Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Уравнения Лагранжа 2-го рода

*Методические указания к выполнению курсового задания
по дисциплине «Теоретическая механика»*

Под редакцией *В.В. Дубинина*

Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2015

УДК 531.314.2
ББК 22.213
У68

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/178/book1214.html

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Теоретическая механика»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н. Э. Баумана в качестве методических указаний*

Авторы:
В.В. Витушкин, *В.А. Калиниченко*,
Г.М. Максимов, *А.А. Панкратов*

Рецензент *А.В. Копаев*

У68 **Уравнения Лагранжа 2-го рода** : методические указания к выполнению курсового задания по дисциплине «Теоретическая механика» / В. В. Витушкин и др. ; под ред. В. В. Дубинина. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. — 36, [4] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4135-8

Приведены краткие сведения из теории уравнений Лагранжа 2-го рода, а также примеры выполнения задач для курсовой работы по этой теме и исходные данные вариантов. Методические указания разработаны в связи с введением новых учебных планов подготовки бакалавров и специалистов машиностроительных и приборостроительных специальностей.

Для студентов, изучающих раздел «Аналитическая механика» в двухсеместровых курсах дисциплины «Теоретическая механика».

УДК 531.314.2
ББК 22.213

ISBN 978-5-7038-4135-8

Предисловие

Курсовое задание для студентов, изучающих раздел «Аналитическая механика», заключается в обязательном применении уравнений Лагранжа 2-го рода при составлении дифференциальных уравнений движения механической системы с двумя степенями свободы. В каждом из 32 вариантов задания за основу принята механическая система ранее выполняемого студентами домашнего задания по разделу «Общие теоремы динамики» [1]. При этом во всех вариантах (на схемах механических систем) указываются предпочтительные обобщенные координаты.

Предполагается, что студенты имеют опыт самостоятельного решения задач по предшествующему разделу «Общие теоремы динамики» курса теоретической механики — определение работы сил и пар сил, оценка кинетической энергии механических систем, знакомы с возможными перемещениями механической системы. При выполнении курсового задания рекомендуется использовать учебники [2, 3] и методические пособия [4–10].

Данные методические указания содержат принимаемые допущения, краткое изложение теоретических основ курсовой работы, примеры ее выполнения, а также общие и индивидуальные условия задания.

Общие условия и допущения задания

Во всех вариантах задания, если нет особых указаний в их индивидуальном описании, следует пренебречь:

− массами деформируемых тел (нити, пружины);

− трением в контактах со скольжением (шарниры, поверхности тел, прямолинейные направляющие).

При этом принимаются следующие общие условия задания:

− ступени составных тел вращения (катка, блока и т. п.) соосны;

− распределение масс стержней и дисков однородно;

− центры масс тел вращения лежат на осях симметрии формы;

− r, R — малый и большой радиусы цилиндров составного тела вращения, ρ — радиус инерции относительно оси вращения тела;

– опорные плоскости плит и реек параллельны друг другу;

– углы α и β на рисунках задают наклоны стержней и пазов к вертикали и наклоны опорных плоскостей к плоскости горизонта, остальные плоскости считаются горизонтальными или вертикальными;

– нет скольжения в контактах тел вращения;

– нити параллельны соответствующим прямолинейным опорным направляющим или вертикальны, нерастяжимы и не проскальзывают по поверхностям тел вращения;

– силы растяжения (сжатия) линейно деформируемых пружин пропорциональны их деформациям, параллельны опорным направляющим или перпендикулярны поверхности воздействия;

– моменты пар сил спиральных пружин пропорциональны их угловым деформациям;

– векторы моментов пары сил, приложенных к телу, параллельны его оси вращения.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

С помощью уравнений Лагранжа 2-го рода можно получить дифференциальные уравнения в обобщенных координатах, описывающие движение механической системы с n степенями свободы, подчиненной идеальным и голономным связям. Уравнения Лагранжа 2-го рода используются для изучения движения любой механической системы с геометрическими связями (т. е. голономной) независимо от того, сколько тел (или точек) входит в систему, какое движение (поступательное, вращательное, плоское и т. д.) совершают эти тела и движутся ли они в инерциальной или в неинерциальной системе отсчета. Преимуществом изучаемых уравнений является также отсутствие в них наперед неизвестных реакций связей, в отличие от других методов составления уравнений. Требование голономности связей по существу является единственным принципиально важным условием возможности применять методику этих уравнений. Все сказанное позволяет сделать вывод об универсальности уравнений Лагранжа 2-го рода для весьма широкого класса задач механики и о предпочтительности их применения во многих случаях перед применением общих теорем динамики, особенно для систем с числом степеней свободы $n > 1$ (определяется числом независимых возможных перемещений механической системы).

Для нашего случая под обобщенными координатами понимаются независимые между собой параметры q_1 и q_2, которые позволяют однозначно определить положение механической системы по отношению к выбранной системе отсчета и число которых равно числу степеней свободы ($n = 2$).

Для решения задач динамики рассматриваемой системы необходимо найти обобщенные координаты $q_1(t), q_2(t)$ этой системы как функции времени с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$

где T — аналитическое выражение для кинетической энергии системы в зависимости от обобщенных скоростей и координат в ее абсолютном движении; q_i и $\dot{q}_i$ — i-е обобщенные координата и скорость; Q_i — обобщенная сила, соответствующая координате q_i.

Для системы тел, изображенной на кинематической схеме варианта задания, предлагается следующий порядок составления уравнений Лагранжа 2-го рода (1) с использованием двух заданных обобщенных координат q_1, q_2.

1. Для текущего (произвольного) момента времени и, соответственно, произвольного положения механической системы следует задать обобщенные скорости $\dot{q}_i$ и определить все необходимые для вычисления кинетической энергии скорости тел и точек системы. Для упрощения вывода аналитических выражений этих скоростей значения координат q_1, q_2 и обобщенных скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ принимают положительными.

2. Вычислить кинетическую энергию T элементов системы, масса которых учитывается в задаче. Выразить скорости элементов через обобщенные скорости и координаты.

3. Рассчитать обобщенные силы Q_i, соответствующие обобщенным координатам q_i. При этом вариации δq_i обобщенных координат для упрощения выводов принимают положительными, т. е. их направления соответствуют положительным направлениям отсчета обобщенных координат.

4. Полученные функции T и Q_i подставить в (1), предварительно вычислив производные, входящие в левые части уравнений.

5. Записать уравнения Лагранжа 2-го рода.

При выполнении задания кинетическую энергию системы находят как сумму кинетических энергий ее элементов (материальных точек и тел), при этом различая простое и сложное движение элементов, поступательное, вращательное и плоское движение твердых тел [1–3].

Кинетическая энергия тела в поступательном движении

$$T = \frac{MV^2}{2}, \qquad (2)$$

где M — масса тела; V — скорость любой точки тела.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}, \tag{3}$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения.

При плоском движении

$$T = \frac{M V_C^2}{2} + \frac{J_{Cz} \omega^2}{2}, \tag{4}$$

где V_C — скорость центра масс твердого тела; J_{Cz} — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Под обобщенными силами понимаются коэффициенты Q_i при соответствующих возможных перемещениях δq_i в выражении возможной работы активных сил, действующих на механическую систему

$$\sum_{k=1}^{N} [\delta A(\overline{F}_k)] = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i. \tag{5}$$

Рассмотрим способы вычисления обобщенных сил.

1. Обобщенную силу по координате q_i можно рассчитать, используя определение обобщенной силы

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{kx} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kx} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \tag{6}$$

поскольку $\overline{r}_k = x_k \overline{i} + y_k \overline{j} + z_k \overline{k}$, $\overline{F}_k = F_{kx} \overline{i} + F_{ky} \overline{j} + F_{kz} \overline{k}$.

2. Обобщенную силу Q_i по координате q_i можно вычислить для текущего положения системы, используя формулу (5) при последовательном изменении только одной обобщенной координаты q_i, т. е. $\delta q_i \neq 0$ и $\delta q_1 = \delta q_2 = ... = \delta q_{i-1} = \delta q_{i+1} = ... = \delta q_n = 0$. Это возможно, поскольку обобщенные координаты не зависят друг от друга. На каждом возможном перемещении получим

$$Q_i = \frac{\sum_{k=1}^{N} \left[\delta A(\overline{F}_k) \right]_{q_i}}{\delta q_i} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \left[\overline{F}_k \delta \overline{r}_k) \right]_{q_i}}{\delta q_i}. \tag{7}$$

В числителе (7) стоит выражение для элементарной работы активных сил и реакций неидеальных связей на возможных перемещениях $\delta\overline{r}_k$ точек их приложения в текущем положении системы. Как отмечено выше, обычно принимают $\delta q_i > 0$.

Напомним, что возможным перемещением $\delta\vec{r}_k$ точки называется мыслимое бесконечно малое перемещение точки, допускаемое в данный момент времени наложенными на нее связями.

3. Для потенциальных сил обобщенная сила может быть вычислена также по следующей формуле:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \tag{8}$$

где П — потенциальная энергия механической системы как функция обобщенных координат, $\Pi = \Pi(q_1, q_2, ..., q_n)$.

Пример 1. Вычислим обобщенные силы тремя способами на примере двойного математического маятника, движущегося в вертикальной плоскости xOy и состоящего из двух невесомых стержней ($OM_1 = l_1$; $M_1M_2 = l_2$), на концах которых закреплены грузы M_1 и M_2 массой m_1 и m_2, соответственно (рис. 1).

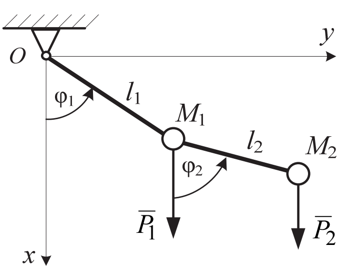

Рис. 1. Схема двойного маятника

Рассматриваемая механическая система обладает двумя степенями свободы (n = 2). За обобщенные координаты принимаем углы φ_1 и φ_2.

1. Используем сначала формулу (6). Найдем проекции сил тяжести $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ на оси системы координат Oxy, а также координаты точек приложения этих сил M_1 и M_2 (см. рис. 1):

$$P_{1x} = m_1 g; P_{1y} = 0; P_{2x} = m_2 g; P_{2y} = 0;$$

$$x_1 = l_1 \cos\varphi_1;\ y_1 = l_1 \sin\varphi_1;$$

$$x_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2; \quad y_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2.$$

Записывая формулу (6) в виде

$$Q_i = P_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial\varphi_i} + P_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial\varphi_i} + P_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial\varphi_i} + P_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial\varphi_i} \quad (i = 1, 2),$$

получим

$$Q_1 = -m_1 g l_1 \sin\varphi_1 - m_2 g l_1 \sin\varphi_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1;$$

$$Q_2 = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2.$$

2. Воспользуемся формулой (7). Зададим системе возможное перемещение $\delta\varphi_1$ так, чтобы угол φ_2 не изменялся (рис. 2, *а*).

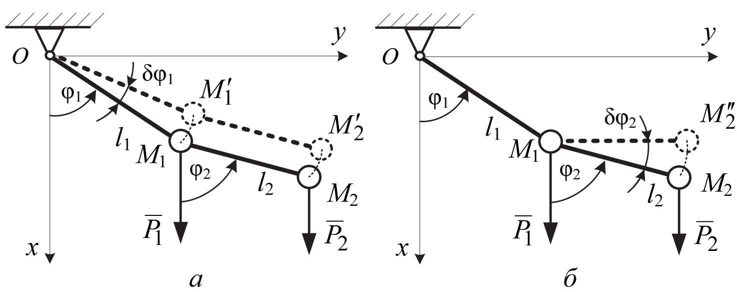

Рис. 2. Схемы возможных перемещений:
а — $\delta\varphi_1 > 0$, $\delta\varphi_2 = 0$; *б* — $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 > 0$

Тогда $\delta\varphi_2 = 0$, $M_1 M_1' = M_2 M_2'$. Соответствующая возможная работа сил тяжести на возможном перемещении $\delta\varphi_1$ определяется как

$$\delta A_{\varphi_1} = P_{1x}\delta x_1 + P_{2x}\delta x_2,$$

где $\delta x_1 = \delta x_2 = -l_1 \sin\varphi_1\, \delta\varphi_1$.

Тогда обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате φ_1, равна

$$Q_1 = \frac{\delta A_{\varphi_1}}{\delta\varphi_1} = -(m_1 + m_2)gl_1 \sin\varphi_1.$$

Сообщим теперь системе возможное перемещение $\delta\varphi_2$ при фиксированном значении φ_1 $(\delta\varphi_1 = 0)$ (рис. 2, *б*). В этом случае возможную работу совершает только сила $\overline{P}_2$. Находим

$$\delta A_{\varphi_2} = P_{2x}\delta x_2 = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2 \delta\varphi_2, \text{ так как } \delta x_2 = -l_2 \sin\varphi_2\, \delta\varphi_2.$$

Следовательно, $Q_2 = \dfrac{\delta A_{\varphi_2}}{\delta\varphi_2} = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2$.

3. Учитывая, что активные силы, действующие на механическую систему, являются потенциальными, воспользуемся формулой (8). Для этого определяем потенциальную энергию системы как работу сил тяжести $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ при перемещении системы из текущего положения в вертикальное, совпадающее с осью Ox (рис. 3).

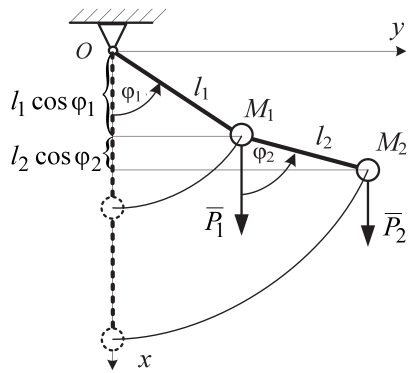

Рис. 3. Определение потенциальной энергии системы

Получим

$$\Pi = \Pi(\varphi_1, \varphi_2) = m_1 g l_1 (1 - \cos\varphi_1) + m_2 g[l_1(1 - \cos\varphi_1) + l_2(1 - \cos\varphi_2)].$$

Тогда на основании формулы (8) имеем

$$Q_1 = -\frac{\delta\Pi}{\delta\varphi_1} = -(m_1 + m_2)gl_1 \sin\varphi_1, \quad Q_2 = -\frac{\delta\Pi}{\delta\varphi_2} = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2.$$

Пример 2 [1]. Однородный цилиндр *1* массой m_1 и радиусом r катится без скольжения по плите *2* массой m_2 под действием пары сил с моментом L. Плита *2*, к которой прикреплена пружина *3* жесткостью c, скользит по гладкой горизонтальной плоскости *4* (рис. 4). Составить дифференциальные уравнения движения системы.

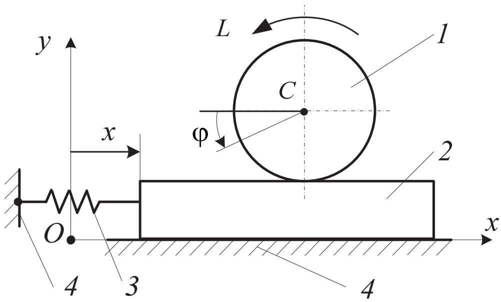

Рис. 4. Схема механической системы по примеру 2:
1 — однородный цилиндр; *2* — плита; *3* — пружина; *4* — гладкая поверхность неподвижного тела

Решение. Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. При выбранных обобщенных координатах φ и x движение этой системы в соответствии с (1) описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \text{ и } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x . \tag{9}$$

Кинетическая энергия T системы складывается из кинетических энергий цилиндра и плиты:

$$T = T_1 + T_2 .$$

Кинетическая энергия T_1 катка при его плоском движении относительно абсолютной системы Oxy согласно (4) имеет вид

$$T_1 = \frac{m_1 V_C{}^2 + J_{Cz}\,\omega_1{}^2}{2} = \frac{m_1}{2}(\dot{x} - r\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 r^2}{2}\dot{\varphi}^2 .$$

Плита совершает поступательное движение, ее кинетическая энергия равна (2):

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{x}^2}{2}.$$

Кинетическую энергию системы приведем к виду

$$T = \frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - 2m_1 r\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{m_1 r^2}{2}\dot{\varphi}^2 \right].$$

Обобщенные силы вычислим с помощью формулы (7). Сначала сообщаем системе из ее произвольного положения такое возможное перемещение, при котором $\delta\varphi > 0, \delta x = 0$ (рис. 5).

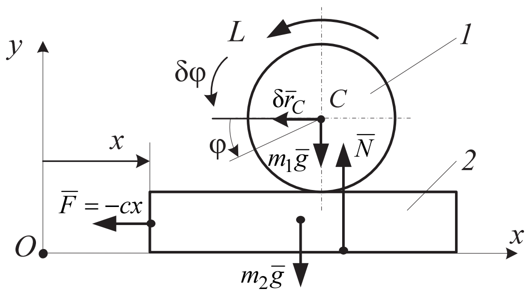

Рис. 5. Возможное перемещение точек системы при $\delta\varphi > 0$, $\delta x = 0$:
1 — однородный цилиндр; *2* — плита

Так как связи, наложенные на систему, идеальные, то сумма возможных работ на этом перемещении:

$$\sum_{k=1}^{N} [\delta A(\overline{F}_k)]_\varphi = L\delta\varphi.$$

Откуда, согласно (7),

$$Q_\varphi = \frac{\sum_{k=1}^{N} [\delta A(\overline{F}_k)]_\varphi}{\delta\varphi} = L.$$

Далее сообщаем системе такое возможное перемещение из ее произвольного положения, при котором $\delta x > 0$, $\delta\varphi = 0$ (рис. 6).

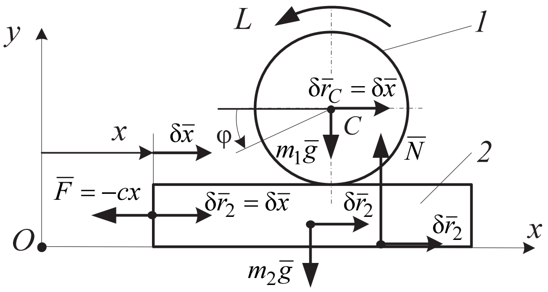

Рис. 6. Возможное перемещение точек системы при $\delta x > 0$, $\delta\varphi = 0$:
1 — однородный цилиндр; *2* — плита

Вычисляем сумму работ сил на этом возможном перемещении и соответствующую обобщенную силу

$$Q_x = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left[\delta A(\bar{F}_k)\right]_x}{\delta x} = \frac{-cx\delta x}{\delta x} = -cx.$$

Дифференциальные уравнения движения механической системы

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 r^2}{2}\ddot{\varphi} - m_1 r\ddot{x} = L; \\ (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_1 r\ddot{\varphi} = -cx \end{cases}$$

получим после подстановки T, Q_φ и Q_x в (9).

ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Домашнее задание содержит 32 варианта задач.

Вариант 1. Груз *1* массой $m_1 = m$ прикреплен к нерастяжимой нити, переброшенной через блок *2* массой m_2 и намотанной на барабан *3* радиусом r катка *4*, который катится по горизонтальным направляющим со скольжением (рис. 7). Радиус катка $R = 3r$, общая масса барабана и катка $M = 5m$, их центр масс C лежит на оси катка, а радиус инерции относительно оси катка $\rho = 2r$. Коэффициент трения скольжения между катком и направляющими — f, коэффициент трения качения — δ. К центру катка приложена постоянная сила $\overline{F}$. Блок считать однородным цилиндром, трением на оси B блока пренебречь. Принять, что при заданных значениях физических параметров системы сила трения скольжения направлена в положительном направлении оси x.

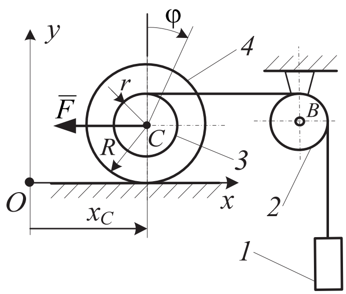

Рис. 7. Схема к задаче 1:
1 — груз; *2* — блок; *3* — барабан; *4* — каток

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x_C$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 2. Груз *1* массой m_1 прикреплен к нерастяжимой нити, переброшенной через блок *2* массой m_2 и намотанной на барабан *3* катка *4*, который может катиться со скольжением по наклонным направляющим, образующим угол α с горизонтом (рис. 8). Барабан с радиусом R жестко связан с катком с радиусом $r = R/3$, их общая масса равна M, центр масс C барабана и катка лежит на оси катка, их общий радиус инерции относительно оси катка $\rho = 2r$. Коэффициент трения скольжения между катком и наклонными направляющими f. К катку через вторую нерастяжимую нить приложена постоянная сила $\overline{F}$. Блок считать однородным цилиндром, трением на оси B блока и трением качения пренебречь. Принять, что при заданных значениях физических параметров системы сила трения скольжения направлена в положительном направлении оси x.

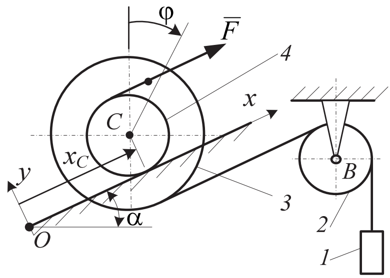

Рис. 8. Схема к задаче 2:
1 — груз; *2* — блок; *3* — барабан; *4* — каток

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x_C$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 3. Груз *1* массой $m_1 = m$, опускаясь, с помощью нерастяжимой нити приводит во вращение ступенчатый барабан *3* $(r, R = 2r$ — радиусы ступеней *2* и *3* соответственно); радиус инерции барабана относительно его оси вращения — ρ, $m_3 = m$ — его масса (рис. 9). На большей ступени барабана имеется зубчатое колесо, которое находится в зацеплении с шестерней-барабаном *4* с радиусом r и массой $m_4 = m / 2$. На барабан *4* намотана нерастяжимая нить, прикрепленная к центру катка *5* массой $M = 4m$ и с радиусом $R = 2r$, катящегося со скольжением по горизонтальной направляющей. К катку приложена пара сил с моментом L. Коэффициент трения скольжения катка о горизонтальную направляющую равен f. Шестерню-барабан и каток считать однородными цилиндрами. Трением качения, трением в опорах B и D ступенчатого барабана *3* и шестерни-барабана пренебречь. Принять, что при заданных значениях физических параметров системы сила трения скольжения направлена в положительном направлении оси x.

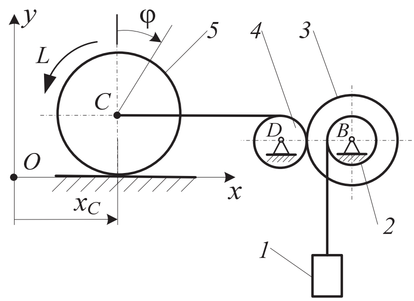

Рис. 9. Схема к задаче 3:
1 — груз; *2*, *3* — ступенчатый барабан; *4* — шестерня-барабан; *5* — каток

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x_C$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 4. Груз *1* массой m_1, опускаясь, посредством нерастяжимой нити, переброшенной через блок *2* массой m_2 и намотанной на каток *3* массой m, приводит каток в движение (рис. 10). К центру *C* катка приложена внешняя постоянная по величине горизонтальная сила $\bar{F}$. Каток катится без скольжения по плите *4* массой *M*. Плита движется по гладкой плоскости, ось *B* блока неподвижно закреплена на плите. Каток и блок считать однородными цилиндрами. Стенки колодца в плите, в который опускается груз, гладкие. Трением качения и трением на оси *B* блока пренебречь.

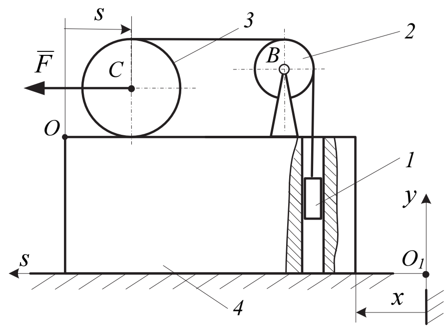

Рис. 10. Схема к задаче 4:
1 — груз; *2* — блок; *3* — каток; *4* — плита

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = s$ и $q_2 = x$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 5. Зубчатое колесо *1* жестко связано с рейкой *2*, движущейся поступательно в неподвижных гладких направляющих *A* и *B* (рис. 11). Совместная масса зубчатого колеса и рейки равна *M*. Шестерня *3* массой *m* с радиусом *r* обкатывает зубчатое колесо *1* и связана с последним шарнирно с помощью водила *4* длиной *l*. Рейка соединена с неподвижным основанием через пружину *5* с коэффициентом жесткости *c*. В начальном положении ($x = 0$) пружина не напряжена. Массой водила пренебречь, шестерню считать однородным цилиндром.

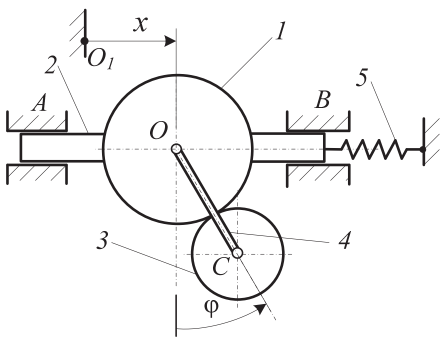

Рис. 11. Схема к задаче 5:
1 — зубчатое колесо; *2* — рейка; *3* — шестерня; *4* — водило; *5* — пружина

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 6. Груз *1* массой m_1 закреплен на нерастяжимой нити, переброшенной через блок *2* массой m_2, прикрепленной к центру *C* катка *3*, и может двигаться по гладкой наклонной грани призмы *4* с углом α к горизонту (рис. 12). Каток массой m_3 перемещается без скольжения по верхней горизонтальной грани призмы массой *M*, которая находится на гладкой горизонтальной плоскости. На каток намотана нерастяжимая нить, к которой приложена постоянная внешняя сила $\bar{F}$. Каток и блок считать однородными цилиндрами. Трением качения и трением в опоре B блока пренебречь.

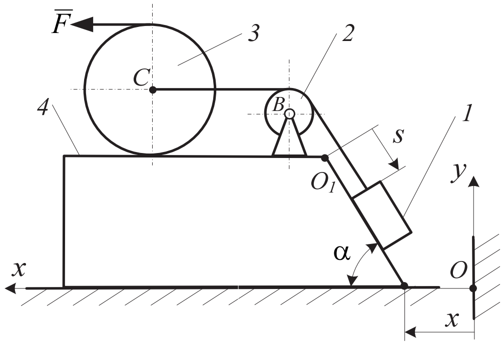

Рис. 12. Схема к задаче 6:
1 — груз; *2* — блок; *3* — каток; *4* — призма

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = s$ и $q_2 = x$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 7. Механическая система состоит из ступенчатого зубчатого колеса *1* массой M и с радиусами ступеней r и R (рис. 13). Радиус инерции колеса относительно оси Cz, перпендикулярной плоскости чертежа, — ρ. Колесо находится в зацеплении с неподвижной зубчатой рейкой *2* и подвижной зубчатой рейкой *3* массой m_3. Рейка *3* движется поступательно в гладких опорах D и E параллельно рейке *2*. К центру зубчатого колеса шарнирно прикреплен маятник *4* и приложена постоянная сила $\bar{F}$. Масса точки A равна m, длина $AC = l$, массой стержня AC пренебречь. Проскальзывание в зацеплениях отсутствует, трением качения и трением в шарнире C пренебречь.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

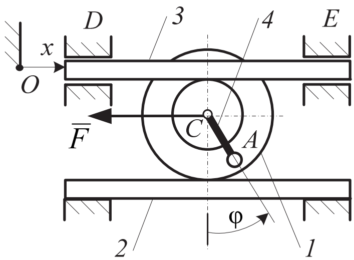

Рис. 13. Схема к задаче 7:
1 — ступенчатое зубчатое колесо; *2* — неподвижная зубчатая рейка; *3* — подвижная зубчатая рейка; *4* — маятник

Вариант 8. На однородной пластине *1* массой M жестко закреплена гладкая трубка *2* длиной l, которая образует угол α с осью Az (рис. 14). Пластина установлена на вертикальном валу AB. Внутри трубки движется шарик *3* массой m. К шарику приложена постоянная по величине сила $\overline{F}$, направленная вдоль трубки, а к валу — пара сил с постоянным моментом L. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен $J = 2ml^2$. Трением в опорах A и B пренебречь.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = s$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

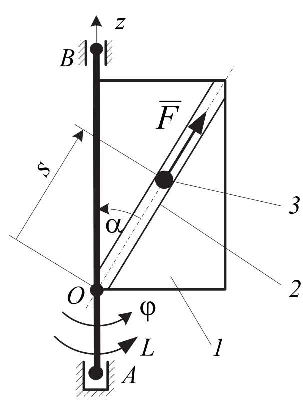

Рис. 14. Схема к задаче 8:
1 — однородная пластина; *2* — гладкая трубка; *3* — шарик

Вариант 9. На гладкой плоскости расположен механизм, состоящий из плиты *1* массой M, на которой находится устройство, состоящее из однородного катка *2* массой m_2 и двух стержней *3* и *4* длиной l каждый (рис. 15). Звенья *2*, *3*, *4* соединены между собой, с катком и с плитой шарнирами A, B и O. Масса стержня *4* равна m_4. Каток перемещается по плите без скольжения, и к нему приложена пара сил с моментом $L = L(t)$. Трением качения пренебречь.

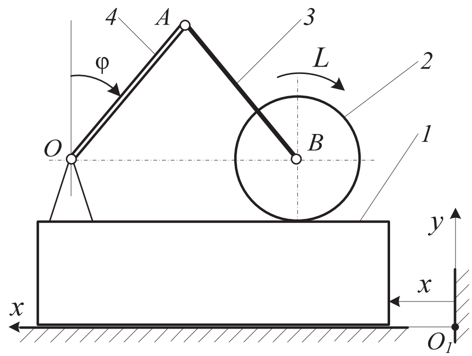

Рис. 15. Схема к задаче 9:
1 — плита; *2* — однородный каток; *3*, *4* — стержни

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 10. В механизме клин *1* массой M с углом α при вершине расположен на гладкой поверхности *2* и соединен тягой *3* с центром C однородного катка *4* массой m_4, который может перемещаться со скольжением по шероховатой поверхности *5* (рис. 16). Каток и клин приводятся в движение посредством постоянной силы $\overline{F}$, приложенной к центру катка, при этом клин перемещает толкатель *6* массой m_6, который прижимается к гладкой поверхности клина пружиной *7* с коэффициентом жесткости c. На толкателе закреплена зубчатая рейка, находящаяся в зацеплении с шестерней *8* радиусом r_8, момент инерции которой относительно ее оси вращения равен J_8. В зацеплении с шестерней *8* находится шестерня *9* с двумя зубчатыми венцами, радиусы которых равны r_9, R_9. Момент инерции шестерни *9* относительно ее оси вращения равен J_9. Шестерня *9* приводит в движение затвор водослива *10* массой m_{10}. Коэффициент трения скольжения катка по поверхности *5* равен f, трением качения и трением в опорах пренебречь. Считать, что в начальном положении клина (при $x = 0$) пружина *7* не деформирована.

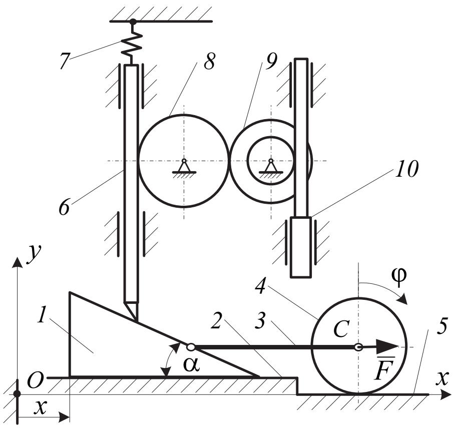

Рис. 16. Схема к задаче 10:
1 — клин; *2* — гладкая поверхность; *3* — тяга; *4* — каток; *5* — шероховатая поверхность; *6* — толкатель; *7* — пружина; *8* — шестерня; *9* — шестерня с двумя зубчатыми венцами; *10* — водослив

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 11. На плите *1* массой *M*, которая может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\overline{F}$, укреплен шарнирно маятник *2* (рис. 17). К маятнику приложена пара сил с моментом *L*. Масса маятника сосредоточена в точке *A* и равна *m*, его длина *OA* равна *l*. Маятник связан с плитой посредством спиральной пружины *3* с коэффициентом жесткости *c*, соединенной одним концом с маятником, а

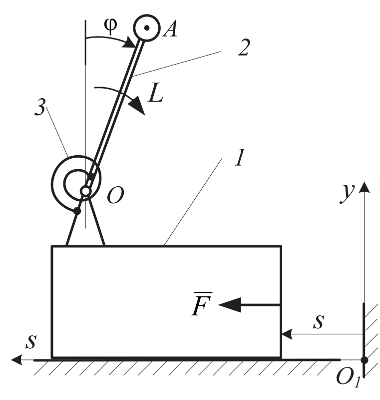

Рис. 17. Схема к задаче 11:
1 — плита; *2* — маятник; *3* — пружина

другим — с плитой. При вертикальном положении маятника пружина не деформирована.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = s$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 12. К шестерне *1* радиусом r_1, имеющей неподвижную ось вращения O_1z, приложена пара сил с постоянным моментом L_1 (рис. 18). Шестерня *1* находится в зацеплении с шестерней *2* радиусом r_2, которая, в свою очередь, находится в зацеплении с рейкой *3* тележки *4*. Тележка движется по прямолинейным направляющим на четырех колесах: двух ведущих *5* и двух ведомых *6*. Масса тележки — M, масса каждого колеса — m, моменты инерции шестерен *1* и *2* относительно их осей вращения равны J_1 и J_2 соответственно. Все колеса являются однородными дисками. Колеса *5* катятся со скольжением, а колеса *6* — без скольжения. К шестерне *2* приложен момент сил сопротивления L_2, пропорциональный угловой скорости шестерни *2* ($L_2 = -\alpha\omega_2, \quad \alpha = \text{const} > 0$). К каждому из двух ведущих колес *5* приложена пара сил с постоянным моментом L. Трением качения колес и трением на осях вращения пренебречь.

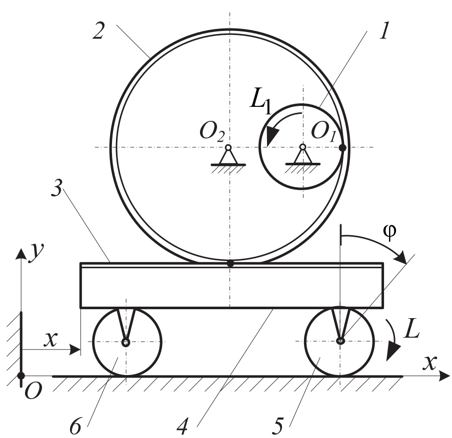

Рис. 18. Схема к задаче 12:
1, *2* — шестерни; *3* — рейка; *4* — тележка;
5 — два ведущих колеса тележки; *6* — два ведомых колеса тележки

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = s$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 13. Однородный цилиндрический каток *1* массой m перемещается без скольжения по плите *2* массой $M = 3m$ (рис. 19). Плита движется по горизонтальной гладкой плоскости под действием постоянной силы $\overline{F}$. Центр C катка связан пружиной *3* с коэффициентом жесткости c, параллельной указанной плоскости, с вертикальной стойкой *4*, жестко скрепленной с плитой. К катку приложена пара сил с постоянным моментом L. При $s = 0$ пружина не деформирована.

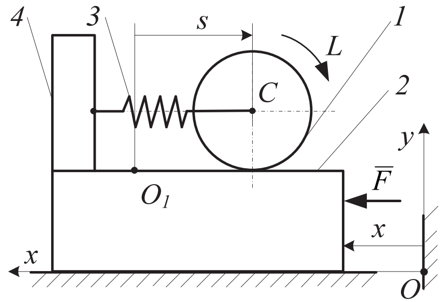

Рис. 19. Схема к задаче 13:
1 — однородный цилиндрический каток; *2* — плита; *3* — пружина; *4* — вертикальная стойка

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = s$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 14. В механической системе рейка *1* массой m движется в горизонтальных гладких направляющих A и B под действием постоянной силы $\overline{F}$ (рис. 20). Рейка находится в зацеплении с шестерней *2* радиусом R, с которой жестко связан барабан *3* радиусом r. Радиус инерции шестерни и барабана относительно их оси вращения равен ρ, m_2 — их общая масса. К центру C однородного катка *4* массой M прикреплена нерастяжимая нить, которая наматывается на барабан. Каток перемещается со скольжением по неподвижной наклонной плоскости с углом наклона β. К шестерне приложена пара сил с моментом $L_{Oz} = -\alpha\omega_2$ ($\alpha = \mathrm{const} > 0$, ω_2 — угловая скорость вращения шестерни с барабаном). Массой нити и трением качения пренебречь.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = s$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

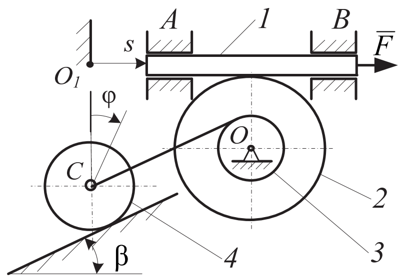

Рис. 20. Схема к задаче 14:
1 — рейка; *2* — шестерня; *3* — барабан;
4 — каток

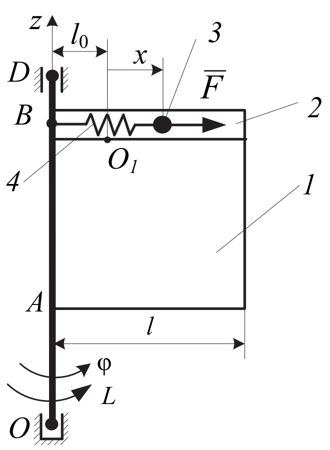

Рис. 21. Схема к задаче 15:
1 — однородная прямоугольная пластина; *2* — гладкая трубка; *3* — шарик; *4* — пружина

Вариант 15. Однородная прямоугольная пластина *1* массой M со стороной a закреплена своей стороной AB на валу OD, который может вращаться вокруг оси Oz (рис. 21). На верхней стороне пластины жестко закреплена гладкая трубка *2*, внутри которой движется шарик *3* массой m под действием постоянной силы $\overline{F}$. Момент инерции трубки относительно оси Oz равен J_z. К шарику прикреплена пружина *4* с коэффициентом жесткости c, свободная длина которой (без деформации) равна l_0. К оси Oz приложена пара сил с постоянным моментом L. Шарик начинает двигаться из положения, когда пружина была не деформирована. Трением в опорах O и D пренебречь.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = x$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 16. Подвижный параллелограмм *1* шарнирно прикреплен к ползунам *2* и *3* одинаковой массы $M = 1{,}5m$ (рис. 22). Ползуны могут перемещаться по гладкой горизонтальной плоскости. Массы стержней AB, BE и AK одинаковы и равны m, масса стержня KE $m_1 = 2m$, длины стержней одинаковы и равны $2l$. Стержень AK спиральными пружинами *4* и *5* одинаковой жесткости c соединен со стержнями AB и KE (момент упругих сил каждой из пружин $L_{пр} = -c\lambda$, λ — угловая деформация). Пружины не деформированы при вертикальном нижнем расположении стержней AK и BE. В шарнирах A и B действуют пары сил сопротивления с моментами $L/2$.

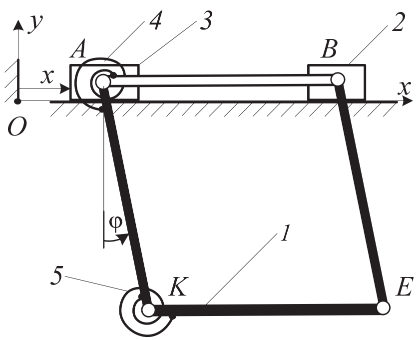

Рис. 22. Схема к задаче 16:
1 — подвижный параллелограмм; *2*, *3* — ползуны; *4*, *5* — спиральные пружины

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 17. Однородная пластина *1* со стороной a и массой M симметрично закреплена на валу *2*, который может вращаться

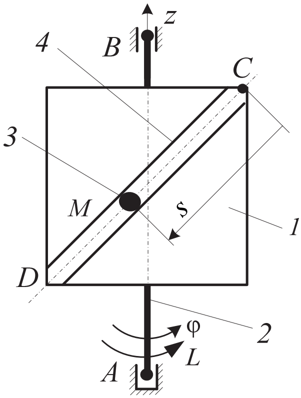

Рис. 23. Схема к задаче 17:
1 — однородная пластина; *2* — вал; *3* — шарик; *4* — упругая нить (пружина)

вокруг оси Az под действием пары сил с постоянным моментом L (рис. 23). По диагонали CD пластины расположен гладкий паз, по которому перемещается шарик *3* массой m. При этом на точку действует сила сопротивления $R = -\mu\left|\overline{v}_r\right|\overline{v}_r, (R = \mu v_r^2)$, где μ = const — коэффициент сопротивления, $\overline{v}_r = \dot{\overline{s}}$ — скорость точки относительно пластины. Трением в опорах A и B пренебречь.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = s$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 18. Рейки *1* и *2* массой m_1 и m_2, соответственно, находятся в зацеплении с колесом *3* и движутся в горизонтальных гладких направляющих AB и DE (рис. 24). Колесо массой M и с радиусом r приводится в движение парой сил с моментом L. Кроме того, рейка *1* соединена с неподвижным основанием посредством пружины *4* с коэффициентом жесткости c. В начальный момент времени пружина не деформирована.

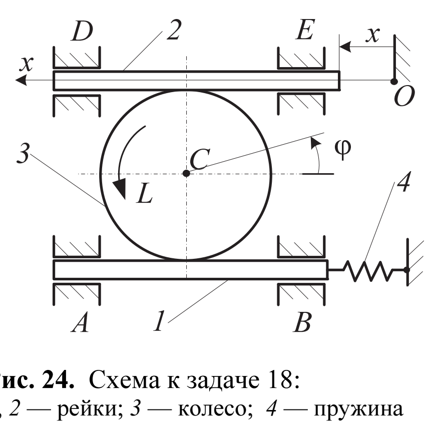

Рис. 24. Схема к задаче 18:
1, *2* — рейки; *3* — колесо; *4* — пружина

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 19. Гладкая трубка *1* массой M свернута в кольцо радиусом R и жестко с эксцентриситетом e закреплена на вертикальном валу AB, который может вращаться вокруг оси Az под действием пары сил с постоянным моментом L (рис. 25). Внутри трубки под действием силы $\overline{F}$, направленной по касательной к трубке, движется шарик *2* массой m. Массу трубки считать равномерно распределенной по окружности радиусом R. Трением в опорах A и B пренебречь.

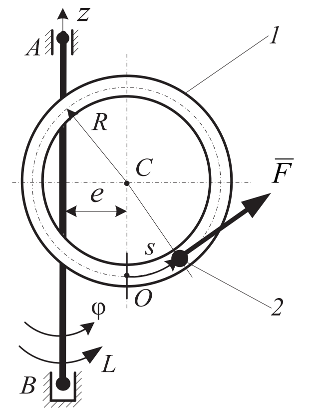

Рис. 25. Схема к задаче 19: *1* — гладкая трубка; *2* — шарик

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = s$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 20. Механическая система состоит из ползуна *1*, который может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости, стержней *2*, *3* и материальной точки *4* массой m (рис. 26). Стержень *2*, который движется в гладких направляющих, и стержень *3* связаны между собой шарнирно и скреплены спиральной пружиной *5* с коэффициентом жесткости c_5 (момент упругих сил пружины $L_{oz} = -c_5\varphi$, φ — угловая деформация пружины). Ползун соединен с неподвижным телом посредством пружины *6* с коэффициентом жесткости c_6, которая в состоянии покоя системы не деформирована. К стержню *3* приложена пара сил с постоянным моментом L. Общая масса ползуна *1* и стержня *2* равна M. Массой стержня *3* длиной l, а также трением в опорах D и E пренебречь.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

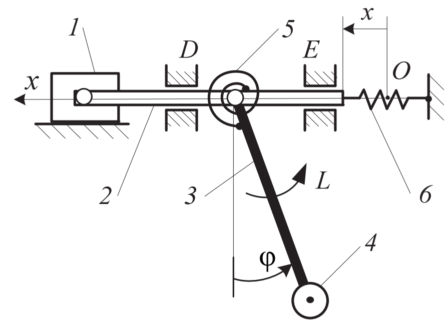

Рис. 26. Схема к задаче 20:
1 — ползун; *2*, *3* — стержни; *4* — материальная точка; *5* — спиральная пружина; *6* — пружина

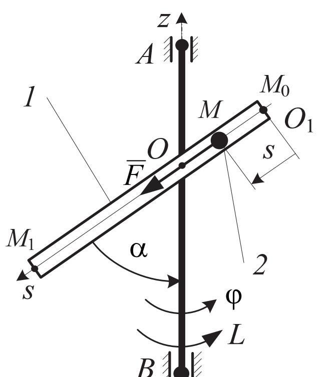

Рис. 27. Схема к задаче 21:
1 — гладкая трубка; *2* — шарик

Вариант 21. Гладкая трубка *1* жестко скреплена с валом *AB* под углом α и может вращаться вместе с ним вокруг вертикальной оси *Bz* (рис. 27). Внутри трубки под действием постоянной силы $\overline{F}$, направленной вдоль нее, движется шарик *2* массой *m*. Момент инерции трубки относительно ее оси вращения равен *J*, $L = 3l$ — ее длина, причем $OM_1 = 2l$. К валу приложена пара сил с постоянным моментом *L*.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = s$ и пренебрегая трением в опорах *A* и *B*, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 22. В брусе *1* массой *M* имеется цилиндрическая выемка радиусом *R*, внутри этой выемки может катиться без скольжения однородный круглый цилиндр *2* массой *m* и с радиусом *r* (рис. 28). Оси выемки и цилиндра параллельны. Брус находится на горизонтальной гладкой плоскости и соединен с неподвижным телом посредством пружины *3* с коэффициентом жесткости c. К цилиндру приложен постоянный момент сил сопротивления L.

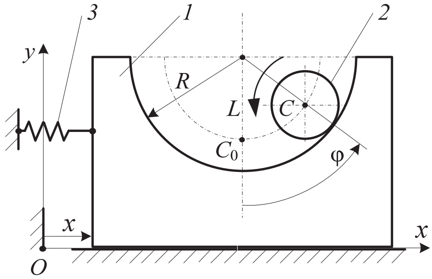

Рис. 28. Схема к задаче 22:
1 — брус; *2* — однородный круглый цилиндр; *3* — пружина

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 23. Контейнер *1* массой M может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 29). На горизонтальной оси Oz внутри контейнера закреплен физический маятник *2* массой m. При этом контейнер соединен с неподвижным телом пружиной *3* с коэффициентом жесткости c. Момент инерции маятника относительно оси вращения Oz равен J, расстояние от этой оси до центра масс маятника $OC = h$. В положении контейнера при $x = 0$ пружина не деформирована. К маятнику приложена пара сил, препятствующая его вращению, с постоянным моментом L.

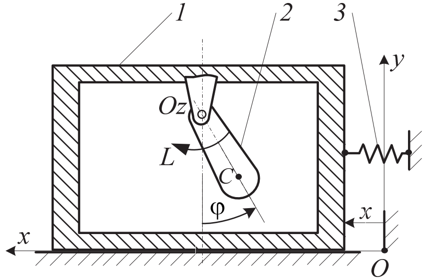

Рис. 29. Схема к задаче 23:
1 — контейнер; *2* — физический маятник;
3 — пружина

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 24. На однородной прямоугольной пластине *1* массой M жестко прикреплена гладкая трубка *2*, изогнутая по дуге окружности радиусом R (рис. 30). Пластина закреплена на вертикальном валу CD, к которому приложена пара сил с постоянным моментом L. По трубке движется шарик *3* массой m. Момент инерции трубки относительно оси вращения Cz равен J. Трением в опорах C и D вала пренебречь.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = \alpha$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

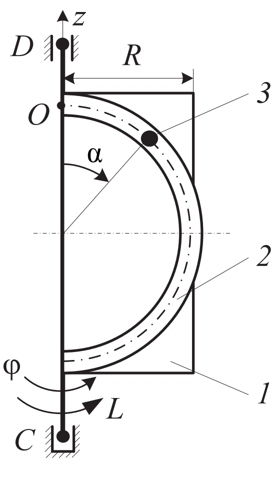

Рис. 30. Схема к задаче 24:
1 — однородная прямоугольная пластина; *2* — гладкая трубка; *3* — шарик

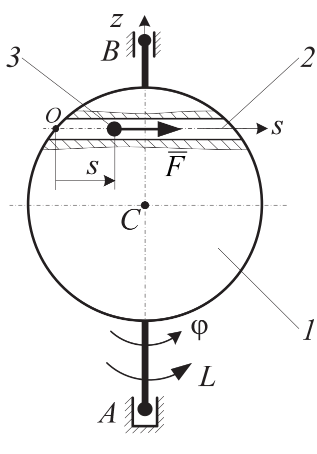

Рис. 31. Схема к задаче 25:
1 — однородный диск; *2* — гладкий канал; *3* — шарик

Вариант 25. Однородный диск *1* массой M и радиусом R по своей оси симметрии неподвижно закреплен на вертикальном валу AB, который может вращаться вокруг оси Az под действием пары сил с постоянным моментом L (рис. 31). По гладкому каналу *2*, расположенному на расстоянии $R/2$ от центра C диска перпендикулярно оси его вращения, под действием постоянной силы $\bar{F}$, направленной вдоль канала, движется шарик *3* массой m. Трением в опорах A и B и изъятой массой материала канала пренебречь.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = s$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 26. Призма *1* массой M может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 32). К призме приложена постоянная внешняя сила $\bar{F}$. По грани призмы, наклоненной к горизонту под углом α, катится без скольжения однородный цилиндр *2* массой m и с радиусом r. Цилиндр в точке C скреплен со стойкой на призме пружиной *3* жесткости c, параллельной наклонной грани призмы. Статическая (в состоянии покоя системы) деформация пружины равна δ.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = s$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

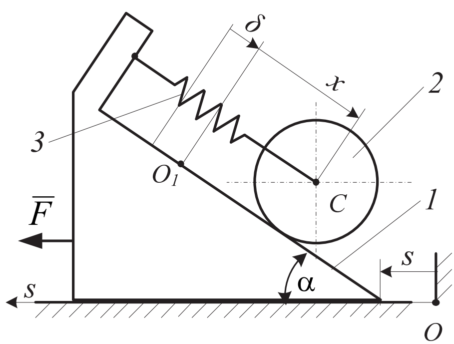

Рис. 32. Схема к задаче 26:
1 — призма; *2* — однородный цилиндр; *3* — пружина

Вариант 27. Гладкая трубка *1* длиной L закреплена на вертикальном валу DE с помощью стержня *2* длиной l, перпендикулярного оси Dz вращения вала, и нерастяжимой нитью AC (рис. 33). Трубка связана со стержнем посредством цилиндрического шарнира O. Общий момент инерции трубки и стержня относительно

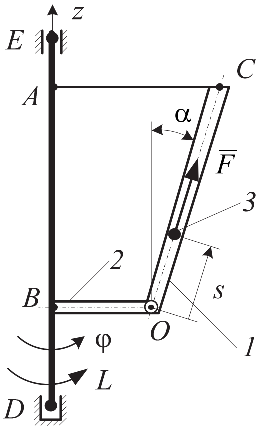

Рис. 33. Схема к задаче 27:
1 — гладкая трубка; *2* — стержень; *3* — шарик

оси вращения Dz равен J_z. Вал приводится во вращение с помощью постоянного по величине момента M. Внутри трубки движется шарик *3* массой m под действием постоянной силы $\overline{F}$, направленной вдоль трубки. Трубка отклонена от вертикали на угол α. Трением в опорах D и E пренебречь.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = s$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 28. На гладкой плоскости находится массивная плита *1* массой M, в которой имеется наклоненный под углом α к горизонту прямолинейный паз *2* (рис. 34). К плите приложена горизонтальная сила $\overline{F}$. По пазу *2* катится без скольжения однородный диск *3* массой m и радиусом r. При этом центр C диска соединен с точкой O_1 плиты пружиной *4* с коэффициентом жесткости c. Статическая (в состоянии покоя системы) деформация пружины равна δ.

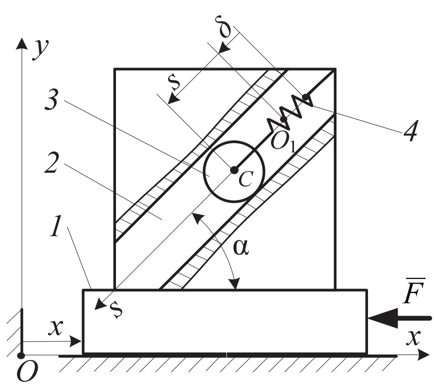

Рис. 34. Схема к задаче 28:
1 — массивная плита; *2* — прямолинейный паз; *3* — однородный диск; *4* — пружина

Приняв за обобщенные координаты $q_1=x$ и $q_2=s$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 29. Плита *1* со стойкой *2* общей массой $M = 16m$ может совершать движение по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 35). На плите помещен эллипсограф, состоящий из кривошипа *3*, линейки *4* и ползунов *A* и *B*. Массы кривошипа и линейки эллипсографа равны, соответственно, $m_3 = m$, $m_4 = 2m$. В шарнире *C* между кривошипом и линейкой установлена спиральная пружина *5* с коэффициентом жесткости *c*. К плите приложена постоянная сила $\overline{F}$, а к кривошипу — пара сил с постоянным моментом *L*. В крайнем нижнем положении кривошипа (при $\varphi = 0$) пружина не деформирована. Кривошип и линейку считать однородными стержнями, массами ползунов *A* и *B* и трением в сочленениях системы пренебречь.

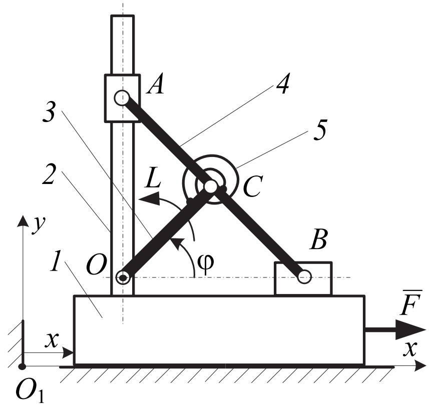

Рис. 35. Схема к задаче 29:
1 — плита; *2* — стойка; *3* — кривошип; *4* — линейка; *5* — спиральная пружина

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 30. Шарик *1* массой m_1, двигаясь по гладкому пазу *2* с углом наклона α к горизонту, приводит в движение по гладкой горизонтальной плоскости тело *3* массой m_3, внутри которого находятся паз *2* и шарик *1* (рис. 36). Тело с помощью стержня *4* шарнирно соединено с центром катка *5*. Каток — однородный круглый цилиндр массой m_5 и с радиусом r — перемещается по горизонтальной плоскости без скольжения. Шарик посредством пружины *6* с коэффициентом жесткости c соединен в точке O с телом. Статическая (в состоянии покоя системы) деформация пружины равна δ. Массой стержня и трением качения пренебречь.

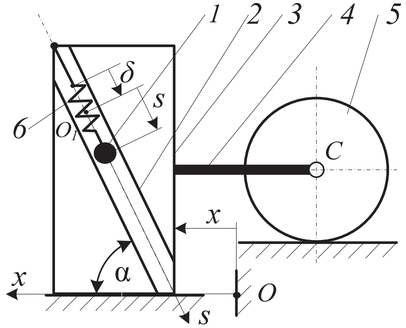

Рис. 36. Схема к задаче 30:
1 — шарик; *2* — гладкий паз; *3* — тело; *4* — стержень; *5* — каток; *6* — пружина

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = x$ и $q_2 = s$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Вариант 31. В дифференциальном механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, шестерня *1* радиусом R и массой M вращается вокруг своей оси и находится в зацеплении с шестерней *2* массой m и радиусом r (рис. 37). Шестерня *2* приводится в движение с помощью водила *3*, угол поворота которого в плоскости движения равен ψ. Шестерня *1* связана с неподвижным основанием спиральной пружиной *4*, коэффициент жесткости которой равен c (момент упругих сил пружины $L_{Bz} = -c\varphi$, где φ — ее угловая деформация, равная углу поворота шестерни *1*). К водилу приложена пара сил с постоянным моментом относительно оси Bz, равным L. Шестерни *1* и *2* считать однородными дисками. Трением в механизме и массой водила пренебречь.

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = \psi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

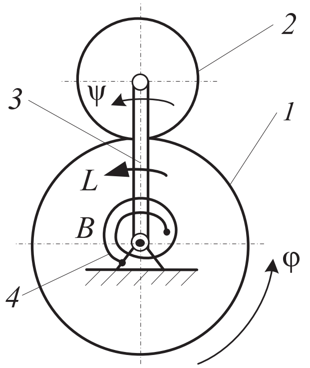

Рис. 37. Схема к задаче 31:
1, *2* — шестерни; *3* — водило; *4* — спиральная пружина

Вариант 32. Зубчатая рейка *1* массой m движется в гладких направляющих под действием постоянной горизонтальной силы $\overline{F}$ (рис. 38). Рейка находится в зацеплении с шестерней *2* радиусом R. С шестерней жестко связан барабан *3* радиусом r. На барабан намотана нерастяжимая нить, прикрепленная к центру C однородного катка *4* массой M и радиусом r_4, который перемещается со скольжением по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения равен f. Момент инерции системы «шестерня — барабан» относительно оси O_3 вращения равен J_{Oz}. К катку приложена пара сил с постоянным моментом L, а к барабану приложена пара сил сопротивления с моментом $L_{Oz} = -\alpha\omega$, где ω — угловая скорость барабана ($\alpha = \mathrm{const} > 0$). Трением качения и трением в опоре O пренебречь.

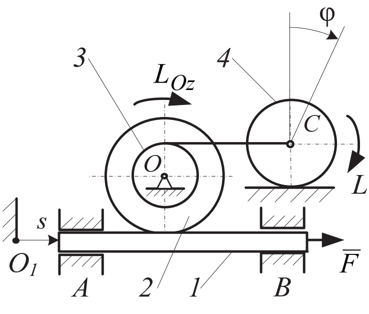

Рис. 38. Схема к задаче 32:
1 — зубчатая рейка; *2* — шестерня; *3* — барабан; *4* — однородный каток

Приняв за обобщенные координаты $q_1 = s$ и $q_2 = \varphi$, составить дифференциальные уравнения движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Литература

1. *Дубинин В.В., Никитин Н.Н., Феоктистова О.П.* Общие теоремы динамики: метод. указания по выполнению курсовой работы по разделу курса теоретической механики. М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1986. 42 с.

2. *Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М.* и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов / под ред. К.С. Колесникова. 4-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 758 с.

3. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. Т. 2: Динамика. М.: Наука, 1985. 496 с.

4. *Темнов А.Н., Лямин В.И.* Аналитическая механика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. 40 с.

5. *Дронг В.И., Максимов Г.М., Огурцов А.И., Степанчук Ю.М., Назаренко Б.П.* Уравнения Лагранжа II рода: метод. указания по выполнению домашних заданий по курсу «Теоретическая механика». М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1981.

6. *Дронг В.И., Максимов Г.М, Огурцов А.И.* Уравнения Лагранжа II рода: метод. указания к курсовой работе по динамике. М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1985. 32 с.

7. *Бондаренко Н.И., Гатауллина Г.И., Дронг В.И., Максимов Г.М., Огурцов А.И.* Уравнения Лагранжа II рода: метод. указания по выполнению курсовой работы и решению задач. М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1988.

8. *Максимов Г.М., Русанов П.Г.* Избранные принципы аналитической механики. Уравнения Лагранжа 2-го рода: учеб. пособие по теоретической механике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 61 с.

9. *Витушкин В.В., Максимов Г.М., Русанов П.Г.* Избранные принципы аналитической механики. Уравнения Лагранжа второго рода: метод. указания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 53 с.

10. *Витушкин В.В., Максимов Г.М.* Избранные принципы аналитической механики. Уравнения Лагранжа второго рода: метод. указания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 69 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Витушкин Вячеслав Валентинович
Калиниченко Владимир Анатольевич
Максимов Григорий Максимович
Панкратов Александр Алексеевич

Уравнения Лагранжа 2-го рода

Редактор *Е.Д. Нефедова*
Художник *А.С. Ключева*
Корректор *Г.И. Эрли*
Компьютерная верстка *С.А. Серебряковой*

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Подписано в печать 21.06.2015. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 2,5. Тираж 300 экз. Изд. № 007-2015. Заказ .

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com