	110	?	?	?	?	1781∠30.9	900.1∠-65.4
65	100	80	2.5·10 ⁻³ ∠13.5	?	9.956∠15.4	?	?	?
66	520	95	4.14·10 ⁻³ ∠61	4547∠8.7	?	?	?	?
67	680	75	0.024∠59	?	?	3.2·10 ⁻⁵ ∠55	?	?
68	700	84	0.022∠85.5	?	?	?	2014∠-64	?
69	500	140	0.015∠80	?	?	?	?	354.4∠38
70	520	95	?	4547∠8.7	18.8∠69	?	?	?
71	400	120	?	1882∠-11.7	?	?	2835∠29.3	?
72	450	130	?	1854∠-10.7	?	?	?	952.5∠-3.6
73	60	100	?	?	?	?	861.7∠8.6	11260∠-77.5
74	280	90	5.5·10 ⁻³ ∠56	?	13.3∠43	?	?	?

Продолжение табл.4.3

№ п/п	f , Гц	l , км	γ	Z_c , Ом	Z_o , Ом	Y_o , См	$Z_{кз}$, Ом	$Z_{хх}$, Ом
75	100	80	$2.5 \cdot 10^{-3} \angle 13.5$	3998 $\angle 2$?	?	?	?
76	520	95	$4.14 \cdot 10^{-3} \angle 61$?	?	$9.1 \cdot 10^{-7} \angle 52$?	?
77	680	75	0.024 $\angle 59$?	?	?	1025 $\angle 5.8$?
78	700	84	0.022 $\angle 85.5$?	?	?	?	249 $\angle 61.7$
79	500	140	?	576.6 $\angle -7.6$	8.5 $\angle 72$?	?	?
80	680	75	?	736 $\angle 4.7$?	$3.2 \cdot 10^{-5} \angle 55$?	?
81	400	120	?	1882 $\angle -11.7$?	?	?	1250 $\angle -52.7$
82	450	130	?	?	?	?	3611 $\angle 14.9$	952.5 $\angle -36$
83	370	110	$9.7 \cdot 10^{-3} \angle 69$?	12.3 $\angle 52.4$?	?	?
84	280	90	$5.5 \cdot 10^{-3} \angle 56$	2428 $\angle -13$?	?	?	?
85	100	80	$2.5 \cdot 10^{-3} \angle 13.5$?	?	$6.23 \cdot 10^{-7} \angle 12$?	?
86	520	95	$4.14 \cdot 10^{-3} \angle 61$?	?	?	1837 $\angle 67$?
87	680	75	0.024 $\angle 59$?	?	?	?	529 $\angle 3.6$
88	700	84	?	708.4 $\angle -1$	15.9 $\angle 84$?	?	?
89	500	140	?	576.6 $\angle -7.6$?	$2.58 \cdot 10^{-5} \angle 87$?	?
90	700	84	?	708.4 $\angle -1$?	?	2014 $\angle -64$?
91	400	120	?	?	?	?	2835 $\angle 29.3$	1250 $\angle -52.7$
92	60	100	$2.7 \cdot 10^{-3} \angle 43.5$?	8.6 $\angle 10$?	?	?
93	370	110	$9.7 \cdot 10^{-3} \angle 69$	1266 $\angle -17$?	?	?	?

Окончание табл.4.3

№ п/п	f , Гц	l , км	γ	Z_c , Ом	Z_o , Ом	Y_o , См	$Z_{кз}$, Ом	$Z_{хх}$, Ом
94	280	90	$5.5 \cdot 10^{-3} \angle 56$?	?	$2.26 \cdot 10^{-6} \angle 69$?	?
95	100	80	$2.5 \cdot 10^{-3} \angle 13.5$?	?	?	787.2/15	?
96	520	95	$4.14 \cdot 10^{-3} \angle 61$?	?	?	?	11250/-49
97	680	75	?	736/4.7	17.54/64	?	?	?
98	700	84	?	708.4/-1	?	$3.17 \cdot 10^{-5} \angle 86$?	?
99	500	140	?	576.6/-7.6	?	?	938/-53.6	?
100	500	140	0.015/80	?	?	?	?	354.4/38

88

Таблица 4.4

Исходные данные для расчета режимов работы длинной линии

	U_1 , В	I_1 , А	Z_H , Ом	U_2 , В	I_2 , А	$Z_{ВХ}$, Ом	k	U_k , В	Параметр линии
1	120/-35	0.093/-11.3	?	?	?	?	2	90/-14	L
2	150/-20	?	2932/23.9	?	?	?	3	80/-35	R
3	140/-50	?	?	117.3/-54	?	?	4	70/-35	C
4	145/-37	?	?	?	0.1/-54	?	5	60/20	G
5	145/-38	?	?	?	?	4340/-8	6	55/-70	L
6	155/-18	0.03/12	?	?	?	?	2	90.9/10	R

	$U_1, \text{В}$	$I_1, \text{А}$	$Z_H, \text{Ом}$	$U_2, \text{В}$	$I_2, \text{А}$	$Z_{\text{ВХ}}, \text{Ом}$	k	$U_k, \text{В}$	Пара- метр линии
7	160∠-12	?	4747∠18	?	?	?	3	43∠-8	C
8	145∠23	?	?	77.9∠51	?	?	4	34∠20	G
9	138∠-135	?	?	?	0.146∠130	?	5	51∠53	R
10	100∠20	?	?	?	?	352∠-7.9	6	36∠81	L
11	120∠-35	?	2532∠30.2	?	?	?	2	23∠64	R
12	150∠-20	?	?	120.7∠-77	?	?	3	51∠38	C
13	140∠50	?	?	?	0.0261∠-50	?	4	47∠-68	G
14	145∠-37	?	?	?	?	1544∠-39.4	5	20.7∠-77	L
15	135∠18	0.062∠60.7	?	?	?	?	6	61∠62	R
16	155∠-18	?	4181∠11.7	?	?	?	2	54∠-47	C
17	160∠-12	?	?	128.8∠-20.5	?	?	3	29.7∠45	G
18	145∠23	?	?	?	0.085∠-48	?	4	31∠-78	R
19	138∠-135	?	?	?	?	338.3∠-16.8	5	54∠53	L
20	150∠-20	0.111∠-17	?	?	?	?	6	43∠-65	R
21	120∠-35	?	?	90.5∠-79.8	?	?	2	39.7∠63	C
22	150∠-20	?	?	?	0.059∠-66	?	3	61∠62	G
23	140∠50	?	?	?	?	5458∠-13.5	4	54∠-47	L
24	135∠-15	0.163∠5.6	?	?	?	?	5	29.7∠45	R

Продолжение табл. 4.4

	$U_1, \text{В}$	$I_1, \text{А}$	$Z_H, \text{Ом}$	$U_2, \text{В}$	$I_2, \text{А}$	$Z_{BX}, \text{Ом}$	k	$U_k, \text{В}$	Пара- метр линии
25	135∠18	?	3167∠24.9	?	?	?	6	31∠-78	<i>C</i>
26	155∠-18	?	?	135.3∠-16	?	?	2	54∠53	<i>G</i>
27	160∠-12	?	?	?	0.039∠5.8	?	3	43∠-65	<i>R</i>
28	145∠23	?	?	?	?	676.2∠-3.2	4	39.7∠63	<i>L</i>
29	110∠-30	0.2∠-49.5	?	?	?	?	5	90∠-14	<i>R</i>
30	140∠50	?	4754∠2	?	?	?	6	80∠-35	<i>C</i>
31	120∠-35	?	?	?	0.05∠-68.2	?	2	70∠-35	<i>G</i>
32	150∠-20	?	?	?	?	1792∠-30.8	3	60∠20	<i>L</i>
33	125∠10	0.035∠75	?	?	?	?	4	55∠-70	<i>R</i>
34	135∠-15	?	1932∠14.3	?	?	?	5	90.9∠10	<i>C</i>
35	135∠-18	?	?	105.8∠6.5	?	?	6	43∠-8	<i>G</i>
36	155∠-18	?	?	?	0.03∠17.6	?	2	34∠20	<i>R</i>
37	160∠-12	?	?	?	?	8848∠18.4	3	51∠53	<i>L</i>
38	172∠24	0.238∠-14	?	?	?	?	4	36∠81	<i>R</i>
39	110∠-30	?	775.7∠34.3	?	?	?	5	23∠64	<i>C</i>
40	145∠-37	?	?	114∠-73	?	?	6	51∠38	<i>G</i>
41	120∠-35	?	?	?	?	2204∠-33.8	2	47∠-68	<i>L</i>
42	130∠40	0.103∠43	?	?	?	?	3	21∠-77	<i>R</i>

Продолжение табл. 4.4

	$U_1, \text{В}$	$I_1, \text{А}$	$Z_H, \text{Ом}$	$U_2, \text{В}$	$I_2, \text{А}$	$Z_{\text{ВХ}}, \text{Ом}$	k	$U_k, \text{В}$	Параметр линии
43	125∠10	?	4925∠1.2	?	?	?	4	90∠-14	<i>C</i>
44	135∠-15	?	?	104.7∠-53	?	?	5	80∠-35	<i>G</i>
45	138∠18	?	?	?	0.048∠47	?	6	70∠-35	<i>R</i>
46	155∠-18	?	?	?	?	6054∠32	2	60∠20	<i>L</i>
47	124∠-13	0.189∠-23	?	?	?	?	3	55∠-70	<i>R</i>
48	172∠24	?	1046∠27	?	?	?	4	90.9∠10	<i>C</i>
49	110∠-30	?	?	106.7∠-138	?	?	5	43∠-8	<i>G</i>
50	145∠-38	?	?	?	0.052∠-11	?	6	34∠20	<i>L</i>
51	120∠-35	0.099∠-20.3	?	?	?	?	2	51∠53	<i>R</i>
52	130∠40	?	2782∠26	?	?	?	3	36∠81	<i>C</i>
53	125∠10	?	?	106.5∠5.5	?	?	4	23∠64	<i>G</i>
54	160∠-12	?	?	?	160∠-12	?	5	51∠38	<i>R</i>
55	135∠18	?	?	?	?	4172∠-9.5	6	47∠-68	<i>L</i>
56	175∠14	0.041∠41.5	?	?	?	?	2	21∠-77	<i>R</i>
57	124∠-13	?	1042∠34	?	?	?	3	90∠-14	<i>C</i>
58	172∠24	?	?	176∠-82	?	?	4	80∠-35	<i>G</i>
59	110∠-30	?	?	?	0.12∠-124	?	5	70∠-35	<i>L</i>
60	115∠27	?	?	?	?	6141∠30	6	60∠20	<i>R</i>

Продолжение табл. 4.4

	$U_1, \text{В}$	$I_1, \text{А}$	$Z_{\text{H}}, \text{Ом}$	$U_2, \text{В}$	$I_2, \text{А}$	$Z_{\text{ВХ}}, \text{Ом}$	k	$U_k, \text{В}$	Параметр линии
61	120/-35	?	2824/25.2	?	?	?	2	55/-70	C
62	130/40	?	?	94.31/-13	?	?	3	90.9/10	G
63	125/10	?	?	?	0.035/78	?	4	43/-8	R
64	135/-15	?	?	?	?	1549/-40.8	5	34/20	L
65	115/27	0.019/63	?	?	?	?	6	51/53	R
66	175/14	?	5662/43	?	?	?	2	36/81	C
67	124/-13	?	?	63.8/-84	?	?	3	23/64	G
68	172/24	?	?	?	0.198/-73.6	?	4	51/38	L
69	110/-30	?	?	?	?	352.5/-8	5	47/-68	R
70	160/-12	0.035/22.5	?	?	?	?	6	21/-77	C
71	120/-35	?	?	85.6/-7.6	?	?	2	21/-77	G
72	130/40	?	?	?	0.049/-9.8	?	3	90/-14	R
73	125/10	?	?	?	?	5227/-14	4	80/-35	L
74	145/-38	0.068/4.2	?	?	?	?	5	70/-35	R
75	115/27	?	4174/11	?	?	?	6	60/20	C
76	175/14	?	?	148.5/4.6	?	?	2	55/-70	G
77	124/-13	?	?	?	0.073/-83	?	3	90.9/10	L
78	172/24	?	?	?	?	265.3/-15.5	4	43/-8	R

	U_1, B	I_1, A	$Z_H, Ом$	U_2, B	I_2, A	$Z_{BX}, Ом$	k	U_k, B	Параметр
79	100∠20	0.182∠0	?	?	?	?	5	34∠20	C
80	145∠23	?	916.7∠38	?	?	?	2	51∠53	G
81	120∠-35	?	?	?	0.05∠-68.3	?	3	36∠81	R
82	130∠40	?	?	?	?	1774∠-32	2	23∠64	L
83	145∠-37	0.18∠-15	?	?	?	?	3	51∠38	R
84	145∠-38	?	2539∠-3	?	?	?	4	21∠-77	C
85	115∠27	?	?	99.3∠29	?	?	5	90∠-14	G
86	175∠14	?	?	?	0.039∠29	?	6	80∠-35	L
87	124∠-13	?	?	?	?	688.5∠-2.4	2	70∠-35	R
88	138∠-135	0.224∠-170	?	?	?	?	3	60∠20	C
89	100∠20	?	775.7∠34	?	?	?	4	55∠-70	G
90	138∠-135	?	?	194.7∠138	?	?	5	90.9∠10	R
91	120∠-35	?	?	?	?	2146∠-33.7	6	43∠-8	L
92	140∠50	0.04∠15.8	?	?	?	?	2	34∠20	R
93	145∠-37	?	1651∠20.5	?	?	?	3	51∠53	C
94	145∠-38	?	?	113.8∠-49	?	?	4	36∠81	G
95	115∠27	?	?	?	0.026∠69	?	5	23∠64	L
96	175∠14	?	?	?	?	8871∠20.4	6	51∠38	R
97	145∠23	0.217∠11	?	?	?	?	2	60∠20	C
98	138∠-135	?	1000∠28	?	?	?	3	55∠-70	G
99	100∠20	?	?	97∠-88.2	?	?	4	90.9∠10	R
100	100∠20	?	?	?	0.109∠-74	?	5	43∠-8	L

4.2 Примеры решения задач

Пример выполнения контрольной работы № 3

Заданные параметры цепи (таблица 3.1):

Э.д.с. постоянного тока $E := 200$ В, индуктивность $L := 10 \cdot 10^{-3}$ Гн, емкость $C := 10 \cdot 10^{-6}$ Ф, сопротивления, Ом

$$R1 := 7\ \Omega \quad R2 := 2\ \Omega \quad R3 := 5\ \Omega \quad R4 := 10\ \Omega$$

Требуется определить изменение напряжения $u_{R3}(t)$

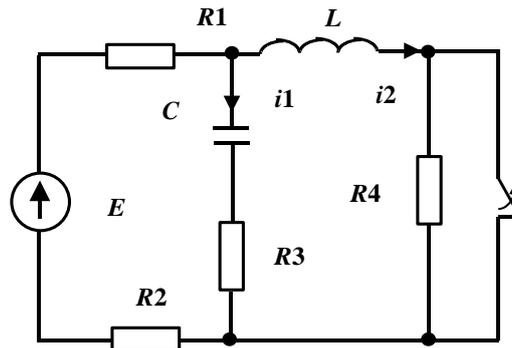


Рис.1

Расчет классическим методом

Объединим последовательные и параллельные сопротивления

$$R12 := R1 + R2 \quad R12 = 100$$

Выбираем положительные направления токов в соответствии с рис.3.7. Для послекоммутационной схемы составляем уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений

$$i1 + (iR1 + i2) = 0 \quad -R12 \cdot iR1 + u_C + i1 \cdot R3 = E \quad -iR1 \cdot R12 + \left(L \cdot \frac{di2}{dt} + R4 \cdot i2 \right) = E \quad (1)$$

При использовании классического метода токи и напряжения непосредственно после коммутации представляются в виде суммы принужденной и свободной составляющих

Определение начальных условий

- докоммутационные значения (ключ замкнут) напряжения на емкости и тока через индуктивность

$$U_{C0} := 0 \quad I_{L0} := \frac{E}{R1 + R2} \quad I_{20} := I_{L0} \quad I_{20} = 2 \quad (2)$$

в схеме ненулевые начальные значения.

В соответствии с первым и вторым законами коммутации значения (2) являются послекоммутационными (ключ разомкнут) независимыми начальными условиями

- находим принужденные значения токов и напряжений в установившемся режиме с учетом условий $U_L=0$ и $I_C=0$. В цепи постоянного тока принужденные значения не зависят от времени.

$$U_{Cnp} := \frac{E \cdot R4}{R12 + R4} \quad I_{1np} := 0 \quad I_{2np} := \frac{E}{R12 + R4} \quad I_{2np} = 1 \quad I_{R1np} := -I_{2np} \quad (3)$$

$$U_{Cnp} = 100$$

- находим значения свободных составляющих напряжения на емкости и тока через индуктивность непосредственно после коммутации

$$U_{c\epsilon 0} := U_{c0} - U_{cnp} \quad U_{c\epsilon 0} = -100 \quad I_{2c\epsilon 0} := I_{20} - I_{2np} \quad I_{2c\epsilon 0} = 1 \quad (4)$$

- определяем зависимые начальные значения токов ветвей непосредственно после коммутации по первому закону Кирхгофа

$$IR_{10} = -(I_{10} + I_{20})$$

по второму закону Кирхгофа

$$-R_{12} \cdot IR_{10} + U_{c0} + R_3 \cdot I_{10} = E$$

$$R_{12} \cdot (I_{10} + I_{20}) + U_{c0} + R_3 \cdot I_{10} = E \quad I_{10} := \frac{E - U_{c0} - R_{12} \cdot I_{20}}{R_{12} + R_3} \quad I_{10} = 0$$

$$IR_{10} := -(I_{10} + I_{20}) \quad IR_{10} = -2 \quad (5)$$

-находим значения свободных составляющих $i_{c\epsilon 0}$ (тока через емкость), $u_{L\epsilon 0}$ (напряжения на индуктивности) непосредственно после коммутации

$$IR_{1\epsilon 0} := IR_{10} - IR_{1np} \quad IR_{1\epsilon 0} = -1 \quad I_{1\epsilon 0} := I_{10} - I_{1np} \quad I_{1\epsilon 0} = 0$$

$$-R_{12} \cdot IR_{1\epsilon 0} + U_{L\epsilon 0} + R_4 \cdot I_{2\epsilon 0} = 0 \quad U_{L\epsilon 0} := R_{12} \cdot IR_{1\epsilon 0} - R_4 \cdot I_{2\epsilon 0} \quad U_{L\epsilon 0} = -200$$

значения производных свободных составляющих $U'_{c\epsilon 0}$, $I'_{L\epsilon 0}$

$$i_{c\epsilon} := C \cdot \frac{du_{c\epsilon}}{dt} \quad U'_{c\epsilon 0} := \frac{I_{1\epsilon 0}}{C} \quad U'_{c\epsilon 0} = 0$$

$$u_{L\epsilon} := L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad I'_{L\epsilon 0} := \frac{U_{L\epsilon 0}}{L} \quad I'_{L\epsilon 0} = -2 \times 10^4$$

Определение характеристического уравнения и его корней

$$Z(p) := R_{12} + \frac{1}{\frac{1}{R_3 + \frac{1}{p \cdot C}} + \frac{1}{p \cdot L + R_4}}$$

$$Z(p) := 50 \cdot \frac{3 \cdot p^2 + 42000p + 40000000}{p^2 + 15000p + 10000000}$$

Характеристическое уравнение второго порядка $x^2 + px + q := 0$ $P := \frac{42000}{3}$ $q := \frac{40000000}{3}$

-дискриминант и корни уравнения

$$D := \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - q} \quad p_1 := -\frac{P}{2} + D \quad p_2 := -\frac{P}{2} - D \quad (6)$$

$$D = 5.972 \times 10^3 \quad p_1 = -1.028 \times 10^3 \quad p_2 = -1.297 \times 10^4$$

Характеристическое уравнение имеет два действительных неравных отрицательных корня. Свободные составляющие находятся в виде суммы двух экспонент

$$U_{c\epsilon}(t) := A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}$$

Определение постоянных интегрирования

для определения постоянных A_1 , A_2 решим систему уравнений

начальные значения

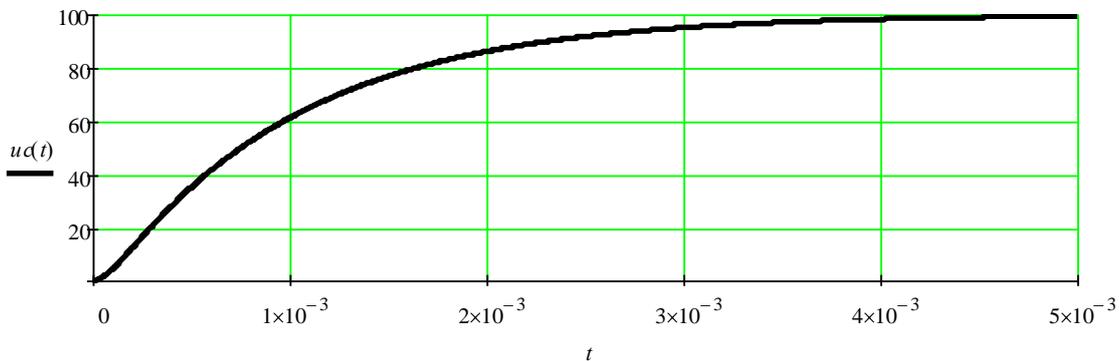
$$A_1 := 1 \quad A_2 := 1 \quad \text{Given}$$

$$A_1 + A_2 = U_{c\epsilon 0}$$

$$p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 = U'_{c\epsilon 0}$$

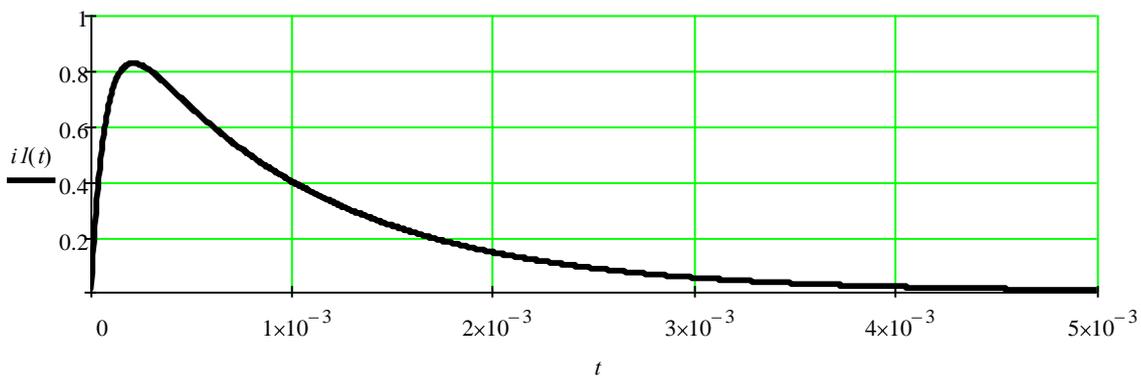
$$\text{Find}(A1, A2) = \begin{pmatrix} -108.605 \\ 8.605 \end{pmatrix} \quad \underline{A1} := -108.60 \quad \underline{A2} := 8.60 \quad (7)$$

$$uc(t) := U_{cnp} + A1 \cdot e^{p1 \cdot t} + A2 \cdot e^{p2 \cdot t} \quad U_{cnp} = 100$$



изменение тока $i1(t)$ (тока через емкость) $i1(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} uc(t) \right)$ (8)

$$\underline{i1(t)} := 1.116 \exp(-1027.8t) - 1.11 \exp(-12972.1t)$$



изменение напряжения $uR3(t)$

$$uR3(t) := R3 \cdot i1(t)$$

$$uR3(t) \rightarrow 55.8 e^{-1027.8 \cdot t} + -55.5 e^{-12972.1 \cdot t} \quad (9)$$

Расчет операторным методом

Составим операторную схему замещения с учетом внутренних э.д.с. при ненулевых начальных условиях

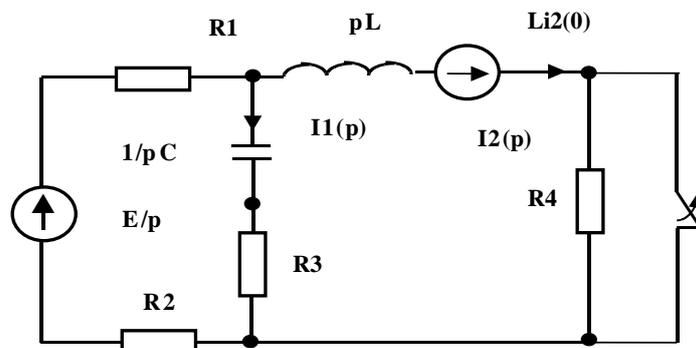


Рис. 2
96

Определение изображения функции времени iR3(p)

используем для расчета метод двух узлов

$$U_{ab}(p) := \frac{\left(\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R12}\right) - L \cdot I20 \cdot \frac{1}{p \cdot L + R4}}{\frac{1}{p \cdot L + R4} + \frac{1}{R3 + \frac{1}{p \cdot C}} + \frac{1}{R12}} \quad \underline{U_{ab}(p)} := \frac{2000000}{p} \cdot \frac{(p + 2000)}{42000p + 3 \cdot p^2 + 40000000} \quad (10)$$

$$\underline{II}(p) := \frac{U_{ab}(p)}{\left(R3 + \frac{1}{p \cdot C}\right)} \quad UR3(p) := R3 \cdot II(p)$$

$$\underline{II}(p) := \frac{40000}{42000p + 40000000 + 3 \cdot p^2} \quad \underline{UR3}(p) := \frac{40000R3}{42000p + 40000000 + 3 \cdot p^2} \quad (11)$$

Определение оригинала функции по теореме разложения

$$\underline{N}(p) := 40000 \cdot R3 \quad M(p) := 3 \cdot p^2 + 42000p + 40000000$$

уравнение M(p)=0 содержит квадратичное уравнение $x^2 + px + q := 0$

$$p := \frac{42000}{3} \quad q := \frac{40000000}{3}$$

-дискриминант и корни квадратичного уравнения

$$\underline{D} := \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \underline{p1} := -\frac{p}{2} + D \quad \underline{p2} := -\frac{p}{2} - D$$

$$D = 5.972 \times 10^3 \quad p1 = -1.028 \times 10^3 \quad p2 = -1.297 \times 10^4$$

Проверка: корни p1, p2 уравнения M(p)=0 совпадают с корнями характеристического уравнения по классическому методу

производная M'(p) $M'(p) := \frac{d}{dp} | 42000p + 3 \cdot p^2 + 40000000 |$

определение оригинала функции

$$\frac{N(p1)}{M'(p1)} = 55.815 \quad \frac{N(p2)}{M'(p2)} = -55.815$$

$$\underline{uR3}(t) := \frac{N(p1)}{M'(p1)} \cdot \exp(p1 \cdot t) + \frac{N(p2)}{M'(p2)} \cdot \exp(p2)$$

$$\underline{uR3}(t) := 55.815 \exp | -1.028 \times 10^3 \cdot t | - 55.815 \exp | -1.297 \times 10^4 \cdot t | \quad (12)$$

Решение операторным методом совпадает с решением классическим методом

Пример выполнения контрольной работы №4

Задача.

По заданным вариантам параметрам длинной линии на единицу длины R , (Ом/км), L , (Гн/км), C , (Ф/км), G , (См/км),

частоте f , (Гц), длине линии l , (км), комплексным значениям напряжения U_2 , (В)

и тока I_2 , (А) в конце линии, сопротивлении нагрузки Z_H , (Ом),

ТРЕБУЕТСЯ:

1. Рассчитать напряжение U_1 и ток I_1 в начале линии с потерями,

активные P и полные S мощности в начале и конце линии с потерями, а также к.п.д. той же длинной линии с потерями.

2. Полагая, что исследуемая линия стала линией без потерь, а нагрузка на конце линии стала активной и равной модулю комплексной нагрузки в п.1, определить напряжение U_1 и ток I_1 в начале линии без потерь,

а также длину электромагнитной волны.

3. Для линии без потерь п.2 построить график распределения действующего значения напряжения $U(y)$ вдоль линии без потерь в функции координаты

Решение

Исходные данные:

параметры длинной линии с потерями на единицу длины:

$$\underline{R} := 22.5 \quad \underline{C} := 10.22 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} \quad \underline{L} := 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \quad \underline{G} := 2.5 \cdot 10^{-6}$$

Вводим мнимую единицу:

$$j := \sqrt{-1}$$

циклическая частота:

$$f := 3300$$

угловая частота:

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \omega = 2.073 \times 10^4$$

длина линии

$$l := 45$$

комплекс напряжения в конце линии с потерями

$$U_2 := 7$$

комплексное сопротивление, включенное на конце линии с потерями:

модуль

$$Z_H := 209.4$$

аргумент в градусах

$$\psi z := -j \cdot 13.3$$

аргумент переводим в радианы

$$\psi z \cdot \frac{\pi}{180} \text{ (рад)}$$

$$Z_H := Z_H \cdot \exp\left(\psi z \cdot \frac{\pi \cdot j}{180}\right) \quad Z_H = 264.239$$

Рассчитаем волновое сопротивление Z_c линии с потерями

$$Z_c := \sqrt{\frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{G + j \cdot \omega \cdot C}}$$

$$Z_c = 458.011 - 113.377i$$

$$|Z_c| = 471.835$$

аргумент Z_c в градусах

$$\arg(Z_c) \cdot \frac{180}{\pi} = -13.904$$

Рассчитаем меру передачи (постоянную распространения) линии с потерями

$$\gamma := \sqrt{(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C)}$$

$$\gamma = 0.025 + 0.097i$$

Здесь действительная часть меры передачи - коэффициент затухания линии на единицу длины -

(Непер/км), мнимая часть меры передачи - коэффициент фазы линии на единицу длины - (рад/км),

Найдем коэффициент затухания и коэффициент фазы для всей линии

$$\Gamma := \gamma \cdot l$$

$$\Gamma = 1.133 + 4.355i$$

Выполним промежуточные вычисления

$$ch\Gamma := \frac{e^{\Gamma} + e^{-\Gamma}}{2} \quad ch\Gamma = -0.6 - 1.303i$$

$$sh\Gamma := \frac{e^{\Gamma} - e^{-\Gamma}}{2} \quad sh\Gamma = -0.487 - 1.605i$$

Найдем комплексное значение напряжения в начале линии с потерями

Предварительно выразим ток в конце линии как

$$I_2 := \frac{U_2}{Z_H} \quad I_2 = 0.026$$

$$U_1 := U_2 \cdot ch\Gamma + I_2 \cdot Z_c \cdot sh\Gamma \quad U_1 = -14.925 - 27.127i \quad |U_1| = 30.962$$

аргумент U_1 в градусах

$$\arg(U_1) \cdot \frac{180}{\pi} = -118.819$$

Найдем комплексное значение тока в начале линии с потерями

$$I_1 := I_2 \cdot ch\Gamma + \frac{U_2 \cdot sh\Gamma}{Z_c}$$

$$I_1 = -0.017 - 0.059i \quad |I_1| = 0.062$$

аргумент I_1 в градусах

$$\arg(I_1) \cdot \frac{180}{\pi} = -106.14$$

Находим комплексные полные мощности в начале S_1 и конце S_2 линии с потерями.

Предварительно находим сопряженные комплексы токов в начале $-I_1^*$ и конце $-I_2^*$ линии с потерями

$$\begin{aligned} I_1^* &:= \operatorname{Re}(I_1) - j \cdot \operatorname{Im}(I_1) & I_1^* &= -0.017 + 0.059i \\ I_2^* &:= \operatorname{Re}(I_2) - j \cdot \operatorname{Im}(I_2) & I_2^* &= 0.026 \\ S_1 &:= U_1 \cdot I_1^* & S_1 &= 1.867 - 0.42i \\ S_2 &:= U_2 \cdot I_2^* & S_2 &= 0.185 \end{aligned}$$

Значения полных мощностей S_1 и S_2 в (ВА):

$$\begin{aligned} |S_1| &= 1.913 \\ |S_2| &= 0.185 \end{aligned}$$

Значения активных мощностей P_1 и P_2 в (Вт):

$$\begin{aligned} P_1 &:= \operatorname{Re}(S_1) & P_1 &= 1.867 \\ P_2 &:= \operatorname{Re}(S_2) & P_2 &= 0.185 \end{aligned}$$

Коэффициент полезного действия линии с потерями:

$$\eta := \frac{P_2 \cdot 100}{P_1} \quad \eta = 9.934 \%$$

Линия без потерь:

$$\underline{R} := 0 \quad \underline{G} := 0 \quad R_H := |Z_H| \quad R_H = 264.239$$

Рассчитаем волновое сопротивление Z_{c1} линии без потерь

$$Z_{c1} := \sqrt{\frac{L}{C}} \quad Z_{c1} = 442.374$$

Рассчитаем меру передачи (постоянную распространения) линии без потерь на единицу длины; мера передачи совпадает с коэффициентом фазы 1:

$$\begin{aligned} \gamma l &:= \alpha l + j \cdot \beta l & \alpha l &:= 0 & \text{- потерь в линии нет} \\ & & \beta l &:= \gamma l \\ \beta l &:= \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} & \beta l &= 0.094 \end{aligned}$$

Коэффициентом фазы линии без потерь

$$B := \beta l \cdot l \quad B = 4.218$$

Выполним промежуточные вычисления

$$\begin{aligned} \cos(B) &= -0.474 \\ \sin(B) &= -0.88 \end{aligned}$$

Найдем комплексное значение напряжения в начале линии без потерь

Предварительно выразим ток в конце линии как

$$\begin{aligned} I_2 &:= U_2 \cdot R_H & I_2 &= 1.85 \times 10^3 \\ U_{11} &:= U_2 \cdot \cos(B) + j \cdot \sin(B) \cdot I_2 \cdot Z_{c1} & U_{11} &= -3.319 - 7.204i \times 10^5 \end{aligned}$$

$$|U_{11}| = 7.204 \times 10^5$$

аргумент U11 в градусах

$$\arg(U_{11}) \cdot \frac{180}{\pi} = -90$$

Найдем комплексное значение тока в начале линии без потерь

$$I_{11} := I_2 \cdot \cos(\beta l) + j \cdot \sin(\beta l) \cdot \frac{U_2}{Z_{c1}} \quad |I_{11}| = 877.022$$

аргумент I11 в градусах

$$\arg(I_{11}) \cdot \frac{180}{\pi} = -179.999$$

Длина электромагнитной волны линии без потерь в (км):

$$\lambda := 2 \cdot \frac{\pi}{\beta l} \quad \lambda = 67.026$$

Выражение для действующего значения напряжения вдоль линии без потерь в функции координаты y - длины линии

$$U(y) := |U_2| \cdot \sqrt{\cos^2(\beta l \cdot y) + m^2 \cdot \sin^2(\beta l \cdot y)}$$

Здесь m - коэффициент, учитывающий соотношение между волновым сопротивлением линии без потерь $-Z_{c1}$ и сопротивлением, включенным в конце этой линии $-R_H$:

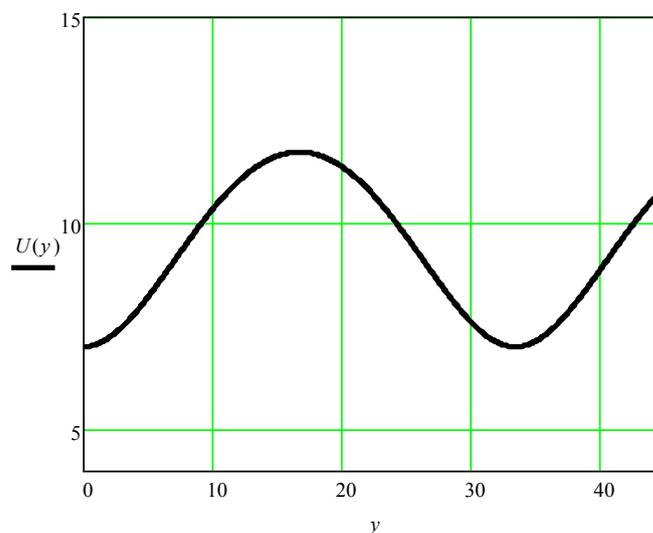
$$m := \frac{Z_{c1}}{R_H} \quad m = 1.674$$

y -координата линии без потерь, изменяющаяся от 0 в начале линии до $y=l$ в конце линии, (км)

Построим график распределения действующего значения напряжения вдоль линии без потерь в функции координаты y :

$$U_2 = 7 \quad \beta l = 0.094 \quad m = 1.674 \quad l = 45 \quad \lambda = 67.026$$

$$U(y) := U_2 \cdot \sqrt{\cos^2(\beta l \cdot y) + m^2 \cdot \sin^2(\beta l \cdot y)}$$



Длина рассматриваемой линии без потерь $l = 45$ км, что короче длины волны $\lambda = 67.026$ км, поэтому действующее значение напряжения $U(y)$ вдоль линии не проходит полный цикл.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. -10-е изд.- М.: Гардарики, 2002.
2. Теоретические основы электротехники: В 3-х т. Учебник для вузов. Том 2.- 4-е изд./К.С. Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В. Коровкин, В.П. Чечурин. – СПб.: Питер, 2006.
3. Основы теории цепей: Учеб. для вузов /Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. –5-е изд., перераб. –М.: Энергоатомиздат, 1989.
4. Теоретические основы электротехники: Методические указания и контрольные задания для студентов технических специальностей вузов/ Бессонов Л.А., Демидова И.Г., Заруди М.Е. и др.- 2-е изд. Перераб.- М.: Высш. шк., 2001.
5. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие/ Бессонов Л.А., Демидова И.Г., Заруди М.Е. и др.; Под ред. Бессонова Л.А. . –2-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1980.
6. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для вузов/ Под. ред. проф. П.А. Ионкина. –М.: Энергоиздат, 1982.

Дополнительная литература

1. Прянишников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах: Практическое пособие.- СПб.: КОРОНА принт.2003.
2. Алтунин Б.Ю., Петров Ю.Н., Панкова Н.Г. Решение задач по электротехнике в системе MATHCAD: учебное пособие. - Н. Новгород: ВГИПА, 2004.
3. Алтунин Б.Ю., Блинов И.В., Кралин А.А., Панкова Н.Г., Электротехнические расчеты в системе компьютерной математики MATLAB SIMULINK: учебное пособие. - Н. Новгород: НГТУ, 2004.
4. Алтунин Б.Ю., Панкова Н.Г. Расчет установившихся и переходных процессов в линейных цепях переменного тока / Методические указания к курсовой работе для студентов заочного факультета специальности 100400 – «Электроснабжение». - Н. Новгород: НГТУ, 2004.
5. Теоретические основы электротехники.Ч.2:Программа, метод. Указания и контрольные задания / НГТУ; Сост.: Б.Ю. Алтунин, Н.П. Чистякова и др. Н.Новгород, 2002.