

МИНИСТЕРСТВА СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ –  
МСХА ИМ. К.А. ТИМИРЯЗЕВА

Н.Ж. Шкаруба

# **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ**

Москва  
Издательство РГАУ-МСХА  
2016

УДК  
ББК  
Ш-662

**Шкаруба Н.Ж. Теоретическая метрология: Учебное пособие /**  
Н.Ж. Шкаруба. М.: Изд-во РГАУ-МСХА, 2016. – 147 с.

Учебное пособие состоит из восьми разделов, которые включают теоретические вопросы метрологии и метрологического обеспечения производства. В учебное пособие включены примеры решения основных задач по обработке результатов измерений, к каждой задаче предлагается 100 вариантов заданий для выполнения самостоятельной работы.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся в высших учебных заведениях по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» и может быть использовано для студентов, обучающихся по направлениям 27.03.01 «Стандартизация и метрология» и 27.03.02 «Управление качеством».

Рекомендовано к изданию методической комиссией факультета «Процессы и машины в агробизнесе» РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, протокол № 10 от 25 июня 2016 г.

**Рецензенты:** доктор технических наук, проф. А.Г. Пастухов; кандидат технических наук, проф. А.А. Тихонов.

ISBN 000-0-0000-0000-0

© Шкаруба Н.Ж. 2016  
© ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА  
имени К.А. Тимирязева, 2016  
© Издательство РГАУ-МСХА, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ЕДИНИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН SI .....	6
2. ОКРУГЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ .....	13
3. ПАРАМЕТРЫ И ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ .....	16
4. ВЫБОР СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ .....	44
5. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ .....	55
7. ОБРАБОТКА КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.....	98
8. КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ.....	109
ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	134
ПРИЛОЖЕНИЕ Б .....	141
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	145

## ВВЕДЕНИЕ

Вся история человеческой цивилизации – это история становления и развития измерительной культуры, это процесс непрерывного совершенствования методов и средств измерения и систем обеспечения единства измерений на основе повышения их необходимой точности, единообразия мер, постоянного укрепления положения служб образцовых измерений как необходимого базиса не только экономики, но и государственной власти.

Оценка роли метрологии как науки об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности в научно-техническом прогрессе современного общества раскрывает широкую панораму ее возможностей и проблем.

Измерения являются одним из основных способов познания природы, ее явлений и законов. Каждому новому открытию в области естественных и технических наук предшествует большое число различных измерений. Возможности ученого исследовать, анализировать, контролировать и использовать явления природы полностью зависят от имеющихся в его распоряжении средств и методов измерений.

Измерения служат как получению научных знаний, так и получению информации в общем смысле. Если в исследовательском процессе путем измерений могут обнаруживаться совершенно новые физические и математические зависимости, то, например, измерение характеристик продукции и технологических процессов дают измерительную информацию, необходимую для управления этими процессами, качеством продукции, обеспечения надежности процессов и организации производства.

Обширная область работ в области измерений свидетельствует об их значительной роли в науке и технике, в жизни современного общества. По состоянию и возможности измерительной службы и ее метрологического обеспечения можно судить об общем уровне развития общества. Однако весь тот огромный массив измерительной информации, который мы получаем в ре-

зультате измерений, будет общественно значимым и полезным только при обязательном условии обеспечения их единства и требуемой точности независимо от места, времени и условий, в которых они проведены.

Обеспечение единства измерений является одной из важнейших задач метрологии. Прогресс в развитии средств измерительной техники в последние годы был обеспечен в результате бурного развития теории измерений и разработки на ее основе новых методов измерения, широкого применения в конструкциях средств измерений последних достижений микроэлектроники, автоматизации, вычислительной техники, а также успешного решения ряда технологических задач.

Накопление новых научных знаний и опыта в области измерений величин, определения зависимостей и генерирования сигналов с заданными характеристиками приводят к тому, что современная метрология становится наукой не только об измерении величин, но и об определении зависимостей. Современная метрология, развиваясь, использует сложные эмпирические методы познания, а также различные методы других наук.

Данное учебное пособие разработано с учетом требований ФГОС ВО 35.03.06 «Агроинженерия». Изучение курса «Метрология, стандартизация и сертификация» направлено на формирование компетенции:

- способность проводить и оценивать результаты измерений (ОПК-6);
- способность к обработке результатов экспериментальных исследований (ПК-3).

Пособие содержит обширный материал для практических занятий, способствующий усвоению студентами умений и навыков теоретического курса «Метрология, стандартизация и сертификация».

# 1. ЕДИНИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН SI

## Теоретические сведения.

**Общие положения.** В 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла единую Международную систему единиц SI (начальные буквы французского наименования *Système International d'Unités*), в русской транскрипции – СИ. Она дала определение основных единиц этой системы и предписала употребление некоторых производных единиц, «не предпрещая вопроса о других, которые могут быть добавлены в будущем». В настоящее время она принята в качестве законной системы единиц измерения большинством стран мира. Международная система единиц (СИ) представляет собой согласованную систему, в которой для любой физической величины, такой, как длина, время или сила, предусматривается одна и только одна единица измерения.

В Государственной системе обеспечения единства измерений РФ применение международной системы СИ определено межгосударственным стандартом ГОСТ 8.417–2002 «ГСИ. Единицы величин» [1].

**Основные единицы.** Основными единицами Международной системы единиц являются (табл.1.1.):

Единица длины – метр (м) – длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени  $1/299\,792\,458$  с;

Единица массы – килограмм (кг) – единица массы, равная массе международного прототипа килограмма;

Единица времени – секунда (с) – время, равное  $9\,192\,631\,770$  периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133;

Единица силы электрического тока – ампер (А) – сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, распо-

ложенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н;

Единица термодинамической температуры – кельвин (К) – единица термодинамической температуры, равная  $1/273,16$  части термодинамической температуры тройной точки воды;

Единица силы свет – кандела (кд) – сила света в заданном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет  $1/683$  Вт/ср;

Единица количества вещества – моль (моль) – количество вещества системы, содержащей столько же молекул (атомов, частиц), сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.

Таблица 1.1.

Основные единицы международной системы СИ

Наименование величины	Размерность	Единицы		
		Наименование	Обозначение	
			международное	русское
Основные единицы				
Длина	L	метр	m	м
Масса	M	килограмм	kg	кг
Время	T	секунда	s	с
Сила электрического поля	I	ампер	A	А
Термодинамическая температура	$\theta$	кельвин	K	К
Количество вещества	N	моль	mol	моль
Сила света	J	кандела	cd	кд

**Производные единицы.** Зависимости между единицами измерений, проявляющиеся в физических законах, позволяют получать производные единицы системы. Математическое выражение, отображающее связь физической величины с основными величинами системы, в котором коэффициент пропорциональности принят равным единице, называется *размерностью* (*dimension*) физической величины. Размерности основных физических величин обозначают прописными буквами, например размерности длины, времени, массы, температуры записываются как  $\dim(l) = L$ ;  $\dim(t) = T$ ;  $\dim(m) = M$ .

Размерности производных физических величин определяются произведением размерностей основных величин, взятых в степенях, соответствующих степеням в уравнениях между величинами в физике.

*Пример.* Скорость определяется как отношение  $v = l/t$ . Размерность скорости имеет вид  $\dim(v) = \dim(l) / \dim(t) = LT^{-1}$ .

**Кратные и дольные единицы.** Различают кратные и дольные единицы ФВ. Кратная единица – это единица ФВ, в целое число раз превышающая системную или внесистемную единицу. Например, единица длины километр равна  $10^3$  м, т.е. кратна метру.

Дольная единица – единица ФВ, значение которой в целое число раз меньше системной или внесистемной единицы. Например, единица длины миллиметр равна  $10^{-3}$  м, т.е. является дольной. Приставки для образования кратных и дольных единиц приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2.

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение		Множитель	Приставка	Обозначение	
		русское	международное			русское	международное
$10^{24}$	иотта	И	Y	$10^{-1}$	деци	д	d
$10^{21}$	зетта	З	Z	$10^{-2}$	санتي	с	c
$10^{18}$	экса	Э	E	$10^{-3}$	милли	м	m
$10^{15}$	пета	П	P	$10^{-6}$	микро	мк	μ
$10^{12}$	тера	Т	T	$10^{-9}$	нано	н	n
$10^9$	гига	Г	G	$10^{-12}$	пико	п	p
$10^6$	мега	М	M	$10^{-15}$	фермто	ф	f
$10^3$	кило	к	k	$10^{-18}$	атто	а	a
$10^2$	гекто	г	h	$10^{-21}$	зепто	з	z
$10^1$	дека	да	da	$10^{-24}$	иокто	и	y

*Примечание.* Наименование кратных и дольных единиц получается прибавлением приставок к наименованиям основных или производных единиц, например микрометр и т.п. Приставки пишутся слитно с основным наименованием. Использование двух приставок не допускается.

**Внесистемные единицы.** Единицы ФВ делятся на системные и внесистемные. Системная единица – единица ФВ, входящая в одну из принятых сис-



тем. Все основные, производные, кратные и дольные единицы являются системными. Внесистемная единица – это единица ФВ, не входящая ни в одну из принятых систем единиц.

Внесистемные единицы по отношению к единицам СИ разделяют на четыре вида:

- допускаемые наравне с единицами СИ (например: единица массы – тонна; плоского угла – градус, минута, секунда; объема – литр и др.);
- допускаемые к применению в специальных областях (например: астрономическая единица, парсек, световой год – единицы длины в астрономии; диоптрия – единица оптической силы в оптике; электрон-вольт – единица энергии в физике, морская миля – в морской навигации; карат – единица массы в ювелирном деле и т.д.);
- временно допускаемые к применению наравне с единицами СИ (например: бар, миллиметр ртутного столба – единица давления, килограмм-сила – единица силы и др.) Эти единицы должны изыматься из употребления в соответствии с международными соглашениями;
- изъятые из употребления (например: лошадиная сила – единица мощности; сажень, аршин, верста – единицы длины и некоторые другие).

### ***Правила написания и обозначений единиц.***

*Правило 1.* Для написания значений величин следует применять обозначения единиц буквами или специальными знаками (...°, ...', ..."). Установлены два вида буквенных обозначений:

- международные с использованием букв латинского или греческого алфавита;
- русские с использованием букв русского алфавита.

*Правило 2.* Буквенные обозначения единиц печатаются прямым шрифтом. В обозначениях единиц точку как знак сокращения не ставят. Единицы, образованные от собственных имен, обозначаются начальной заглавной буквой: А, В, Ом, Гц и т.д.

*Правило 3.* Обозначения единиц следует применять после числовых значений физических величин и помещать в строку с ними без переноса на следующую строку.

*Правило 4.* Между последней цифрой числа и обозначением единицы следует оставлять пробел, равный минимальному расстоянию между словами, который устанавливают для каждого типа и размера шрифта согласно ГОСТ 2.304 – 81 «ЕСКД. Шрифты чертежные».

*Правильно:*

100 kW; 100 кВт;

*Неправильно:*

100kW; 100кВт;

Исключения составляют обозначения в виде знака, поднятого над строкой, перед которыми пробела не оставляют.

*Правильно:*

20°

*Неправильно:*

20 °.

*Правило 5.* При наличии десятичной дроби в числовом значении величины обозначение единицы следует помещать после всех цифр.

*Правильно:*

423,06 т; 423,06 м;

*Неправильно:*

423 т, 0,6; 423 м, 06;

*Правило 6.* При указании значений величин с предельными отклонениями следует заключать числовые значения с предельными отклонениями в скобки и обозначения единицы помещать после скобок или проставлять обозначения единиц после числового значения величины и после ее предельного отклонения.

*Правильно:*

(100,0 ± 0,1) кг;

50 г ± 1 г;

*Неправильно:*

100,0 ± 0,1 кг;

50 ± 1 г.

*Правило 7.* Допускается применять обозначения единиц в пояснениях обозначений величин к формулам. Помещение обозначений единиц в одной строке с формулами, выражающими зависимости между величинами или между их числовыми значениями, представленными в буквенной форме, не допускается.

*Правильно:*

$$v = 3,6 \frac{l}{t},$$

где  $v$  – скорость, км/ч;

$s$  – путь, м;

$t$  – время, с.

*Неправильно:*

$$v = 3,6 \frac{l}{t} = 3,6 \frac{6}{2} = 10,8 \text{ км/ч},$$

где  $s$  – путь, м;

$t$  – время, с.

$$v = 3,6 \frac{6}{2} = 10,8 \text{ км/ч}.$$

**Правило 8.** При указании производной единицы, состоящей из двух и более единиц, не допускается комбинировать буквенные обозначения и наименования единиц, т.е. для одних единиц указывать обозначения, а для других – наименования.

*Правильно:*

80 км/ч;

80 километров в час.

*Неправильно:*

80 км в час.

80 км/час

### **Задание для самостоятельной работы.**

Используя данные таблиц 1.3, 1.4 требуется:

- записать кратное или дольное обозначение единиц, используя обозначение приставок (таб.1.2),
- выразить производную единицу через основные единицы СИ, используя справочные данные (таб. 1.5);
- составить формулу размерности для заданной единицы.

Таблица 1.3

Числовое значение физической величины

Первая цифра варианта									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$5 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^2$	$7 \cdot 10^9$	$7 \cdot 10^{12}$	$4 \cdot 10^{15}$	$7 \cdot 10^{18}$	$5 \cdot 10^{21}$	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^6$
$4 \cdot 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-21}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-15}$	$4 \cdot 10^{-24}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Таблица 1.4

Единица измерения физической величины									
Вторая цифра варианта									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кл	В	Ф	Ом	Вт	См	Вб	Тл	Гн	См
Дж	Ф	Ом	Вт	Тл	Ф	Тл	См	Вт	В

Таблица 1.5

## Справочные данные

Наименование величины	Единица	
	наименование	обозначение и формула
Сила, вес	ньютон	$N = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$
Электрический заряд	кулон	$Кл = A \cdot c$
Электрический потенциал, напряжение, ЭДС	вольт	$V = Дж / Кл$
Электрическая емкость	фарад	$Ф = 1 Кл / В$
Электрическое сопротивление	ом	$Ом = В / А$
Мощность	ватт	$Вт = Дж / c$
Электрическая проводимость	сименс	$См = А / В$
Магнитный поток	вебер	$Вб = 1 В \cdot 1 c$
Магнитная индукция	тесла	$Тл = Н / (А \cdot м)$
Индуктивность	генри	$Гн = Вб / А$
Работа, энергия	джоуль	$Дж = Н \cdot м$

**Пример решения.**

Рассмотрим решение задания на примере варианта 00. Исходные данные, кратное и полное обозначение единиц сведем в таблицу 1.6.

Таблица 1.6

Обозначение единиц		
Обозначение с множителем	Краткое обозначение	Полное обозначение
$5 \cdot 10^3 Кл$	5 кКл	5 килокулон
$4 \cdot 10^{-9} Дж$	4 нДж	4 наноджоулей

Размерность единицы электрического заряда имеет вид

$$Кл = A \cdot c = [I \cdot T].$$

Размерность единицы джоуль

$$Дж = Н \cdot м = ((\text{кг} \cdot \text{м}) / \text{с}^2) \cdot \text{м} = [M \cdot L^2 \cdot T^{-2}].$$

## 2. ОКРУГЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

### Теоретические сведения.

Результат любого точного измерения всегда выражается двумя числами: числовым значением измеряемой величины и параметром точности, результатом вероятной, предельной или среднеквадратичной погрешности.

Например, запись результата измерения активного сопротивления

$$R = (40,780 \pm 0,015) \text{ Ом.}$$

Погрешность выражают в большинстве случаев одной или двумя значащими цифрами. Если полученное число начинается с цифры 1 или 2, то отбрасывание второго знака приводит к очень большой ошибке (до 30 - 50%), это недопустимо. Если же полученное число начинается, например, с цифры 9, то сохранение второго знака, то есть указание погрешности, например, 0,94 вместо 0,9, является дезинформацией, так как исходные данные не обеспечивают такой точности.

В итоге можно сформулировать правила округления рассчитанного значения погрешности и полученного экспериментального результата измерения:

1. Абсолютная погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной, – если первая есть 3 и более.

2. Среднее значение измеренной величины округляется до того же десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности.

3. Относительную погрешность, выраженную в процентах, достаточно записать двумя значащими цифрами.

4. Округления производится лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления будут с одним – двумя лишними знаками.

Округление результата должно производиться в полном соответствии с погрешностями (параметрами точности) результата. Числовое значение ре-

зультата непременно должно оканчиваться десятичным знаком того же разряда, что и погрешность (параметр точности). При округлении следует руководствоваться следующими правилами:

1. Лишние значащие цифры у целых чисел заменяются нулями, а у десятичных дробей отбрасываются;
2. Если первая слева из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр меньше 5, то остающиеся цифры не изменяются;
3. Если указанная выше цифра равна 5 и последующие цифры не нули, то последняя справа оставляемая цифра (в округляемом числе) увеличивается на единицу;
4. Если заменяется нулем или отбрасывается цифра 5 одна или с последующими за ней нулями, то последняя цифра в округленном числе остается без изменения, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Когда результат измерения пишут без указания погрешностей (параметра точности), его числовое значение округляют так, чтобы в нем остались одни верные значащие цифры, т.е. чтобы предельная погрешность результата не превосходила единицы последнего оставленного десятичного знака.

### Задание для самостоятельной работы.

Используя исходные данные таблиц 2.1 и 2.2, произведите округление результата измерения в соответствии с различной погрешностью измерения.

Таблица 2.1

Результат измерения									
Первая цифра варианта									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
224,312	248,324	541,325	954,265	475,326	541,325	743,216	597,215	246,359	648,675
1235,21	3251,24	2341,50	8541,24	4752,12	3251,12	4923,12	1475,24	3651,41	8412,24
23,125	34,124	62,214	84,512	63,124	52,147	23,3221	11,124	13,124	12,451
0,265	1,3554	1,365	0,1254	0,1245	0,1245	1,654	2,1452	0,1544	0,12565
56,35	87,26	46,37	34,562	78,651	65,235	52,391	57,365	94,235	68,241
1,267	2,354	1,265	8,125	4,235	6,215	7,125	8,1245	8,1256	7,1253
126,03	142,32	421,32	365,25	956,32	325,14	623,41	325,23	784,26	953,62

Таблица 2.2

Погрешность измерения									
Вторая цифра варианта									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,235	0,135	0,325	0,254	0,249	0,542	0,651	0,741	0,351	0,250
13,21	20,124	40,14	12,65	20,14	32,12	43,12	51,25	15,12	23,12
0,2354	0,7845	0,3217	0,3651	0,2214	0,3541	0,6589	0,1314	0,2364	0,135
0,0546	0,0125	0,0248	0,0641	0,0295	0,0146	0,0173	0,0874	0,0174	0,0162
1,259	1,325	0,2142	1,357	0,3481	0,4872	0,7452	0,8451	0,1451	0,3478
0,0145	0,0574	0,02456	0,0548	0,0523	0,8457	0,0457	0,0575	0,654	0,5025
2,321	3,214	4,215	6,125	7,145	5,1254	3,125	1,458	5,125	5,548

**Пример решения.**

Рассмотрим решение задания на примере варианта 00.

Таблица 2.3

Результаты измерений до и после округления	
Результат измерения до округления	Результат измерения после округления
$224,312 \pm 0,235$	$224,31 \pm 0,24$
$1235,21 \pm 13,21$	$1235 \pm 13$
$23,125 \pm 0,2354$	$23,12 \pm 0,24$
$0,265 \pm 0,0546$	$0,26 \pm 0,05$
$56,35 \pm 1,259$	$56,4 \pm 1,3$
$1,267 \pm 0,0145$	$1,267 \pm 0,014$
$126,03 \pm 2,321$	$126,0 \pm 2,3$

### 3. ПАРАМЕТРЫ И ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

#### Теоретические сведения.

*Средство измерений (СИ)* представляет собой техническое средство, предназначенное для измерений и имеющее нормированные (установленные) метрологические характеристики.

*Шкала средства измерений* – шкала часть средства измерений, представляющая собой упорядоченный набор меток вместе со значениями соответствующей величины.

*Диапазон измерений (рабочий диапазон)* – множество значений величин одного рода, которые могут быть измерены данным средством измерений или с указанными показателями точности при определенных условиях.

*Пределы измерений* – наибольшее и наименьшее значение диапазона измерений. Для мер – это номинальное значение воспроизводимой величины.

Когда нижний предел измерения равен нулю, диапазон измерения указывают в виде записи, например, 0 – 100 А, 0 – 100 Ом и т. п. В тех случаях, когда нижний предел измерения не равен нулю, тогда диапазон измерения обозначается так: 25 – 50 мм, 0 – 100 Ом и т. п.

Во многих измерительных приборах имеются специальные устройства, позволяющие изменить диапазон измерения иногда в очень широких пределах. В этих случаях следует говорить об общем диапазоне измерения, охватываемом измерительным прибором, и об отдельных диапазонах, которые часто называют неудачно «поддиапазоны». Например, общий диапазон измерения 0 – 100 делится на диапазоны 0 – 0,1; 0 – 1; 0 – 10; 0 – 100 или общий диапазон 0 – 5 делится на диапазоны 0 – 1; 1 – 2; 2 – 3; 3 – 4; 4 – 5.

*Коэффициент шкалы ( $K_{ш}$ )* – это отношение предельных значений двух диапазонов измерений: используемого и исходного, для которого проградуирована шкала.

Коэффициент шкалы в однопредельных приборах всегда равен единице, а в многопредельных – имеет свое значение для каждого предела измерения.



*Диапазон показаний* – область значений шкалы, ограниченная конечным и начальным значением шкалы.

*Начальное (конечное) значение шкалы* – минимальное (максимальное) значение измеряемой величины, указанное на шкале.

*Отметка шкалы* – знак на шкале, соответствующий некоторому значению измеряемой величины.

*Деление шкалы* – промежуток между двумя соседними отметками шкалы.

*Длина (интервал) деления шкалы* – расстояние между осями (или центрами) двух соседних отметок шкалы, измерено вдоль воображаемой линии, проходящей через середины самых коротких отметок шкалы.

*Цена деления шкалы* – разность значений соответствующих двум соседним отметкам шкалы. Приборы с равномерной шкалой имеют постоянную цену деления, а с неравномерной – переменную. В этом случае нормируется минимальная цена деления.

Приборы с равномерной шкалой имеют постоянную цену деления, а с неравномерной – переменную. В этом случае нормируется минимальная цена деления.

*Чувствительность (средства измерений)* – отношение изменения показаний средства измерения к вызывающему его изменению измеряемой величины.

Чувствительность многопредельного прибора определяется для самого малого его предела измерения.

*Внутреннее сопротивление прибора* (амперметра, вольтметра) обычно указывается в паспорте и прямо или косвенно на лицевой панели. Для амперметров характерно малое внутреннее сопротивление –  $r_A$ , а для вольтметров большое –  $r_V$ .

***Погрешности средств измерения.*** В результате воздействия большого числа различных факторов, возникающих в процессе изготовления и эксплуатации средств измерений, номинальные значения мер и показания приборов отличаются от истинных значений измеряемых ими величин. Эти отклонения характеризуют погрешности средств измерений.

От характера проявления при повторных применениях прибора погрешности СИ подразделяются на систематические и случайные.

*Систематическая погрешность СИ* – это составляющая общей погрешности, которая остается постоянной или закономерно изменяется при многократных измерениях одной и той же величины.

*Случайной погрешностью СИ* называют составляющую, изменяющуюся при повторных измерениях одной и той же величины случайным образом.

Присутствие погрешностей приводит к тому, что характеристики СИ оказываются неоднозначными. При экспериментальном их определении, т. е. градуировке СИ, получают лишь ряд точек. По этой полосе точек проводят на графике некоторую плавную среднюю кривую, которую и принимают за характеристику СИ.

Хотя некоторые экспериментальные точки от нее и отклоняются. Для наименования этих отклонений используется ряд терминов. Систематически наблюдающиеся отклонения от выбранной в качестве характеристики плавной кривой в общем случае называются *погрешностью адекватности* выбранной функциональной зависимости (прямой линии, параболы, экспоненты и т. д.) фактической характеристике СИ.

В связи с этим различают:

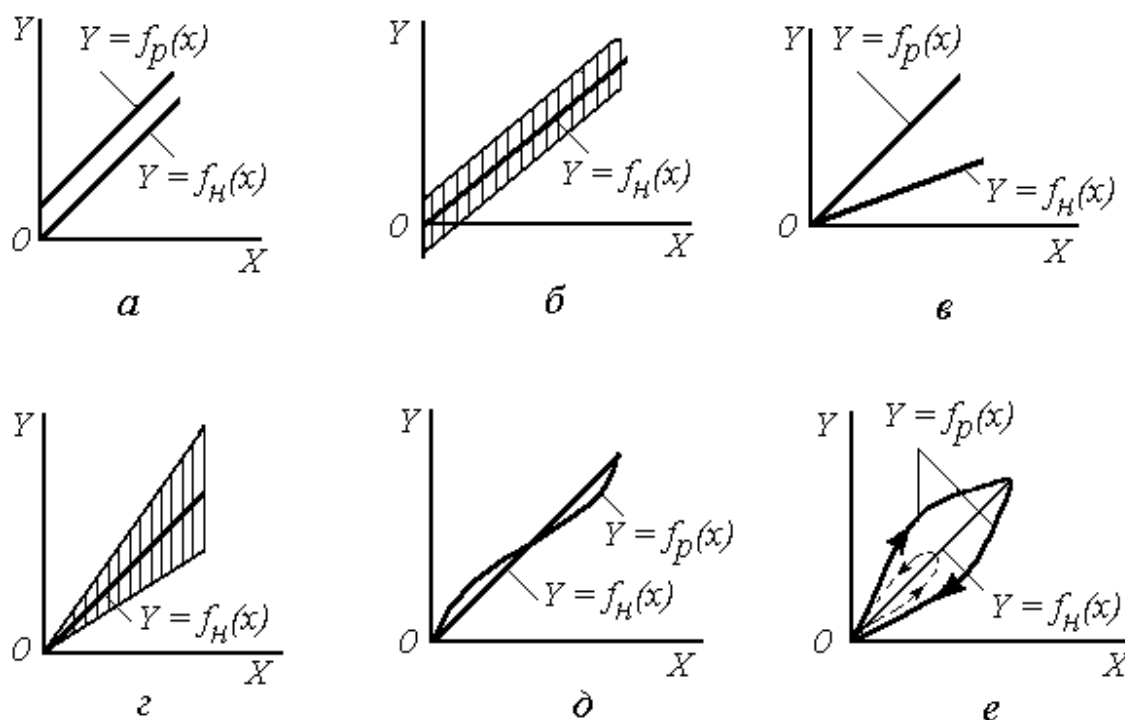
*Номинальную (или идеальную) функцию преобразования* – функция, которая приписана измерительному устройству данного типа и указана в его паспорте и используется при выполнении с его помощью измерений.

*Реальную функцию преобразования*, которой обладает конкретный экземпляр измерительного устройства.

Если в качестве номинальной функции преобразования выбрана прямая, то погрешность ее адекватности называют *погрешностью линейности* СИ (рис.3.1,д).

Если погрешность адекватности меняет свой знак в зависимости от направления предшествующего отсчету изменения входной величины, то такую погрешность прибора или преобразователя называют погрешностью от *гисте-*

*резиса* (от греч. *hysteresis* – запаздывание) или *вариацией* СИ (рис 3.1,е). Причинами гистерезиса являются: люфт и сухое трение в механических передающих элементах, гистерезисный эффект в ферромагнитных материалах, внутреннее трение в материалах пружин, явление упругого последействия в упругих чувствительных элементах, явление поляризации в электрических, пьезоэлектрических и электрохимических элементах и др. Существенным при этом является тот факт, что форма получаемой петли реальной функции преобразования зависит от предыстории, а именно от значения измеряемой величины, при котором после постепенного увеличения последней начинается ее уменьшение (на рис. 3.1,е это показано пунктирными линиями).



**Рис. 3.1. Реальные функции преобразования измерительных устройств**

Значение вариации определяется по формуле

$$H = X_b - X_y, \quad (3.1)$$

где  $X_b$ ,  $X_y$  – значения измерений образцовыми СИ при возрастании и убывании величины  $X$ .

В зависимости от внешних условий все погрешности СИ делятся на основные и дополнительные.

*Основная погрешность* – это погрешность СИ при нормальных условиях эксплуатации. (Нормальные условия: температур  $293\text{ К} \pm 5\text{ К}$  или  $20^\circ\text{С} \pm 5^\circ\text{С}$ , относительная влажность воздуха  $65 \pm 15\%$  при  $20^\circ\text{С}$ , напряжение в сети питания  $220\text{ В} \pm 10\%$  с частотой  $50\text{ Гц} \pm 1\%$ , атмосферное давление от  $91,4\text{ кПа}$  до  $104\text{ кПа}$ , отсутствие электрических и магнитных полей (наводок). В рабочих условиях, зачастую отличающихся от нормальных более широки диапазонном влияющих величин, при необходимости нормируется *дополнительная погрешность СИ*.

В общем виде, суммарная абсолютная погрешность СИ при валяющих факторах

$$\Delta_{\Sigma} = \Delta_0 + \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}, \quad (3.2)$$

где  $\Delta_0$  – основная погрешность СИ;  $\Delta_i$  – дополнительная погрешность, вызванная изменением  $i$ -го влияющего фактора.

Вследствие сложности разделения дополнительных и основных погрешностей поверку СИ выполняют только при нормальных условиях (т.е. дополнительные погрешности исключены).

В соответствии с ГОСТ 8.401-80 [2] для пределов допускаемой основной (и дополнительной) погрешностей предусмотрены различные способы выражения в виде абсолютной, относительной и приведенной погрешности.

*Абсолютная погрешность* – разность между показанием  $X$  СИ и действительным значением  $X_0$  измеряемой величины

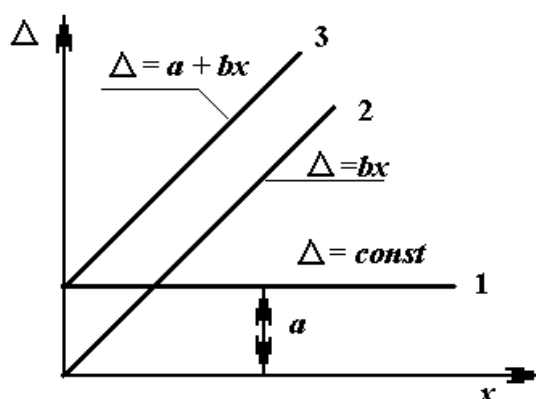
$$\Delta = X - X_0. \quad (3.3)$$

В качестве  $X_0$  выступает либо номинальное значение (например, меры), либо значение величины, измеренной более точно (не менее чем на порядок, в 10 раз) СИ.

Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой физической величины и может быть задана:

либо одним числом (линия 1, рис.3.2):  $\Delta = \pm a$ ;

либо в виде линейной зависимости (линии 2 и 3, рис.3.2):  $\Delta = \pm bx$ ,  $\Delta = \pm (a + bx)$ ;  
в виде функции  $\Delta = f(x)$  или графика, таблицы (таб.3.7).



**Рис. 3.2. Формы выражения абсолютной погрешности**

Таблица 3.1

Пределы допускаемой абсолютной погрешности вольтметра М-366

Показания СИ, В	0	10	20	30	40	50	60	70	75
Погрешность $\Delta$ , В	–0,20	–0,10	0	0,10	0,20	0,35	0,45	0,55	0,70

Поскольку абсолютная погрешность выражается в абсолютных единицах физической величины, то это не дает возможность сравнивать СИ и измеряющие разные физические величины. Для этой цели можно использовать относительные погрешности  $\delta$  как отношение абсолютной погрешности к действительному  $X_0$  значению, выраженные в процентах

$$\delta = \pm \frac{\Delta}{X_0} \cdot 100\% . \quad (3.4)$$

Эта формула показывает, что для одного и того же СИ  $\delta$  уменьшается с ростом  $X_0$  приближается к  $X_0 \rightarrow 0$ . То есть при измерении на начальном участке шкалы с начальной нулевой отметкой погрешности измерения могут быть сколь угодно велики. Поэтому в метрологии существует принцип запрета измерений на таких участках шкалы СИ.

Указание только абсолютной погрешности не позволяет сравнивать между собой по точности СИ с разным пределом измерений, а указание относительной погрешности также ограничено из-за непостоянства величины  $\delta$ . По-

этому получило большое распространение нормирование приведенной погрешности как отношение  $\Delta$  к нормируемому значению  $X_N$ .

$$\gamma = \pm \frac{\Delta}{X_N} \cdot 100 \%. \quad (3.5)$$

Нормирующее значение измеряемой величины  $X_N$  выбирают в зависимости от вида и характера шкалы прибора. Стандарт 8.401-80 определяет для приборов с равномерной или степенной шкалой, если нулевая отметка находится на краю или вне шкалы, нормирующее значение  $X_N$  равным верхнему пределу диапазона измерений. Если же нулевая отметка находится посередине шкалы, то  $X_N$  равно протяженности диапазона измерений (например, для амперметра со шкалой от  $-20$  А до  $+40$  А значение  $X_N = 40 - (-20) = 60$  А).

В зависимости от режима применения различают динамическую и статическую погрешности.

*Статическая погрешность СИ* – погрешность, возникающая при использовании прибора для измерения постоянной величины.

*Динамическая погрешность СИ* – погрешность, возникающая при использовании его для измерения переменной во времени величины.

В зависимости от влияния измеряемой величины принято различать мультипликативные и аддитивные погрешности.

*Аддитивной* (получаемой путем сложения), или погрешностью нуля называют погрешность, которая остается постоянной при всех значениях измеряемой величины (рис. 3.1,а).

На рисунке 3.1,а показано, что реальная функция преобразования  $Y = f_p(X)$  несколько смещена относительно номинальной  $Y = f_n(X)$ , т.е. выходной сигнал измерительного устройства при всех значениях измеряемой величины  $X$  будет больше (или меньше) на одну и ту же величину, чем он должен быть, в соответствии с номинальной функцией.

Если аддитивная погрешность является систематической, то обычно она устраняется корректированием нулевого значения выходного сигнала. Если аддитивная погрешность является случайной, то ее исключить нельзя, и обра-

зуется некоторая полоса ширина которой остается постоянной при всех значениях измеряемой величины (рис.3.1,б). Аддитивная погрешность вызвана обычно трением в опорах, контактными сопротивлениями, дрейфом нуля (когда сигнал равен нулю, а показания меняются), шумом (случайные колебания в выходном сигнале) и фоном (периодические колебания в выходном сигнале, часто возникающие из-за наличия электромагнитной или электростатической связи с общегородской сетью).

*Мультипликативной* (получаемой путем умножения), или погрешностью чувствительности называют погрешность, которая линейно возрастает (или убывает) с увеличением измеряемой величины.

Графически появление мультипликативной погрешности интерпретируется поворотом реальной функции преобразования относительно номинальной (рис. 3.1,в). Если эта погрешность случайная, то она представляется полосой (рис. 3.1,г). Причина возникновения мультипликативной погрешности обычно является изменение коэффициентов преобразования отдельных элементов и узлов СИ.

***Классы точности средств измерений.*** Согласно ГОСТ 8.401–80 [2], *класс точности* – это обобщенная характеристика средств измерений, определяемая пределами допускаемой основной и дополнительной погрешности, а также рядом других свойств, влияющих на точность осуществляемых с их помощью измерений.

В связи с большим разнообразием средств измерений ГОСТ 8.401-80 устанавливает несколько способов назначения классов точности. При этом в основу заложены следующие положения:

в качестве норм служат пределы допускаемых погрешностей, включающие систематические и случайные составляющие;

основная и все виды дополнительных погрешностей нормируются по-разному.

Определяя класс точности, нормируют, прежде всего, пределы допускаемой основной погрешности. Пределы допускаемой дополнительной погрешности устанавливают в виде дольного (кратного) значения.

Классы точности присваивают СИ при их разработке по результатам государственных приемочных испытаний. Если СИ предназначены для измерения одной и той же физической величины, но в разных диапазонах, или для измерения разных физических величин, то этим СИ могут присваиваться разные классы точности как по диапазонам, так и по измеряемым физическим величинам.

Пределы допускаемых основной и относительной погрешностей выражают в форме абсолютной, относительной или приведенной погрешностей. Способ выражения погрешностей зависит от характера изменения погрешности по диапазону измерения, назначения и условий применения СИ.

Если погрешность результатов измерений в данной области измерений принято выражать в единицах измерений величины или делениях шкалы, то принимается форма абсолютных погрешностей (меры, магазины номинальных физических величин). Если границы абсолютных погрешностей в пределах диапазона измерений практически постоянны, то принимается форма приведенной погрешности, а если эти границы нельзя считать постоянными, то форма относительной погрешности.

Поэтому ГОСТ 8.401-80 [2] в качестве основных устанавливает три вида классов точности СИ:

1. Для пределов допускаемой абсолютной погрешности в единицах измеряемой величины или делениях шкалы.

В этом случае классы точности СИ, обозначают прописными буквами латинского алфавита или римскими цифрами. При этом, чем дальше буква от начала алфавита, тем больше значения допускаемой абсолютной погрешности.

Например, СИ класса *C* более точен, чем СИ класса *M*, т. е. это число – условное обозначение и не определяет значение погрешности.



2. Для пределов допускаемой относительной погрешности. Класс точности таких приборов назначается двумя способами.

Если погрешность СИ имеет в основном мультипликативную составляющую, то пределы допускаемой основной относительной погрешности устанавливаются по формуле

$$\delta = \pm \frac{\Delta}{x} \cdot 100 \% = A \cdot 10^n = \pm q, \quad (3.6)$$

где  $A = 1; 1,5; (1,6); 2; 2,5; (3); 4; 5$  и  $6$ ; значения  $1,6$  и  $3$  – допускаемые, но не рекомендуемые;  $n = 1; 0; -1; -2; \dots$ .

Так обозначают классы точности мостов переменного тока, счетчиков электроэнергии, делителей напряжения, измерительных трансформаторов и др.

Если СИ имеют как мультипликативную, так и аддитивную составляющие, то класс точности обозначается двумя цифрами, соответствующими значениям  $c$  и  $d$  формулы:

$$\delta = \pm \left[ c + d \left( \left| \frac{x_k}{x} \right| - 1 \right) \right]. \quad (3.7)$$

Здесь  $c$  и  $d$  выражаются также через ряд (3.6). Причем, как правило,  $c > d$ .

Например, класс точности  $0,02/0,01$  означает, что  $c = 0,02$ , а  $d = 0,01$ .

3. Для пределов допускаемой приведенной погрешности в виде ряда чисел

$$\gamma = \pm \frac{\Delta}{x_N} \cdot 100 \% = \pm A \cdot 10^n. \quad (3.8)$$

Условное обозначение класса точности в этом случае зависит от нормирующего значения  $x_N$  т. е. от шкалы СИ.

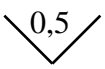
Если  $x_N$  представляется в единицах измеряемой величины, то класс точности обозначается числом, совпадающим с пределом допускаемой приведенной погрешности. Например, класс  $1,5$  означает, что  $\gamma = 1,5 \%$ .

Если  $x_N$  – длина шкалы (например, у амперметров), то класс  $1,5$  означает, что  $\gamma = 1,5 \%$  длины шкалы.

Обозначения классов точности средств измерений, которые используются при указании в нормативных документах, паспортах, технических условиях и на приборах приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Обозначения классов точности в документах и на приборах

Вид погрешности	Формула по тексту	Примеры пределов допускаемой погрешности	Обозначение класса точности	
			в НТД	на СИ
Абсолютная	$\Delta = \pm a$ $\Delta = \pm(a + bx)$	$\Delta = \pm 0,2 \text{ А}$	Класс точности N или класс точности III	N III
Относительная	3.6	$\delta = \pm 1,0 \%$	Класс точности 1,0	①
	3.7	$\delta = \pm \left[ 0,02 + 0,01 \left( \frac{x_0}{x} - 1 \right) \right] \%$	Класс точности 0,02/0,01	0,02/0,01
Приведенная	3.8	при $x_N = x_K$ $\gamma = 1,5 \%$ .	Класс точности 1,5	1,5
		$x_N$ – длина шкалы или ее части, мм $\gamma = 1,5\%$ .	Класс точности 0,5	

### Задания для самостоятельной работы.

**Задание 3.1.** Определить значение измеряемого параметра для данных, представленных в таблице 3.3 и 1.4. Лицевые панели приборов изображены на рисунках 3.3, 3.4.

Таблица 3.3

Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Положение стрелки	20	10	12	16	22	24	18	28	8	14

Таблица 3.4

## Исходные данные

	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Мультиметр	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340
Положение переключателя, ~V	3	2,5	6	10	15	50	30	250	60	500
Положение переключателя, ~mA	0,6	0,25	3	1	1500	5	60	25	300	0,25
Мультиметр	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353
Положение переключателя, –mA	0,05	1500	0,25	0,6	1	3	5	15	2,5	60
Положение переключателя, – V	1000	150	2,5	300	10	600	50	1,5	250	15

***Рассмотрим методику решения задачи на примере.****Исходные данные для расчетов:*

Мультиметр Ц4353

Положение переключателя пределов..... 150 V

Нажатая кнопка..... «~»

Положение стрелки..... 22

*Решение:*

Рассчитаем коэффициент шкалы по формуле:

$$K_{ш} = \frac{ДИ_{\max}}{ДП_{\max}}, \quad (3.9)$$

где  $ДИ_{\max}$  – наибольшее значение, выбранного диапазона измерения, определяемое по переключателю пределов;  $ДП_{\max}$  – верхнее значение диапазона показаний прибора.

$$K_{ш} = \frac{150}{30} = 5;$$

Определяем цену деления шкалы прибора для выбранного диапазона показаний.

$$C = C_n \cdot K_{ш}, \quad (3.10)$$

где  $C_n$  – номинальная цена деления, определяемая по шкале прибора.

У мультиметра Ц4353 номинальная цена деления при измерении напряжения 1 В/дел, таким образом, на диапазоне 150 В, цена деления составит:

$$C_{150В} = 1 \cdot 5 = 5 \text{ В/дел.};$$

Результат измерения определим по формуле:

$$U = N \cdot C, \quad (3.11)$$

где  $N$  – количество делений, соответствующее положению стрелки.

Положение стрелки «22» соответствует 22 делению. Результат измерения получим, умножив количество делений на коэффициент шкалы:

$$U = 22 \cdot 5 = 110 \text{ В.}$$

*Ответ:*  $U = 110 \text{ В.}$

**Задание 3.2.** Определить цену деления и чувствительность прибора (таб.3.5) при измерении значений представленных в таблице 3.6. Лицевые панели приборов изображены на рисунках 3.3, 3.4.

Таблица 3.5

Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Мультиметр	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353

Таблица 3.6

Исходные данные

Параметр	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Измеряемое значение, ~В	2,0	12	16	24	85	42	64	55	250	150
Измеряемое значение, –мА	800	500	400	250	100	50	15	30	45	60
Измеряемое значение, – В	0,5	2,5	350	35	46	320	140	400	4,0	18
Измеряемое значение, ~мА	0,2	0,5	1,5	3,5	4,5	0,15	0,1	0,4	0,8	2,0

***Рассмотрим методику решения задачи на примере.***

*Исходные данные для расчетов:*

Мультиметр Ц4353

Измеряемое значение:  $\sim V = 1,2 \text{ В}$ .

*Решение:*

Определяем диапазон измерения для заданного значения 1,2 В. Диапазон измерения должен быть больше измеряемого значения, в нашем случае, у мультиметра Ц4353 подходит диапазон измерения до 1,5 В.

Для выбранного диапазона измерения по формуле (3.9) определяем коэффициент шкалы

$$K_{ш} = \frac{1,5}{30} = 0,05, \text{ тогда}$$

Определяем цену деления шкалы прибора для выбранного диапазона показаний по формуле (3.10). У мультиметра Ц4353 номинальная цена деления при измерении напряжения 1 В/дел, таким образом, на диапазоне 1,5 В, цена деления составит:

$$C_{1,5В} = 1 \cdot 0,05 = 0,05 \text{ В/дел.};$$

Чувствительность определяем по формуле:

$$S = \frac{1}{C}; \quad (3.12)$$

$$S_{1,5В} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ дел./В.}$$

*Ответ:*  $C_{1,5В} = 0,05 \text{ В/дел.}; S_{1,5В} = 20 \text{ дел./В.}$

**Задание 3.3.** Для измерения напряжения  $U_1$  и  $U_2$  (табл. 3.8), с частотой 100 Гц и 150 кГц, использовали вольтметр ВЗ–38.

Определить абсолютную и относительную погрешности этих измерений, если в паспорте вольтметра указаны следующие технические характеристики:

а) диапазон измеряемых напряжений от 100 мкВ до 300 В перекрывается следующими пределами:

мВ	1	3	10	30	100	300
В	1	3	10	30	100	300

б) в нормальной области частот от 45 Гц до 20 МГц основная погрешность, выраженная в процентах от конечного значения установленного предела измерения, не превышает  $\pm\gamma_1$  % в диапазоне 1 ... 300 мВ и  $\pm\gamma_2$  % в диапазоне 1 ... 300 В.

Таблица 3.7

Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Основная погрешность $\pm\gamma_1$ , %	1	1,5	1,6	2	2,5	1	1,5	1,6	2	2,5
Основная погрешность $\pm\gamma_2$ , %	0,4	0,5	0,6	0,4	0,5	0,6	0,4	0,5	0,6	0,4

Таблица 3.8

Исходные данные

Параметр	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Измеряемое напряжение $U_1$	5 В	20 мВ	35 В	120 мВ	220 В	140 мВ	25 В	110 мВ	12 В	60 мВ
Измеряемое напряжение $U_2$	10 мВ	25 В	20 мВ	120 В	40 мВ	45 В	210 мВ	24 В	40 мВ	220 В

### ***Рассмотрим методику решения задачи на примере.***

*Исходные данные для расчетов:*

Измеряемое напряжение:  $\sim U = 5$  мВ.

Основная погрешность:  $\pm\gamma_1 = 2$  %;  $\pm\gamma_2 = 0,2$  %.

*Решение:*

Для заданного измеряемого напряжения выбираем диапазон измерения, который должен быть больше измеряемого параметра. В нашем случае, для  $\sim U = 5$  мВ подходит диапазон измерения до 10 мВ.

В выбранном диапазоне (10 мВ) основная приведенная погрешность измерения вольтметра, в соответствии с паспортными данными, составляет  $\pm\gamma_1 = 2$  %.

Зная приведенную погрешность, можно рассчитать абсолютную погрешность по формуле:

$$\pm \Delta = \pm \left( \frac{\gamma \cdot X_N}{100} \right). \quad (3.13)$$

Тогда предельное значение абсолютной погрешности составит

$$\pm \Delta = \pm \left( \frac{2 \cdot 10}{100} \right) = \pm 0,2 \text{ мВ}.$$

Относительную погрешность рассчитываем по формуле (3.4):

$$\pm \delta = \pm \left( \frac{0,2}{5} \right) \cdot 100 = \pm 4,0 \, \%.$$

*Ответ:*  $\pm \Delta = \pm 0,2 \text{ мВ}; \pm \delta = \pm 4,0 \, \%$ .

**Задание 3.4.** Определить аддитивную и наибольшую мультипликативную погрешность средства измерений, если номинальная функция преобразования  $Y_n$ , а реальная  $Y_p$  (табл. 3.10), верхний предел диапазона измерений  $X_{\max}$  (табл. 3.9).

Таблица 3.9

Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Верхний предел измерения средства измерения $X_{\max}$	40	50	60	70	80	90	100	110	200	250

Таблица 3.10

Исходные данные

Параметр	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Реальная функция преобразования $Y_p$	$0,01+3,02x$	$-0,02+2,04x$	$0,03+2,98x$	$0,05+1,95x$	$0,12+4,05x$	$-0,05+3,98x$	$0,08+3,06x$	$-0,02+2,01x$	$0,04+3,03x$	$-0,01+2,97x$
Номинальная функция преобразования $Y_n$	$3,0x$	$2,0x$	$3,0x$	$2,0x$	$4,0x$	$4,0x$	$3,0x$	$2,0x$	$3,0x$	$3,0x$

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.**

Исходные данные для расчетов:

Реальная функция преобразования  $Y_p = -2,773 + 2,077 \cdot X$

Номинальная функция преобразования  $Y_n = 2,0 \cdot X$

Верхний предел измерения средства измерения  $X_{\max} = 50$ .

Решение:

Согласно сравнению номинальной и реальной функции преобразования аддитивная погрешность  $\Delta_a = -2,773$  ед.

Мультипликативная погрешность  $\Delta_m$  имеет следующие значения:

$$\Delta_{m\max} = 2,077 \cdot X - 2 \cdot X = 0,077 \cdot 50 = 7,7 \text{ ед.}$$

Ответ:  $\Delta_a = -2,773$  ед.;  $\Delta_{m\max} = 7,7$  ед.

**Задание 3.5.** При пяти измерениях одного и того же напряжения датчика с помощью вольтметра получены следующие результаты  $U_1 \dots U_5$ . Считая среднее арифметическое значение приведенных напряжений истинным, определить границы абсолютной и относительной погрешностей.

Таблица 3.11

Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Показания вольтметра, В	3,02	3,02	3,01	3,06	3,0	2,99	2,98	2,97	3,05	3,04
Показания вольтметра $U_2$ , В	3,01	3,06	3,03	2,99	2,98	2,97	3,05	3,04	3,02	2,98

Таблица 3.12

Исходные данные

Параметр	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Показания вольтметра $U_3$ , В	3,0	2,99	2,98	2,97	3,05	3,04	3,01	3,06	3,0	2,99
Показания вольтметра $U_4$ , В	3,06	3,08	3,02	3,0	2,99	2,98	2,97	3,05	3,04	3,05
Показания вольтметра $U_5$ , В	2,97	2,95	3,04	3,2	3,0	2,99	2,98	2,97	3,05	3,04



***Рассмотрим методику решения задачи на примере.***

*Исходные данные для расчетов:*

$$U_1 = 3,02 \text{ В};$$

$$U_2 = 3,01 \text{ В};$$

$$U_3 = 3,00 \text{ В};$$

$$U_4 = 3,06 \text{ В};$$

$$U_5 = 2,97 \text{ В};$$

*Решение:*

Определим среднее арифметическое значение приведенных напряжений по формуле:

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{n}, \quad (3.14)$$

где  $n$  – количество результатов наблюдений.

$$\bar{U} = \frac{3,02 + 3,01 + 3,00 + 3,06 + 2,97}{5} = 3,012 \text{ В.}$$

Принимая полученное значение за действительное, по формуле (3.3) определяем границы абсолютной погрешности, т.к. по условию нужно определить предельное значение абсолютной погрешности в формулу будем подставлять наименьшее и наибольшее значение, полученное при измерениях:

$$\pm \Delta_1 = \pm |2,97 - 3,012| = \pm 0,042 \text{ В},$$

$$\pm \Delta_2 = \pm |3,06 - 3,012| = \pm 0,048 \text{ В.}$$

Наибольшее из полученных значений принимаем за абсолютную погрешность результатов измерений, т.е.  $\Delta = \pm 0,048 \text{ В}$ .

Относительную погрешность определяем по формуле (3.4)

$$\delta = \pm \left( \frac{0,048}{3,012} \cdot 100 \right) = \pm 1,59 \% .$$

*Ответ:*  $\pm \Delta = \pm 0,05 \text{ В}; \pm \delta = \pm 1,59 \%$

**Задание 3.6.** Для прибора (таб.3.13) в выбранном диапазоне определить абсолютную, относительную и приведенную погрешность измерения заданных параметров (таб.3.14). Лицевые панели приборов изображены на рисунках 3.3, 3.4.

Таблица 3.13

Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Мультиметр	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353	Ц4340	Ц4353

Таблица 3.14

Исходные данные

Параметр	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Измеряемое значение, мА	–2	~1,5	–0,2	~1,4	–0,2	~0,4	–0,8	~1,6	–0,1	~0,1
Измеряемое значение, В	~12	–1,1	~50	–7,5	~2,5	–5	~30	–1,5	~4,5	–4,6

***Рассмотрим методику решения задачи на примере.***

*Исходные данные для расчетов:*

Мультиметр Ц4340

Измеряемое значение:  $\sim I = 8 \text{ мА}$ .

*Решение:*

На лицевой панели прибора Ц4340 (рис. 34.2.) находятся условные обозначения классов точности мультиметра при измерении разных физических величин. При измерении переменного тока класс точности мультиметра Ц4340 – 2,5. Так как класс точности прибора задан одним числом, то это число обозначает предельное значение основной приведенной погрешности измерения, т.е.  $\pm \gamma = \pm 2,5 \%$ .

Зная приведенную погрешность, можно рассчитать абсолютную погрешность по формуле (3.13). Нормирующее значение определяем по диапазону измерения. По рисунку 3.4, для заданного измеряемого значения

$\sim I = 8 \text{ мА}$ , выбираем диапазон до 25 мА, следовательно  $X_N = 25 \text{ мА}$ . Тогда предельное значение абсолютной погрешности составит:

$$\pm \Delta = \pm \left( \frac{2,5 \cdot 25}{100} \right) = \pm 0,625 \text{ мА}.$$

Относительную погрешность рассчитываем по формуле (3.4):

$$\pm \delta = \pm \left( \frac{0,625}{8} \right) \cdot 100 = \pm 7,8 \, \%.$$

*Ответ:*  $\pm \Delta = \pm 0,6 \text{ мА}$ ;  $\pm \delta = \pm 7,8 \, \%$ .

**Задание 3.7.** Вольтметр имеет заданный класс точности (таб. 3.15) и следующие пределы измерений: 7,5; 15; 75; 150 В.

Определите величину предельной абсолютной и приведенной погрешности измерения напряжения  $U_1$  и  $U_2$  (таб. 3.16) и запишите результат измерения.

Таблица 3.15

Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Класс точности вольтметра	0,2	0,4	0,6	0,15	0,5	0,25	0,4	0,3	0,1	0,2

Таблица 3.16

Исходные данные

Параметр	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Измеренное напряжение $U_1$ , В	5,5	35,2	64,2	5,8	65,4	25,6	87,4	95,4	4,2	87,6
Измеренное напряжение $U_2$ , В	95,5	85,2	84,2	105	10,4	96,6	5,4	25,4	21,2	7,6

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.**

*Исходные данные для расчетов:*

Измеряемое значение,  $U = 6,253 \text{ В}$ .

Класс точности вольтметра  $\textcircled{0,2}$

*Решение:*

Так как класс точности задан числом в кружочке, то это число обозначает предельное значение основной относительной погрешности измерения прибора, т.е.  $\pm \delta = \pm 0,2 \%$ .

Зная относительную погрешность, можно рассчитать абсолютную погрешность по формуле:

$$\pm \Delta = \pm \left( \frac{\delta \cdot X}{100} \right). \quad (3.15)$$

$$\pm \Delta = \pm \left( \frac{0,2 \cdot 6,253}{100} \right) = \pm 0,0125 \text{ В.}$$

Приведенную погрешность измерения рассчитываем по формуле (3.5). Нормирующее значение определяем по диапазону измерения. Для заданного измеряемого значения  $U = 6 \text{ В}$ , выбираем диапазон до 7,5 В, следовательно  $X_N = 7,5 \text{ В}$ . Тогда предельное значение абсолютной погрешности составит

$$\pm \gamma = \pm \left( \frac{0,0125}{7,5} \right) \cdot 100 = \pm 0,17 \%$$

*Запишем результат измерения:*

$$U = (6,253 \pm 0,012) \text{ В.}$$

**Задание 1.8.** Цифровой вольтметр класса точности  $c/d$  (таб. 3.18) имеет пределы измерения: 6; 15; 30; 60; 150; 300 В.

Определите:

а) предельную погрешность измерения и запишите результат измерения напряжения  $U$ ;

б) значения аддитивной и мультипликативной составляющих погрешностей результата измерения напряжения  $U$ .

Таблица 3.17

Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Измеренное напряжение $U$ , В	5,5	20	35	75	110	160	220	4,5	45	85

Исходные данные

Параметр		Вторая цифра варианта									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Класс точности	$c$	0,02	0,04	0,06	0,15	0,06	0,04	0,025	0,02	0,04	0,06
	$d$	0,01	0,015	0,02	0,06	0,04	0,025	0,016	0,01	0,02	0,04

***Рассмотрим методику решения задачи на примере.***

*Исходные данные для расчетов:*

Измеряемое значение,  $U = 16,531$  В.

Класс точности вольтметра 0,02/0,01

*Решение:*

а) Класс точности вольтметра задан 0,02/0,01 ( $c/d$ ), следовательно, у прибора нормированы пределы допускаемой основной относительной погрешности по формуле (3.7). Конечное значение шкалы ( $x_k$ ) определяем по диапазону измерения. Для заданного измеряемого значения  $U = 16,531$  В, выбираем диапазон до 30 В, следовательно  $x_k = 30$  В. Тогда предельное значение относительной погрешности для измеряемого напряжения составит

$$\pm \delta = \pm \left[ 0,02 + 0,01 \left( \left| \frac{30}{16,531} \right| - 1 \right) \right] = \pm 0,028 \, \% .$$

Зная относительную погрешность, можно рассчитать абсолютную погрешность по формуле (3.15):

$$\pm \Delta = \pm \left( \frac{0,028 \cdot 16,531}{100} \right) = \pm 0,00465 \, \text{В} .$$

*Запишем результат измерения:*

$$U = (16,531 \pm 0,005) \, \text{В} .$$

б) Значения аддитивной ( $\Delta_a$ ) и мультипликативной ( $\Delta_m$ ) составляющих погрешностей результата измерения напряжения  $U$  можно определить из значений  $c$  и  $d$ .

Значение  $d$  определяют по формуле:

$$d = \frac{\Delta_a}{x_k} \cdot 100, \quad (3.16)$$

из этой формулы можно выразить аддитивную погрешность

$$\Delta_a = \frac{d \cdot x_k}{100}, \quad (3.17)$$

$$\Delta_a = \frac{0,01 \cdot 30}{100} = 0,003 \text{ В.}$$

Мультипликативную погрешность рассчитываем по формуле:

$$\Delta_m = \frac{b \cdot x}{100}, \quad (3.18)$$

значение  $b = c - d$ , таким образом, мультипликативная погрешность

$$\Delta_m = \frac{0,01 \cdot 16,531}{100} = 0,00165 \text{ В.}$$

*Ответ:*  $\Delta_a = 0,003 \text{ В}$ ;  $\Delta_m = 0,00165 \text{ В}$ .

**Задание 3.9.** Определить абсолютную, относительную и приведенную погрешность измерения напряжения переменного тока  $U_1$  с частотой  $T_1$  и тока  $U_2$  с частотой  $T_2$  (табл.3.20, 3.21).

Для измерения используют 4,5-разрядный цифровой мультиметр U3401A. Разрешающая способность при измерении постоянной и переменной составляющих напряжения переменного тока, отсчет полной шкалы и погрешность заданы по формуле

$$\pm \Delta = \pm (\% \text{ от отсчета} + n \text{ е.м.р.})$$

и представлены в таблице 3.19.

Таблица 3.19

Предел измерения	Разрешающая способность	Макс. значение отсчета	Погрешность		
			от 50 Гц до 10 кГц	от 10 кГц до 30 кГц	от 30 кГц до 100 кГц
500,00 мВ	10 мкВ	510,00	0,5% + 50	2% + 70	3% + 60
5,0000 В	100 мкВ	5,1000	0,5% + 25	1% + 30	3% + 40
50,000 В	1 мВ	51,000	0,5% + 15	1% + 20	3% + 30

Таблица 3.20

## Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота $T_1$	20 кГц	50 кГц	5 кГц	25 кГц	70 кГц	90 Гц	15 кГц	35 кГц	80 Гц	20 кГц
Частота $T_2$ ,	60 Гц	15 кГц	35 кГц	80 Гц	20 кГц	50 кГц	5 кГц	25 кГц	70 кГц	90 Гц

Таблица 3.21

## Исходные данные

Параметр	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Измеряемое напряжение $U_1$ , В	5,365	42,14	0,87	27,4	0,54	10,36	22,34	0,231	40,14	15,54
Измеряемое напряжение $U_2$ , В	0,248	2,348	12,23	0,147	25,54	3,54	0,365	32,14	1,87	0,451

***Рассмотрим методику решения задачи на примере.***

*Исходные данные для расчетов:*

Измеряемое значение,  $U = 16,531$  В.

Частота  $T = 5$  кГц

*Решение:*

В общем виде пределы основной абсолютной погрешности измерения вольтметра заданы формулой:

$$\pm \Delta_0 = \pm \Delta = \pm (\% \text{ от отсчета} + n \text{ е.м.р.}).$$

Для определения процентов в этой формуле и количества единиц младшего разряда необходимо выбрать диапазон измерения по напряжению и частоте. В нашем случае, выбираем диапазон измерения по частоте до 50 В, по частоте от 50 Гц до 10 кГц.

Для допускаемых пределов основной абсолютной погрешности искомые значения составят  $(0,5 \% + 15)$ . Подставим эти значения в формулу и получим

$$\pm \Delta = \pm (0,5 \% \text{ от } U + 15 \cdot \text{ед. мл. разряда}).$$

У вольтметра в диапазоне измерения до 50 В единица младшего разряда составляет 0,001 В.

Таким образом, основная абсолютная погрешность измерения составит

$$\pm \Delta = \pm \left( \frac{16,531}{100} \cdot 0,5 + 15 \cdot 0,001 \right) = \pm 0,0977 \text{ В.}$$

Относительную погрешность рассчитываем по формуле (3.4)

$$\pm \delta = \pm \left( \frac{0,0977}{16,531} \right) \cdot 100 = \pm 0,591 \text{ \%}.$$

Приведенную погрешность измерения рассчитываем по формуле (3.5)

$$\pm \gamma = \pm \left( \frac{0,0977}{50} \right) \cdot 100 = \pm 19,54 \text{ \%}.$$

*Ответ:*  $\pm \Delta = \pm 0,0977 \text{ В}; \pm \delta = \pm 0,591 \text{ \%}; \pm \gamma = \pm 19,54 \text{ \%}.$

**Задание 3.10.** При поверке миллиамперметра на диапазоне измерения от 0 А до  $I_{\max}$  образцовым прибором получены значения абсолютной погрешности  $\Delta_1 \dots \Delta_5$ . Определить приведенную погрешность и назначить класс точности миллиамперметра.

Таблица 3.22

Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Абсолютная погрешность $\Delta_1$ , мА	0,02	-0,01	0,03	-0,04	0,05	-0,02	0,01	-0,05	0,02	-0,03
Абсолютная погрешность $\Delta_2$ , мА	0,05	0,02	-0,01	0,03	-0,04	0,05	0,05	-0,02	0,01	0,02

Таблица 3.23

Исходные данные

Параметр	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Абсолютная погрешность $\Delta_3$ , мА	-0,04	0,05	0,03	-0,04	0,05	0,01	-0,05	0,02	-0,03	-0,03
Абсолютная погрешность $\Delta_4$ , мА	-0,05	0,02	-0,03	0,02	-0,01	0,03	-0,04	0,05	0,02	-0,01
Абсолютная погрешность $\Delta_5$ , мА	-0,02	0,01	-0,05	-0,03	0,02	-0,01	0,03	0,05	0,03	-0,04



Таблица 3.24

Исходные данные

Параметр	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Верхний предел диапазона измерения силы тока $I_{\max}$ , мА	30	10	50	15	2,5	25	5	2,5	15	6

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.**

*Исходные данные для расчетов:*

$$\Delta_1 = -0,01 \text{ мА},$$

$$\Delta_2 = +0,03 \text{ мА},$$

$$\Delta_3 = -0,03 \text{ мА},$$

$$\Delta_4 = -0,04 \text{ мА},$$

$$\Delta_5 = +0,02 \text{ мА},$$

Верхний предел диапазона измерения силы тока  $I_{\max} = 15 \text{ мА}$ .

*Решение:*

Для каждого значения абсолютной погрешности рассчитаем приведенную погрешность по формуле (3.5). Полученные результаты сведем в таблицу 3.25.

Таблица 3.25

Результаты расчета

Абсолютная погрешность $\Delta$ , мА	-0,01	+0,03	-0,03	-0,04	+0,02
Приведенная погрешность $\gamma$ , %	0,067	0,2	0,2	0,27	0,13

Для определения класса точности из таблицы берем наибольшее значение приведенной погрешности  $\gamma = 0,27 \%$  и округляем его в большую сторону до стандартного значения. Таким образом, класс точности поверяемого прибора 0,4.

*Ответ:* класс точности 0,4.

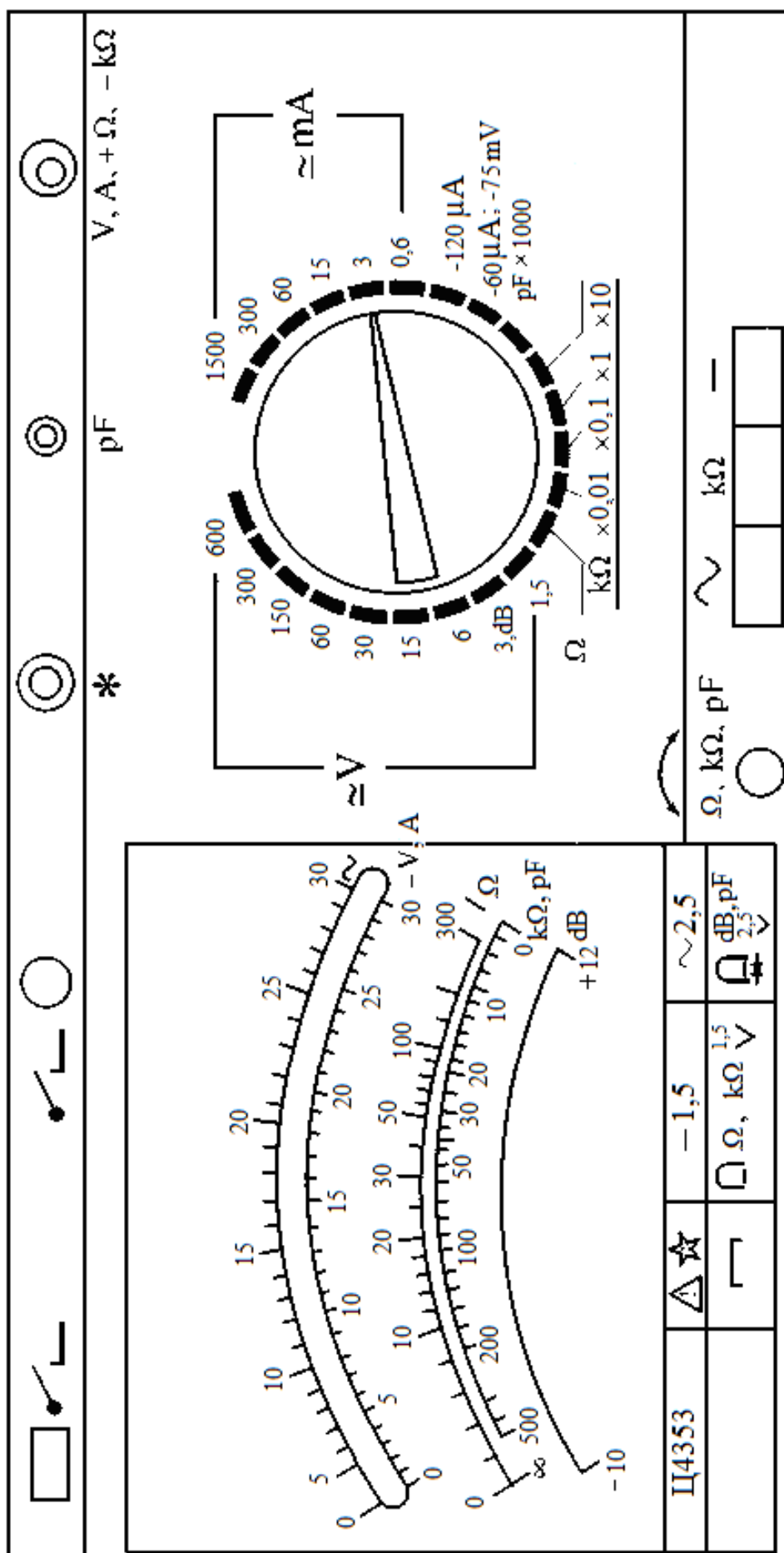


Рис.3.3. Изображение лицевой панели мультиметра Ц4353

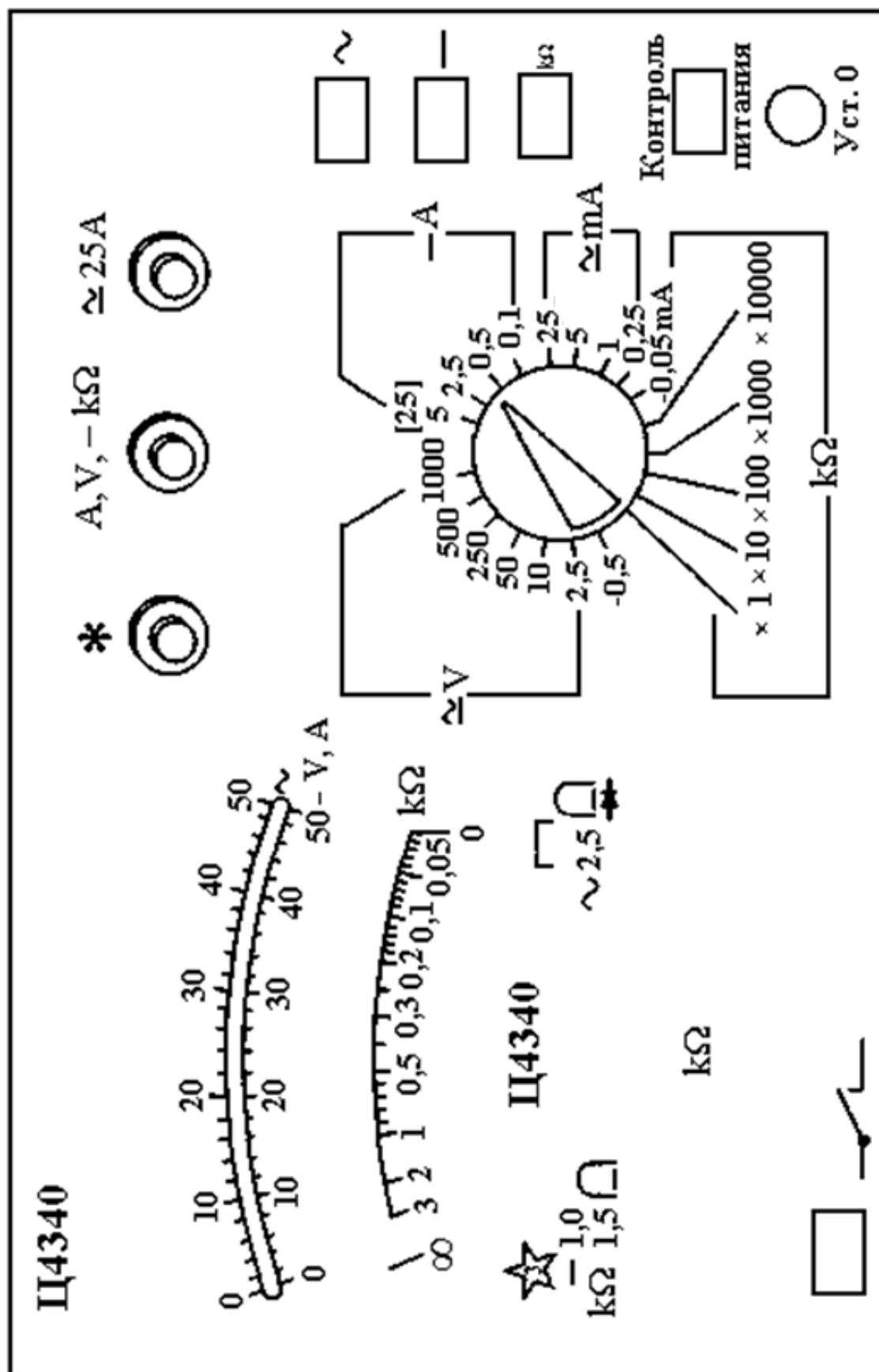


Рис. 3.4. Изображение лицевой панели мультиметра Ц4340

## 4. ВЫБОР СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

### Теоретические сведения.

При выборе СИ чаще всего учитывают совокупность метрологических, эксплуатационных и экономических показателей. При выполнении производственных измерений в первую очередь учитывают следующие метрологические показатели: пределы измерения, цену деления, измерительное усилие, точность СИ и предельную погрешность измерений. К экономическим и эксплуатационным характеристикам при выборе СИ относятся: стоимость средств измерений, продолжительность их работы до повторной установки, продолжительность их работы до ремонта, время, затрачиваемое на установку и на сам процесс измерения, и необходимая квалификация оператора [14].

Выбор СИ для обеспечения необходимой точности является комплексной задачей и должен проводиться в соответствии с требованиями ГОСТ 8.051-81 и РД 50-98-86 [3], [11].

Конкретное СИ выбирается так, чтобы предельная погрешность измерения  $\Delta_{lim}$  не превышала установленную допускаемую погрешность измерения  $\Delta$ , т.е.

$$\Delta_{lim} \leq \Delta_{don}. \quad (4.1)$$

При отсутствии рекомендаций в НТД допуск на измерение принимают

$$\Delta_{don} = 0,33 \cdot T, \quad (4.2)$$

где  $T$  – допуск контролируемого параметра.

Исходными данными для выбора средств *теплофизических измерений* являются указанные в конструкторской (технологической) документации наименьшие и наибольшие размеры физической величины или допуск (например, задание условий: «температура стенки может изменяться в диапазоне от +400 до +800 °С или «давление в трубопроводе не должно превышать  $15^{+0,2}$  МПа»).

Допуск относительно номинального размера может располагаться односторонне, симметрично и асимметрично. Его расположение относительно номинального размера на выбор СИ не влияет. Действительные размеры измеряемой величины могут изменяться по различному закону.

В соответствии с исходными данными определяют допускаемые знания основной абсолютной, относительной или приведенной погрешностей средства измерения (или измерительной системы); назначают требования к габаритным размерам, массе, соединительным элементам, особенностям конструкции данного средства измерения; рассчитывают значения нижнего и верхнего пределов (диапазона) рабочей шкалы средства измерений.

Предварительный выбор средства измерения производят по расчетным значениям допустимой погрешности измерения, относительной и основной приведенной погрешностей прибора, а окончательный – с учетом области значений влияющих величин, габаритных размеров, массы, стоимости, особенностей эксплуатации, электромагнитной совместимости с окружающей средой и др.

### Задания для самостоятельной работы.

**Задание 4.1.** Определить какой класс точности должен быть у вольтметра для измерения напряжений в пределах от  $U_{\min}$  до  $U_{\max}$ , чтобы относительная погрешность измерения не превышала  $\delta$ . Вольтметр имеет следующие пределы измерений: 7,5; 15; 75; 150 В.

Таблица 4.1

Параметр	Исходные данные									
	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Минимальное измеряемое напряжение $U_{\min}$ , В	5	8	10	6	4	5	8	10	6	5

Таблица 4.2

Параметр	Исходные данные									
	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Максимальное измеряемое напряжение, В	20	22	24	26	28	18	20	24	26	28
Допускаемая относительная погрешность измерения $\delta$ , %	1,0	2,0	1,5	2,5	4,0	3,5	3,0	1,5	1,0	0,5

***Рассмотрим методику решения задачи на примере.***

Исходные данные для расчетов представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Исходные данные для выбора средств измерений

Параметр	Условное обозначение	Единица измерения	Числовое значение
Минимальное измеряемое напряжение	$U_{\min}$	В	0,1
Максимальное измеряемое напряжение	$U_{\max}$	В	1,5
Допускаемая относительная погрешность измерения	$\delta$	%	1,0

*Решение:*

Если у вольтметра класс точности задан через приведенную погрешность, то для ее расчета надо:

- определить предельное значение абсолютной погрешности, при которой относительная погрешность будет не более 1,0 %;
- выбрать подходящий диапазон измерения вольтметра.

Для того чтобы обеспечить относительную погрешность не более 1,0 % необходимо, чтобы абсолютная погрешность (3.15) при измерении  $U_{\min}$  не превышала значения

$$\pm \Delta = \pm \left( \frac{0,1 \cdot 1,0}{100} \right) = \pm 0,001 \text{ В}.$$

Диапазон измерения выбираем от 0 до 7,5 В, следовательно нормирующее значение  $X_N = 7,5 \text{ В}$ .

Таким образом, приведенная погрешность (3.5) не должна превышать значения

$$\pm \gamma = \pm \left( \frac{0,001}{7,5} \right) \cdot 100 = \pm 0,013 \text{ \%}.$$

Округляем полученное значение в меньшую сторону до стандартного числа. Таким образом, класс точности вольтметра должен быть не ниже 0,01.

*Ответ:* класс точности не ниже 0,01

**Задние 4.2.** Предполагаемый диапазон измеряемых действующих значений периодического напряжения электрической сети составляет  $U_{\min}$  до  $U_{\max}$ . Номинальная частота измеряемого напряжения равна  $T$ . Температура в эксперименте предполагается не выше  $t$ .

Необходимо определить какой из представленных приборов (таб.4.4) подходит для измерения статического напряжения, если суммарная инструментальная относительная погрешность измерения должна быть не более  $\delta$  %.

Паспортные данные приборов представлены в приложении А.

Таблица 4.4

Прибор, модель	Цена, р.
Цифровой вольтметр СВ 3010/1	25000
Цифровой вольтметр СВ 3010/2	25000
Цифровой мультиметр модель DMM4020 (Tektronix)	38000
6 1/2-разрядный мультиметр 2000 (Keithley)	54000
Вольтметр универсальный В7-77	35000

Таблица 4.5

Исходные данные

Параметр	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота напряжения $T$	50 Гц	1,5 кГц	70 Гц	80 Гц	1 кГц	40 Гц	0,5 кГц	0,45 кГц	70 кГц	60 Гц
Допускаемая погрешность $\delta$ , %	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0

Таблица 4.6

Исходные данные

Параметр		Вторая цифра варианта									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Температура $t$ , °С		+5	+10	+15	+30	+35	+40	+5	+12	+30	+10
Измеряемое напряжение, В	$U_{\min}$	0,2	10	150	200	0,6	5	60	250	500	0,25
	$U_{\max}$	0,6	25	180	240	1,5	40	150	350	550	0,5

***Рассмотрим методику решения задачи на примере.***

Исходные данные для расчетов сведем в таблицу 4.7

Таблица 4.7

Исходные данные			
Параметр	Условное обозначение	Единица измерения	Числовое значение
Минимальное измеряемое напряжение	$U_{\min}$	В	0,1
Максимальное измеряемое напряжение	$U_{\max}$	В	1,5
Частота напряжения	$T$	кГц	5
Температура	$t$	°С	+35
Допускаемая относительная погрешность измерения	$\delta$	%	5

*Решение:*

Для выбора средства измерения необходимо провести расчеты относительной погрешности каждого из анализируемых приборов.

#### *Цифровой вольтметр СВ 3010/1 и СВ 3010/1.*

Анализируя метрологические характеристики рассматриваемых приборов, представленные в таблице 2 приложения А, видно, что эти приборы различаются диапазонами измерений. Поэтому из двух приборов следует выбрать тот, у которого диапазон измерения больше подходит для заданных значений измеряемых напряжений.

В нашем случае, выбираем диапазон измерения до 7,5 В. Таким образом, из двух анализируемых приборов выбираем *вольтметр СВ 3010/1*. Для выбранного вольтметра рассчитаем погрешность измерения заданных напряжений.

В паспортных данных прибора указано, что пределы допускаемой основной приведенной погрешности измерений амперметров и вольтметров серии 3010 не превышают  $\pm 0,1 \%$  от предела измерения, т.е. у вольтметра нормирована приведенная погрешность  $\pm \gamma = \pm 0,1 \%$ .

Зная основную приведенную погрешность и нормирующее значение, можно определить значение основной абсолютной погрешности измерения по формуле (3.13):



$$\pm \Delta_o = \pm \left( \frac{0,1 \cdot 7,5}{100} \right) = \pm 0,0075 \text{ В.}$$

В паспортных данных вольтметра серии 3010 указано, что прибор тепло- и холодоустойчив и может работать в диапазоне температур от 5 до 40 °С (табл. 1, приложение А). При этом пределы допускаемой дополнительной погрешности измерений, вызванной изменением температуры окружающего воздуха от нормальной до любой температуры в рабочем диапазоне температур равны  $\pm 0,1 \%$  на каждые 10 °С изменения температуры, т.е.

$$\pm \Delta_d = \pm \left( \frac{\Delta t}{10} \cdot \Delta_o \right), \quad (4.3)$$

где  $\Delta t$  – разница между нормальной и рабочей температурой. Согласно паспортным данным (табл. 1 приложение А) у вольтметра СВ 3010/1 нормальная температура работы  $(20 \pm 2)^\circ\text{C}$ , таким образом,  $\Delta t = 35 - 22 = 13^\circ\text{C}$ .

Подставим полученные значения в формулу (4.3)

$$\pm \Delta_d = \pm \left( \frac{13}{10} \cdot 0,0075 \right) = \pm 0,00975 \text{ В.}$$

Суммарную погрешность измерения рассчитываем по формуле:

$$\pm \Delta_\Sigma = \pm \sqrt{\Delta_o^2 + \Delta_d^2}, \quad (4.4)$$

$$\pm \Delta_\Sigma = \pm \sqrt{0,0075^2 + 0,00975^2} = \pm 0,012065 \text{ В.}$$

По условию задано предельное значение относительной погрешности, поэтому при ее расчете в формулу следует подставлять наименьшее значение измеряемой величины, т.к. при наименьшем значении измеряемой величины относительная погрешность будет наибольшей. С учетом этого, относительную погрешность измерений рассчитываем по формуле:

$$\pm \delta = \pm \left( \frac{\Delta_\Sigma}{U_{\min}} \right) \cdot 100; \quad (4.5)$$

$$\pm \delta = \pm \left( \frac{0,012065}{0,1} \right) \cdot 100 = \pm 12,06 \%.$$

Полученное значение относительной погрешности значительно больше допускаемого (5 %), следовательно вольтметр СВ 3010/1 *не подходит* для измерения заданных напряжений.

### *Цифровой мультиметр DMM 4020*

Погрешность мультиметра при измерении напряжения переменного тока приведена в таблице 7 приложения А. В общем виде она задана формулой

$$\pm \Delta_O = \pm (\% \text{ показания} + \% \text{ диапазона}). \quad (4.6)$$

Для определения процентов в этой формуле по таблице 7 приложения А необходимо выбрать диапазон измерения по напряжению и частоте. В нашем случае, выбираем диапазон измерения по частоте до 2 В, по частоте от 45 Гц до 20 кГц.

Для допускаемых пределов основной абсолютной погрешности искомые значения по таблице 7 приложения А составят (0,15 + 0,05). Подставим эти значения в формулу (4.6) и получим

$$\pm \Delta_O = \pm (0,15 \% \text{ от показания} + 0,05 \% \text{ от диапазона}).$$

В качестве показания прибора следует принять наименьшее значение измеряемой величины, так как при этом значении относительная погрешность будет наибольшей, тогда

$$\pm \Delta_O = \pm \left( \frac{0,1}{100} \cdot 0,15 + \frac{2}{100} \cdot 0,05 \right) = \pm 0,00115 \text{ В.}$$

Для расчета дополнительной погрешности вызванной отклонением рабочей температуры от нормальной воспользуемся данными таблицы 7 приложения А, в которой указано, что коэффициент температуры на каждый градус отклонения за пределами (18 – 28) °С определяется по формуле (4.6), но со значениями (0,01 + 0,005). Таким образом, пределы допускаемой дополнительной абсолютной погрешности находим по формуле

$$\pm \Delta_d = \pm (0,01 \% \text{ от показания} + 0,005 \% \text{ от диапазона}) \cdot \Delta t, \quad (4.7)$$

где  $\Delta t$  – разница между нормальной и рабочей температурой, для мультиметра DMM 4020  $\Delta t = 35 - 28 = 7$  °С.

Подставим полученные значения в формулу (4.7.)

$$\pm \Delta_d = \pm \left( \frac{0,1}{100} \cdot 0,01 + \frac{2}{100} \cdot 0,005 \right) \cdot 7 = \pm 0,00077 \text{ В.}$$

Суммарную погрешность измерения рассчитываем по формуле (4.4)

$$\pm \Delta_\Sigma = \pm \sqrt{0,00115^2 + 0,00077^2} = \pm 0,001384 \text{ В.}$$

По условию задано предельное значение относительной погрешности, поэтому при ее расчете в формулу следует подставлять наименьшее значение измеряемой величины, т.к. при наименьшем значении измеряемой величины относительная погрешность будет наибольшей. С учетом этого, относительную погрешность измерений рассчитываем по формуле (4.5):

$$\pm \delta = \pm \left( \frac{0,001384}{0,1} \right) \cdot 100 = \pm 1,38 \% .$$

Полученное значение относительной погрешности меньше допускаемого (5 %), следовательно, мультиметр DMM 4020 *подходит* для измерения заданных напряжений.

#### *6 1/2-разрядный мультиметр 2000*

Погрешность мультиметра 2000 при измерении напряжения переменного тока приведена в таблице 8 приложения А. В общем виде она задана той же формулой (4.6), что и у мультиметра DMM 4020.

Для определения процентов в этой формуле по таблице 8 приложения А необходимо выбрать диапазон измерения по напряжению и частоте. В нашем случае, выбираем диапазон измерения по частоте до 10 В, по частоте от 10 Гц до 20 кГц.

Для допускаемых пределов основной абсолютной погрешности искомые значения по таблице 8 приложения А составят (0,05+0,03). Подставим эти значения в формулу (4.6) и получим

$$\pm \Delta_0 = \pm (0,05 \% \text{ от показания} + 0,03 \% \text{ от диапазона}).$$

В качестве показания прибора следует принять наименьшее значение измеряемой величины, так как при этом значении относительная погрешность будет наибольшей.

$$\pm \Delta_o = \pm \left( \frac{0,1}{100} \cdot 0,05 + \frac{10}{100} \cdot 0,03 \right) = \pm 0,00305 \text{ В.}$$

Для расчета дополнительной погрешности вызванной отклонением рабочей температуры от нормальной воспользуемся данными таблицы 8 приложения А, в которой указано, что коэффициент температуры на каждый градус отклонения за пределами (18 – 28) °С определяется по формуле (4.6), но со значениями (0,005 + 0,003). Таким образом, пределы допускаемой дополнительной абсолютной погрешности находим по формуле

$$\pm \Delta_o = \pm (0,005 \% \text{ от показания} + 0,003 \% \text{ от диапазона}) \cdot \Delta t, \quad (4.8)$$

где  $\Delta t$  – разница между нормальной и рабочей температурой, для мультиметра 2000  $\Delta t = 35 - 28 = 7$  °С.

Подставим полученные значения в формулу (4.8)

$$\pm \Delta_d = \pm \left( \frac{0,1}{100} \cdot 0,005 + \frac{10}{100} \cdot 0,003 \right) \cdot 7 = \pm 0,002135 \text{ В.}$$

Суммарную погрешность измерения рассчитываем по формуле (4.4)

$$\pm \Delta_{\Sigma} = \pm \sqrt{0,00305^2 + 0,002135^2} = \pm 0,00365 \text{ В.}$$

По условию задано предельное значение относительной погрешности, поэтому при ее расчете в формулу следует подставлять наименьшее значение измеряемой величины, т.к. при наименьшем значении измеряемой величины относительная погрешность будет наибольшей. С учетом этого, относительную погрешность измерений рассчитываем по формуле (4.5):

$$\pm \delta = \pm \left( \frac{0,00365}{0,1} \right) \cdot 100 = \pm 3,65 \% .$$

Полученное значение относительной погрешности меньше допускаемого (5 %), следовательно, мультиметр 2000 *подходит* для измерения заданных напряжений.

### *Вольтметр универсальный В7-77*

В общем виде пределы основной абсолютной погрешности измерения вольтметра В7-77 при измерении напряжения переменного тока по таблице 9 приложения А заданы формулой:

$$\pm \Delta_0 = \pm (\% \text{ от } U + \text{ед. мл. разряда}). \quad (4.9)$$

Для определения процентов в этой формуле и количества единиц младшего разряда по таблице 9 приложения А необходимо выбрать диапазон измерения по напряжению и частоте. В нашем случае, выбираем диапазон измерения по частоте до 2 В, по частоте от 10 Гц до 20 кГц.

Для допускаемых пределов основной абсолютной погрешности искомые значения по таблице 9 приложения составят (0,5 + 10). Подставим эти значения в формулу (4.9) и получим

$$\pm \Delta_0 = \pm (0,5 \% \text{ от } U + 10 \cdot \text{ед. мл. разряда}).$$

У вольтметра В7-77 В диапазоне измерения до 2 В по таблице 9 приложения А единица младшего разряда составляет 0,001 В.

В качестве показания прибора следует принять наименьшее значение измеряемой величины, так как при этом значении относительная погрешность будет наибольшей. Таким образом, основная абсолютная погрешность измерения составит

$$\pm \Delta_0 = \pm \left( \frac{0,1}{100} \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,001 \right) = \pm 0,0045 \text{ В.}$$

В паспортных данных вольтметра В7-77 указано, что пределы допускаемой дополнительной погрешности измерения при изменении температуры окружающего воздуха на каждые 10 °С в интервале рабочих температур не превышают пределов основной погрешности для каждого вида измерений, т.е. дополнительную погрешность можно определить по формуле (4.3).

Согласно паспортным данным у вольтметра В7-77 нормальная температура работы  $(20 \pm 5)^\circ\text{C}$ , таким образом,  $\Delta t = 35 - 25 = 10^\circ\text{C}$ .

Подставим полученные значения в формулу (4.3)

$$\pm \Delta_d = \pm \left( \frac{10}{10} \cdot 0,0045 \right) = \pm 0,0045 \text{ В.}$$

Суммарную погрешность измерения рассчитываем по формуле (4.4)

$$\pm \Delta_\Sigma = \pm \sqrt{0,0045^2 + 0,0045^2} = \pm 0,006364 \text{ В.}$$

По условию задано предельное значение относительной погрешности, поэтому при ее расчете в формулу следует подставлять наименьшее значение измеряемой величины, т.к. при наименьшем значении измеряемой величины относительная погрешность будет наибольшей. С учетом этого, относительную погрешность измерений рассчитываем по формуле (4.5):

$$\pm \delta = \pm \left( \frac{0,006364}{0,1} \right) \cdot 100 = \pm 6,36 \% .$$

Полученное значение относительной погрешности больше допускаемого (5 %), следовательно, вольтметр универсальный В7-77 *не подходит* для измерения заданных напряжений.

*Вывод:* Для измерения заданных напряжений можно использовать цифровой мультиметр DMM 4020 ( $\pm \delta = \pm 1,115 \%$ ) или 6 ½-разрядный мультиметр 2000 ( $\pm \delta = \pm 3,06 \%$ ), так как суммарное значение относительной погрешности измерения этих приборов не превышает предельно допускаемой погрешности ( $\pm \delta = \pm 5 \%$ ).

С учетом цены этих приборов целесообразно использовать цифровой мультиметр DMM 4020, так как его цена меньше, чем цена 6 ½-разрядный мультиметр 2000 (табл.4.4).

## 5. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

### Теоретические сведения.

*Интервальная оценка результата измерений* – способ оценивания измеренной ФВ, который заключается в определении интервала, в котором с заданной степенью достоверности будет заключено значение оцениваемого параметра [5]. *Доверительные границы погрешности результатов измерений* определяются как наибольшее и наименьшее значения погрешности измерений, ограничивающие интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение погрешности результата измерений.

Зная кривую распределения  $f(x)$  результатов наблюдений  $x$ , можно определить вероятность попадания результата наблюдения  $x$  в любой заданный интервал  $x_1, x_2$ :

$$P\{x_1 < x < x_2\} = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \quad (5.1)$$

Зная интегральную функцию распределения, вероятность попадания результата наблюдения  $x$  в указанный интервал определяют разностью значений функции распределения на границах этого интервала

$$P\{x_1 < x < x_2\} = F(x_2) - F(x_1). \quad (5.2)$$

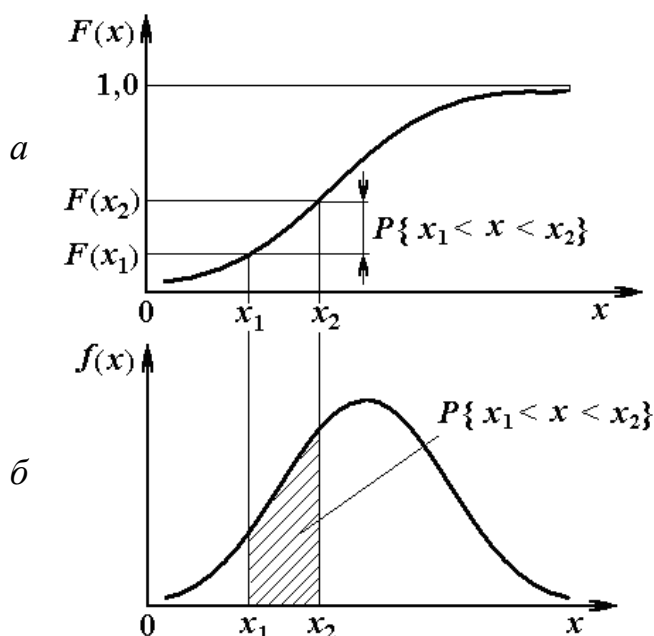


Рис. 5.1. Вероятность попадания результата наблюдений в заданный интервал  
*а* – интегральная функция; *б* – дифференциальная функция

На рисунке 5.1 показаны способы графического определения вероятностей попадания результатов наблюдения в заданный интервал от  $x_1$  до  $x_2$  по интегральной функции распределения (рис.5.1,а); по кривой распределения плотности вероятностей (рис.5.2,б). В первом случае искомая вероятность определяется разностью значений ординат, соответствующих аргументам  $x_1$  и  $x_2$ , а во втором случае – площадью под кривой распределения, ограниченной по оси  $x$  значениями  $x_1$  и  $x_2$ .

Рассмотрим три случая нахождения доверительного интервала [5].

1 Случай. Вероятность  $P$  нахождения *единичного результата измерения*  $x$  в интервале  $(x_1 = x - t_P \sigma_x; x_2 = x + t_P \sigma_x)$ , параметр  $t_P$ , соответствует вероятности  $P$ .

Полагая, что СКО известно, закон измерения нормальный можно заменить в формуле (5.2) значения  $x_1$  и  $x_2$ , тогда

$$P\{x - t_P \sigma_x < Q \leq x + t_P \sigma_x\} = \Phi(t_P) - \Phi(-t_P) = 2\Phi(t_P) - 1 \quad (5.3)$$

Это означает, что истинное значение  $Q$  измеряемой величины с доверительной вероятностью  $P = 2\Phi(t_P) - 1$  находится между границами доверительного интервала  $(x - t_P \sigma_x; x + t_P \sigma_x)$ .

Значение интегральной функции распределения, определяется по табл. 1 (см. приложение Б) по значениям  $z = t_P$ .

Итог измерения записывается в виде

$$Q = x \pm \Delta_P \text{ при } P = \dots\%, \quad (5.4)$$

где  $\Delta_P = t_P \sigma_x$  – доверительный интервал.

*Пример 5.1.* Погрешность измерения напряжения вольтметром распределена по нормальному закону. Систематическая погрешность равна нулю, среднее квадратическое отклонение (СКО) составляет  $\sigma_U = 60$  мВ. Определить вероятность того, что результат измерения отличается от истинного значения напряжения более чем на 144 мВ.



*Дано:*

ЗНР;

$\sigma_U = 60$  мВ;

$\Delta_c = 0$ ;

$\Delta_P = 144$  мВ.

*Найти:*

$$P\{|U - Q| \geq 144\} = ?$$

*Решение:*

Вероятность попадания единичного результата измерения в доверительный интервал  $\Delta_P$  определяют по формуле (5.3). Значение  $t_P$  выражаем из формулы доверительного интервала (5.4)

$$\Delta_P = \pm t_P \sigma_x \rightarrow t_P = \frac{\Delta_P}{\sigma_x}$$

$$t_P = \frac{144}{60} = 2,4.$$

По табл.1 (приложение Б), определяем значение функции для  $t_P = z = 2,4 \rightarrow \Phi(2,4) = 0,9836$ . Тогда

$$P = 2\Phi(2,4) - 1 = 2 \cdot 0,9836 - 1 = 0,9672.$$

Вероятность того, что результат измерения отличается от истинного значения напряжения, более чем на 144 мВ составит

$$P\{|U - Q| \geq 144\} = 1 - 0,9672 = 0,0328$$

Таким образом, вероятности того, что результаты измерения напряжения будут отличаться от истинного значения более чем на 144 мВ, будет составлять 3,28 %.

*Пример 5.2.* При измерении усилия динамометр показывает 1000 Н, погрешность градуировки равна  $\Delta_c = -50$  Н. Среднее квадратическое отклонение показаний  $\sigma_F = 10$  Н. Укажите доверительные границы для истинного значения измеряемого усилия с вероятностью  $P = 0,9546$ .

*Дано:*

ЗНР;

$\sigma_F = 10$  Н;

$\Delta_c = -50$  Н;

$P = 0,9546$

*Решение:*

Доверительные границы для истинного значения измеряемого усилия определяют по формуле (5.4). Зная значение вероятности  $P$ , значение  $t_P$  можно найти из интегральной функции распределения  $\Phi(t_P)$  (5.3)

Найти:

$\Delta_P = ?$

$$\Phi(t_p) = \frac{1+P}{2}; \quad (5.5)$$

$$\Phi(t_p) = \frac{1+0,9546}{2} = 0,9773$$

По табл. 1 (приложения Б) определяем значение  $z = t_p = 2,0$ , тогда  $\Delta_P = 2 \cdot 10 = 20$  Н.

Так как результат измерения содержит систематическую погрешность необходимо внести поправку, тогда исправленный результат будет

$$F_{исп} = 1000 + 50 = 1050 \text{ Н.}$$

Результат измерения запишем в виде (5.4)

$$F = (1050 \pm 20) \text{ Н, при } P = 95,46 \text{ \%}.$$

2 Случай. В случае проведения многократных измерений можно определить среднее арифметическое (оценка математического ожидания) результатов измерений. Вероятность попадания истинного значения измеряемой ФВ в заданный интервал имеет вид

$$P\left\{\bar{x} - t_p \sigma_{\bar{x}} < Q \leq \bar{x} + t_p \sigma_{\bar{x}}\right\} = P\left\{\bar{x} - \frac{t_p \sigma_x}{\sqrt{n}} < Q \leq \bar{x} + \frac{t_p \sigma_x}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t_p) - 1. \quad (5.6)$$

Вероятность  $P$  нахождения погрешности измерения среднего  $\Delta = |\bar{x} - Q|$  в заданном интервале

$$P\left\{|\Delta| < \frac{t_p \sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t_p) - 1 \quad (5.7)$$

Итог измерения записывается в виде

$$Q = \bar{x} \pm \Delta_P \text{ при } P = \dots\%, \quad (5.8)$$

где  $\Delta_P = t_p \sigma_{\bar{x}}$ .

*Пример 5.3.* Произведено 25 измерений постоянного сопротивления, рассчитано значение  $\bar{R} = 125,6$  Ом. Систематическая погрешность равна нулю,

СКО составляет  $\sigma_R = 0,4$  Ом. Определить вероятность того, что истинное значение измеряемой величины превзойдет 125,8 Ом.

*Дано:*

ЗНР;

$\bar{R} = 125,6$  Ом;

$\sigma_R = 0,4$  Ом

$\Delta_c = 0$  Ом;

$n = 25$ .

*Найти:*

$P\{Q \geq 125,8\} = ?$

*Решение:*

Вначале определим вероятность, того, что результат измерения попадет в симметричный интервал

$$\Delta_p = \pm(125,8 - 125,6) = \pm 0,2 \text{ Ом.}$$

Так как известно среднее арифметическое значение измеряемой величины и СКО, значение  $t_p$  для рассчитанного доверительного интервала определим по формуле

$$t_p = \frac{\Delta_p \cdot \sqrt{n}}{\sigma_R}; \quad (5.9)$$

$$t_p = \frac{0,2 \cdot \sqrt{25}}{0,4} = 2,5.$$

По таблице 1 (см. приложение Б) найдем значение  $\Phi(2,5) = 0,9938$ . Тогда вероятность попадания результата измерения в доверительный интервал  $\Delta_p$  определяют по формуле (5.6)

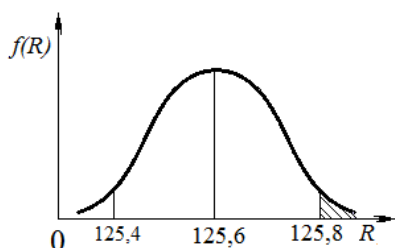
$$P = 2 \cdot 0,9938 - 1 = 0,9876.$$

Истинное значение сопротивления не превысит доверительный интервал от 125,4 до 125,8 с вероятностью 0,9876.

Теперь зная вероятность того, что истинное значение сопротивления не превысит доверительный интервал от 125,4 до 125,8, можно определить вероятность того, что истинное значение превысит 125,8 Ом (см. рис. – заштрихованная часть распределения)

$$P = \frac{1 - 0,9876}{2} = 0,0062,$$

Рисунок



т.е. вероятность того, что истинное значение измеряемой величины превзойдет 125,8 Ом составляет 0,62 %

$$P\{Q \geq 125,8\} = 0,62\%$$

*Пример 5.4.* Проведено 16 независимых измерений размера  $L$ , рассчитано значение  $\bar{L} = 20,01$  мм. Среднее квадратичное отклонение результата однократного наблюдения определено ранее и равно  $\sigma_L = 0,004$  мм. Определить границы для истинного значения с доверительной вероятностью  $P = 0,9973$ . Распределения результатов измерений описывается нормальным распределением.

*Дано:*

ЗНР;

$$\bar{L} = 20,01 \text{ мм};$$

$$\sigma_L = 0,004 \text{ мм};$$

$$P = 0,9973.$$

$$n = 16.$$

*Найти:*

$$\Delta_P = ?$$

*Решение:*

Определяем значение функции распределения  $\Phi(z)$  для заданной доверительной вероятности по формуле (5.5)

$$\Phi(z = t_P) = \frac{1 + 0,9973}{2} = 0,99865.$$

По таблице 1 (см. приложение Б) находим, что  $\Phi(z) = 0,99865$  при  $z = 3$ . Следовательно,  $t_P = z = 3$  и доверительная граница погрешности результатов измерения по формуле (5.8)

$$\Delta_P = 3 \cdot \frac{0,004}{4} = 0,003 \text{ мм}.$$

Результат измерения запишем в виде (5.8):

$$L = (20,010 \pm 0,003) \text{ мм}; P = 99,73 \text{ \%}.$$

3 Случай. Если произведено небольшое (ограниченное) число измерений, измерения предположительно распределены нормально, то вероятность нахождения действительного значения изменяемой ФВ в доверительном интервале будет определяться распределением Стьюдента

$$P\left\{\left(\bar{x} - t_P S_{\bar{x}}\right) < Q \leq \left(\bar{x} + t_P S_{\bar{x}}\right)\right\} = 2 \int_0^{t_P} S(t; k) dt, \quad (5.10)$$

где  $S(t; k)$  – дифференциальная функция распределения Стюдента, зависящая от параметра  $t_P = \frac{\bar{x} - m_x}{S_{\bar{x}}}$  и числа степеней свободы

$$k = n - 1. \quad (5.11)$$

В таблице 4 (см. приложение Б) приведены значения  $t_P$  для некоторых, наиболее часто употребляемых доверительных вероятностей  $P$ , а также вероятностей появления погрешностей, по абсолютной величине не превышающих  $t_P S_{\bar{x}}$  для  $t_P = 2; 2,5; 3$ ; и  $3,5$  (табл. 3, см. приложение Б).

Таким образом, с помощью распределения Стюдента по формуле (5.10) могут быть определены с заданной доверительной вероятностью  $P$  доверительные границы для истинного значения измеряемой величины на основании ограниченного числа наблюдений. Эти границы определяются величиной

$$\Delta_P = t_P S_{\bar{x}}. \quad (5.12)$$

Для погрешности измерения можно написать следующее соотношение:

$$P\left\{|\Delta| < t_P S_{\bar{x}}\right\} = 2 \int_0^{t_P} S(t; k) dt. \quad (5.13)$$

Итог измерения записывается в следующем виде:

$$Q = \bar{x} \pm \Delta_P \text{ при } P = \dots\%. \quad (5.14)$$

где  $\Delta_P = t_P S_{\bar{x}}$ .

При  $n > 30$  распределение Стюдента переходит в нормальное, и для оценки интервалов можно пользоваться таблицами интеграла вероятности  $\Phi(z)$ .

*Пример 5.5.* В условиях нормального распределения найдено, что среднее арифметическое результатов измерений и их СКО соответственно равны

$\bar{x} = 24,022$ ,  $S_x = 0,012$ . Число измерений  $n = 9$ . Определить вероятность того, что истинное значение лежит в интервале от 24,014 до 24,030.

*Дано:*

ЗНР;

$$\bar{x} = 24,022 ;$$

$$S_x = 0,012;$$

$$n = 9.$$

*Найти:*

$$P\{24,014 < Q \leq 24,03\} = ? \quad \text{и число степеней свободы} \quad (5.11)$$

$$k = 9 - 1 = 8.$$

Определяем доверительный интервал

$$\Delta_P = \pm \left( \frac{24,03 - 24,014}{2} \right) = \pm 0,008 .$$

Значение  $t_p$  для рассчитанного доверительного интервала определим по формуле (5.12)

$$\Delta_P = t_p S_{\bar{x}} \rightarrow t_p = \frac{\Delta_P}{S_{\bar{x}}} ;$$

$$t_p = \frac{0,008}{0,004} = 2$$

По таблице 3 (см. приложение Б) при  $t_p = 2$ ,  $k = 8$  найдем вероятность  $P = 0,9194$ . Таким образом, вероятность того, что истинное значение лежит в интервале от 24,014 до 24,030 равна 91,94 %.

$$P\{24,014 < Q \leq 24,03\} = 91,94 \% .$$

Пример 5.6. В результате девятикратных наблюдений при измерении величины  $L$  получены следующие оценки параметров распределения результатов наблюдения:  $\bar{L} = 20,001$  мм и  $S_L = 0,0004$  мм. Известно, что результаты

$L_i$  распределены нормально. Определить предельную погрешность  $\Delta_P$  на основании опытных данных с вероятностью  $P = 95 \%$ .

*Дано:*

*Решение:*

ЗНР;

Так как по условиям задачи СКО неизвестно, а рассчитана оценка СКО и число измерений  $n < 30$ , для определения  $t_p$  воспользуемся распределением Стьюдента.

$\bar{L} = 20,001$  мм;

$S_L = 0,0004$  мм;

$n = 9$ .

$P = 95 \%$ .

По таблице 4 (см. Приложение Б) определяем значение  $t_p = 2,306$  (при  $P = 0,95$ ,  $k = 9 - 1 = 8$ ). По формуле

*Найти:*

$\Delta_P = ?$

(5.12)

$$\Delta_P = 2,306 \frac{0,0004}{\sqrt{9}} = 0,0003078 \text{ мм.}$$

Результат измерения запишем в виде (5.14):

$$L = (20,0010 \pm 0,0003) \text{ мм; } P = 95 \%.$$

### Задания для самостоятельной работы

**Задние 5.1.** Погрешность измерения напряжения  $\Delta U$  распределена по нормальному закону, причем известно значение  $\sigma_U$ , и что систематическая погрешность равна нулю.

Найдите вероятность того, что результат измерения  $U$  отличается от действительного значения напряжения:

– не более чем на  $\pm \Delta_{P1}$ ;

– более чем на  $\pm \Delta_{P2}$ ;

Исходные данные по вариантам представлены в таблицах 5.1, 5.2.

Таблица 5.1

Исходные данные

Первая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma_U$ , мВ	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90

Исходные данные

Вторая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pm\Delta_{P1}$ , мВ	120	115	100	70	75	80	85	90	110	125
$\pm\Delta_{P2}$ , мВ	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.***Дано:*

ЗНР;

 $\sigma_U = 45$  мВ; $\pm\Delta_{P1} = 120$  мВ; $\pm\Delta_{P2} = 100$  мВ.*Найти:*

$$P_1 \{ |U - Q| \leq 120 \} = ?$$

$$P_2 \{ |U - Q| > 100 \} = ?$$

*Решение:*

Вероятность попадания единичного результата измерения в доверительный интервал  $\Delta_P$  определяют по формуле (5.3). Интегральная функция распределения, определяется по табл. 1 (см. приложение Б) по значениям  $z = t_P$ .

Значение  $t_P$  выражаем из формулы доверительного интервала

$$\Delta_P = \pm t_P \sigma_x \rightarrow t_P = \frac{\Delta_P}{\sigma_x}$$

$$t_{P1} = \frac{120}{45} = 2,67.$$

$$t_{P2} = \frac{100}{45} = 2,22$$

Тогда вероятность того, что результат измерения отличается от истинного значения, не более чем на 120 мВ составит

$$P_1 \{ |U - Q| \leq 120 \} = 2\Phi(2,67) - 1 = 2 \cdot 0,9962 - 1 = 0,9924.$$

Таким образом, вероятности того, что результаты измерения напряжения будут отличаться от истинного значения не более чем на 120 мВ, будет составлять 99,24 %.

Вероятность того, что результат измерения отличается от истинного значения напряжения не более чем на 100 мВ составит



$$P\{|U - Q| \leq 100\} = 2\Phi(2,22) - 1 = 0,9736$$

Вероятность того, что результат измерения отличается от истинного значения напряжения, более чем на 100 мВ составит

$$P_2\{|U - Q| > 100\} = 1 - P = 0,0264.$$

Таким образом, вероятности того, что результаты измерения напряжения будут отличаться от истинного значения более чем на 100 мВ, будет составлять 2,64 %.

**Задание 5.2.** В результате поверки амперметра установлено, что  $P$  процентов погрешностей результатов измерений, произведенных с его помощью, не превосходят  $\pm\Delta_{p1}$ , мА. Считая, что погрешности распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, найдите вероятность того, что погрешность результата измерения превзойдет  $\pm\Delta_{p2}$ , мА.

Исходные данные по вариантам представлены в таблицах 5.3, 5.4.

Таблица 5.3

Исходные данные

Первая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pm\Delta_{p1}$ , мА	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
$\pm\Delta_{p2}$ , мА	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75

Таблица 5.4

Исходные данные

Вторая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P$ , %	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.**

*Дано:*

ЗНР;

$\pm\Delta_{p1} = 20$  мА;

*Решение:*

Определяем значение функции распределения  $\Phi(z)$  для заданной доверительной вероятности  $P_1$  по формуле (5.5)

$$\pm \Delta_{P2} = 30 \text{ мА.}$$

$$P_1 = 45 \%$$

Найти:

$$P_2 \{ |I - Q| > 30 \} = ?$$

$$\Phi(t_{P1}) = \frac{1 + 0,45}{2} = 0,725.$$

По таблице 1 (см. приложение Б) находим, что

$$\Phi(t_{P1}) = 0,725 \text{ при } z = t_{P1} = 0,6.$$

Значение  $\sigma_1$  выражаем из формулы доверительного интервала (5.4)

$$\Delta_{P1} = \pm t_{P1} \sigma_1 \rightarrow \sigma_1 = \frac{\Delta_P}{t_{P1}};$$

$$\sigma_1 = \frac{20}{0,6} = 33,3$$

Зная значение среднего квадратического отклонения и доверительного интервала можно определить значение  $t_{P2}$

$$\Delta_{P2} = \pm t_{P2} \sigma_1 \rightarrow t_{P2} = \frac{\Delta_{P2}}{\sigma_1};$$

$$t_{P2} = \frac{30}{33,3} = 0,9.$$

По таблице 1 (см. приложение Б) найдем значение  $\Phi(0,9) = 0,8159$ .

Тогда вероятность попадания результата измерения в доверительный интервал  $\Delta_P$  определяют по формуле (5.3)

$$P = 2 \cdot 0,8159 - 1 = 0,6318.$$

Вероятность того, что результат измерения силы тока отличается от истинного значения более чем на 30 мА составит

$$P_2 \{ |I - Q| > 30 \} = 1 - P = 0,3682.$$

Таким образом, вероятности того, что результат измерения силы тока отличается от истинного значения более чем на 30 мА составит, будет составлять 36,82 %.

**Задание 5.3.** Произведено  $n$  измерений сопротивления. Определить доверительный интервал истинного значения сопротивления, если закон распределения нормальный с параметрами:  $\bar{R}$ ,  $\sigma_R$ . Систематическая погрешность измерения  $\Delta_c$ . при доверительной вероятности  $P_1$  и  $P_2$ . Записать результаты измерения.

Исходные данные по вариантам представлены в таблицах 5.5, 5.6.

Таблица 5.5

Исходные данные

Первая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n$	16	25	36	49	16	25	36	49	16	25
$\bar{R}$ , Ом	200	260	185	190	240	260	210	220	230	280
$\Delta_c$ , Ом	+1,0	-1,5	+2,0	-2,4	+2,2	-4,0	+2,5	-3,0	+1,5	-2,5

Таблица 5.6

Исходные данные

Вторая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma_R$ , Ом	35	22	14	18	14	22	26	20	28	30
$P_1$ , %	95	50	55	60	65	70	75	80	85	90
$P_2$ , %	85	75	65	80	90	95	50	60	65	70

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.**

*Дано:*

*Решение:*

ЗНР; Доверительный интервал истинного значения сопротивления  
 $\bar{R} = 200$  Ом; определяем по формуле (5.8). Значение  $t_p$  выражаем из функции  $\Phi(t_p)$ . Определяем значение функции распределения  $\Phi(t_p)$   
 $\sigma_R = 35$  Ом  
 $\Delta_c = +1$  Ом; для заданной доверительной вероятности по формуле (5.6)

$$n = 16; \quad \Phi(t_{P_1}) = \frac{1 + 0,95}{2} = 0,975.$$

$P_1 = 95$  %;

$$P_2 = 85$$
 %; 
$$\Phi(t_{P_2}) = \frac{1 + 0,85}{2} = 0,925$$

*Найти:*

$\pm \Delta_{P_1} - ?$  По таблице 1 (см. приложение Б) находим, что

$$\Phi(t_{P_1}) = 0,975 \text{ при } t_{P_1} = 1,96$$

$\pm\Delta_{P2} - ?$

$$\Phi(t_{P2}) = 0,925 \text{ при } t_{P2} = 1,44.$$

Тогда доверительный интервал истинного значения сопротивления составит

$$\Delta_{P1} = 1,96 \cdot \frac{35}{\sqrt{16}} = 17,15 \text{ Ом.}$$

$$\Delta_{P2} = 1,44 \cdot \frac{35}{\sqrt{16}} = 12,6 \text{ Ом.}$$

С учетом систематической погрешности результат измерения запишем в следующем виде (:

$$R = (199,00 \pm 17,15) \text{ Ом; } P = 95 \text{ \%}.$$

$$R = (199,0 \pm 12,6) \text{ Ом; } P = 85 \text{ \%}.$$

**Задание 5.4.** Произведено  $n$  измерений постоянного сопротивления, рассчитано значение  $\bar{R}$ . Систематическая погрешность равна нулю, СКО составляет  $\sigma_R$ . Определить вероятность того, что:

- истинное значение измеряемой величины превзойдет  $R_1$ ;
- истинное значение измеряемой будет не более  $R_2$ ;

Исходные данные по вариантам представлены в таблицах 5.7, 5.8.

Таблица 5.7

Исходные данные

Первая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n$	25	36	49	16	16	25	36	49	16	25
$\sigma_R$ , Ом	2,2	2,6	2,0	2,8	3,5	2,2	1,4	1,8	1,4	3,0

Исходные данные

Вторая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{R}$ , Ом	21,0	22,0	23,0	28,0	26,0	20,0	26,0	18,5	19,0	24,0
$R_1$ , Ом	21,25	22,14	23,2	28,3	26,12	20,2	26,3	18,7	19,1	24,2
$R_2$ , Ом	20,8	21,9	22,7	27,9	25,85	19,7	25,9	17,8	18,8	23,7

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.***Дано:*

ЗНР;

 $\bar{R} = 21 \text{ Ом};$  $\sigma_R = 2,2 \text{ Ом}$  $\Delta_c = 0 \text{ Ом};$  $n = 25;$  $R_1 = 21,5 \text{ Ом};$  $R_2 = 20,8 \text{ Ом}.$ *Найти:* $P_1\{Q > 21,5\} = ?$  $P_2\{Q < 20,8\} = ?$ *Решение:*

1) Определим вероятность, того, что результат измерения попадет в симметричный интервал

$$\Delta_{P1} = \pm(21,5 - 21) = \pm 0,5 \text{ Ом}.$$

Значение  $t_{P1}$  для рассчитанного доверительного интервала определим по формуле (5.9)

$$t_{P1} = \frac{0,5 \cdot \sqrt{25}}{2,2} = 1,14.$$

По таблице 1 (см. приложение Б) найдем значение  $\Phi(1,14) = 0,8729$ . Тогда вероятность попадания результата измерения в доверительный интервал  $\Delta_{P1}$  определяем по формуле (5.6)

$$P = 2 \cdot 0,8729 - 1 = 0,7458.$$

Теперь зная вероятность того, что истинное значение сопротивления не превысит доверительный интервал от 20,5 до 21,5, можно определить вероятность того, что истинное значение превысит 21,5 Ом

$$P_1\{Q > 21,5\} = \frac{1 - 0,7458}{2} = 0,1271$$

т.е. вероятность того, что истинное значение измеряемой величины превзойдет 21,5 Ом 12,71 % .

2) Определим вероятность, того, что результат измерения попадет в симметричный интервал

$$\Delta_{P_2} = \pm(21,0 - 20,8) = \pm 0,2 \text{ Ом.}$$

Значение  $t_{P_2}$  для рассчитанного доверительного интервала определим по формуле (5.9)

$$t_{P_1} = \frac{0,2 \cdot \sqrt{25}}{2,2} = 0,45.$$

По таблице 1 (см. приложение Б) найдем значение  $\Phi(0,45) = 0,6736$ . Тогда вероятность попадания результата измерения в доверительный интервал  $\Delta_{P_2}$  определяем по формуле (5.6)

$$P = 2 \cdot 0,6736 - 1 = 0,3472.$$

Теперь зная вероятность того, что истинное значение сопротивления не превысит доверительный интервал от 20,8 до 21,2, можно определить вероятность того, что истинное значение не превысит 20,8 Ом

$$P_2 \{Q < 20,8\} = \frac{1 - 0,3472}{2} = 0,3264$$

т.е. вероятность того, что истинное значение измеряемой величины не более 20,8 Ом составляет 32,64 % .

*Задание 5.5.* Определение удельных магнитных потерь для различных образцов одной партии электротехнической стали марки 2212 дало следующие результаты:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  Вт/кг. Считая, что систематическая погрешность отсутствует, а случайная распределена по нормальному закону, требуется определить доверительный интервал при значениях доверительной вероятности  $P$ .

Исходные данные по вариантам представлены в таблицах 5.9, 5.10.

Таблица 5.9

Исходные данные

Первая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_1$ , Вт/кг	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30
$x_2$ , Вт/кг	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26
$x_3$ , Вт/кг	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27

Таблица 5.10

Исходные данные

Вторая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_4$ , Вт/кг	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,22
$x_5$ , Вт/кг	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24
$P$ , %	60	65	70	75	80	85	90	95	99	98

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.***Дано:*

ЗНР;

 $x_1 = 1,21$  Вт/кг; $x_2 = 1,17$  Вт/кг; $x_3 = 1,18$  Вт/кг; $x_4 = 1,19$  Вт/кг; $x_5 = 1,15$  Вт/кг; $P = 60$  %.*Найти:* $\pm \Delta_P - ?$ *Решение:*

За результат измерения примем среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (5.16)$$

где  $n$  – количество результатов наблюдений.

$$\bar{x} = \frac{1}{5} (1,21 + 1,17 + 1,18 + 1,19 + 1,15) = 1,18 \text{ Вт/кг};$$

Так как по условиям задачи СКО неизвестно, то можно рассчитать оценку среднего квадратичного отклонения измеряемой величины по формуле

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad (5.17)$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{5-1} (1,21-1,18)^2 + (1,17-1,18)^2 + (1,18-1,18)^2 + (1,19-1,18)^2 + (1,15-1,18)^2} = 0,0223 \text{ Вт/кг};$$

Так как число измерений  $n < 30$  и СКО по условиям задачи было не известно, для определения  $t_p$  воспользуемся распределением Стьюдента.

По таблице 4 (см. приложение Б) определяем значение  $t_p = 0,941$  (при  $P = 0,60$ ,  $k = 5 - 1 = 4$ ). По формуле (5.12)

$$\Delta_p = 0,941 \frac{0,0223}{\sqrt{5}} = 0,0938 \text{ Вт/кг.}$$

Результат измерения запишем в следующем виде (5.14):

$$x = (1,18 \pm 0,09) \text{ мм; } P = 60 \text{ \%}.$$

**Задание 5.6.** Погрешность результата измерения тока распределена по закону Симпсона в интервале от  $\Delta_1$  до  $\Delta_2$ . Определите систематическую погрешность  $\Delta_c$  и СКО результата измерения.

Исходные данные по вариантам представлены в таблицах 5.11, 5.12.

Таблица 5.11

Исходные данные

Первая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta_1$ , мА	-6	-10,	-12	-14	-8	-4	-6	-10	-2	-3

Таблица 5.12

Исходные данные

Вторая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta_2$ , мА	+12	+14	+10	+14	+6	+12	+14	+10	+14	+15

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.**

*Дано:*

Закон Симпсона;

$\Delta_1 = -6 \text{ мА};$

$\Delta_2 = +12 \text{ мА};$

*Найти:*

$\Delta_c - ?$

$\sigma_I - ?$

*Решение:*

Систематическая погрешность равна математическому ожиданию, которое для равномерного закона распределения определяется по формуле

$$m_{\Delta} = \Delta_c = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}; \quad (5.17)$$

$$m_{\Delta} = \Delta_c = \frac{(-6 + 12)}{2} = +3 \text{ мА.}$$

Среднее квадратическое отклонение погрешность для закона распределения Симпсона определяется по фор-



муле

$$\sigma_I = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2\sqrt{6}}. \quad (5.18)$$

$$\sigma_\Delta = \frac{(12 + 6)}{2\sqrt{6}} = 3,67 \text{ мА}.$$

Ответ:  $\Delta_c = +3 \text{ мА}$ ;  $\sigma_I = 3,67$ .

**Задание 5.7.** Погрешность результата измерения тока распределена равномерно в интервале от  $\Delta_1$  до  $\Delta_2$ . Найдите вероятность того, что погрешность результата измерения лежит в диапазоне от  $\Delta_H$  до  $\Delta_B$ .

Исходные данные по вариантам представлены в таблицах 5.13, 5.14.

Таблица 5.13

Исходные данные

Первая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta_1$ , мА	-10	-12	-14	-8	-6	-10	-12	-14	-8	-6
$\Delta_2$ , мА	+8	+10	+12	+14	+10	+14	+6	+12	+14	+10

Таблица 5.14

Исходные данные

Вторая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta_H$ , мА	-4,0	-4,5	-3,0	-3,5	-5,0	-5,5	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0
$\Delta_B$ , мА	+3,5	+5,0	+5,5	+2,5	+2,0	+1,5	+1,0	+4,0	+4,5	+3,0

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.**

*Дано:*

Равномерный закон;

$\Delta_1 = -10 \text{ мА}$ ;

$\Delta_2 = +8 \text{ мА}$ ;

$\Delta_H = -4 \text{ мА}$ ;

$\Delta_B = +3,5 \text{ мА}$ .

*Найти:*

$$P\{-4 < |Q - I| \leq +3,5\} = ?$$

*Решение:*

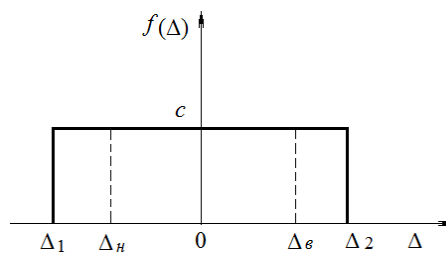
Вероятность попадания погрешности в заданный интервал определяется из соотношения

$$P\{\Delta_H \leq \Delta \leq \Delta_B\} = \int_{\Delta_H}^{\Delta_B} f(\Delta) d\Delta = \int_{\Delta_H}^{\Delta_B} c d\Delta = c(\Delta_B - \Delta_H), \quad (5.19)$$

где  $c = 1/(\Delta_2 - \Delta_1)$  – высота закона распределений.

Следовательно,

Рисунок



$$P\{-4 < |Q - I| \leq +3,5\} = \frac{3,5 + 4}{8 + 10} = 0,42.$$

*Ответ:* Вероятность попадания погрешности в интервал от  $-4$  мА до  $+3,5$  мА составляет 42 %.

## 6. ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С МНОГОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

### *Общая методика обработки прямых измерений с многократными наблюдениями*

Исходной информацией для обработки является ряд из  $n$  ( $n > 4$ ) результатов измерений  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , который называется выборка. Число  $n$  зависит как от требований к точности получаемого результата, так и от реальной возможности выполнять повторные измерения.

При статистической обработке группы результатов наблюдений выполняют ряд последовательных операций.

1. Определяют систематические погрешности, которые исключаются из полученных результатов наблюдений с помощью введения поправок.

2. Для исправленных результатов наблюдений вычисляют среднее арифметическое, приравнивая его к истинному значению измеряемой ФВ.

2. Вычисляют оценку СКО результатов наблюдений  $S_x$  и оценку СКО среднего арифметического.

3. Проверяют результаты измерений на наличие грубых погрешностей и промахов.

4. Проверяют гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению.

5. Вычисляют доверительные (интервальные) границы случайной погрешности результата измерения (случайной составляющей погрешности) при заданной вероятности.

6. Вычисляют границы неисключенной систематической погрешности  $\theta$  (неисключенных остатков систематической погрешности) результата измерения.

7. Вычисляют доверительные границы суммарной погрешности результата измерения.

8. Результат измерения записывают в виде

$$Q = \bar{x} \pm \Delta_{\Sigma} (P; n). \quad (6.1)$$

При отсутствии данных о видах функции распределения составляющей погрешности результата или при необходимости дальнейшей обработки результат измерения представляют в форме

$$Q = \bar{x} (S_x; n; \theta). \quad (6.2)$$

### ***Задание для самостоятельной работы.***

**Задание 6.1.** Цифровым измерителем иммитанса Е7-14 проводились прямые многократные измерения сопротивления магазина сопротивлений марки Р33, номинальное значение которого равно 0,1 Ом. Измерения проводились в диапазоне рабочих температур измерителя иммитанса.

Получены результаты измерения  $R_i$ , мОм.

Проведенные измерения характеризуются неисключенной систематической погрешностью, задаваемой пределом допускаемого значения:

основной погрешности измерения измерителя Е7–14, определяемой по формуле (для диапазона измерения от 0,1 ... 1000 мОм)

$$\theta_{осн} = 10^{-3} (1 + Q) R + 3 \cdot 10^{-4} R_k, \quad (6.3)$$

где  $Q$  – добротность катушки сопротивления (для данного магазина сопротивлений добротность  $Q = 0$ );  $R_k$  – конечное значение диапазона, Ом;

дополнительной погрешности измерения в диапазоне рабочих температур, которая задана формулой

$$\theta_{\text{доп}} = k\theta_{\text{осн}}, \quad (6.4)$$

где  $k$  – множитель, определяемый по таблице 6.1.

Таблица 6.1

Значение множителя  $k$  для расчета дополнительной погрешности Е7–14

Вторая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Множитель $k$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,2

Для устранения влияния соединительных проводов и переходных сопротивлений контактов был проведен ряд измерений при нулевом значении магазина сопротивлений. Получены результаты измерения  $R_{0i}$ , мОм.

Требуется провести обработку результатов наблюдений:

- определить и исключить систематические погрешности;
- для исправленных результатов наблюдений вычислить среднее арифметическое значение, оценку СКО результатов наблюдений и оценку СКО среднего арифметического;
- проверить результаты измерений на наличие грубых погрешностей и промахов;
- проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению;
- вычислить доверительные (интервальные) границы случайной погрешности результата измерения;
- вычислить границы неисключенной систематической погрешности  $\theta$ ;
- вычислить доверительные границы суммарной погрешности результата измерения и записать результат измерения.

Уровень значимости проверки гипотез принять  $q = 0,05$ , доверительные границы при расчете погрешностей  $P_0 = 0,95$ .

Исходные данные по вариантам приведены в таблицах 6.2 – 6.4.

Таблица 6.2

Исходные данные

Результаты измерения $R_i$	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	145,36	145,37	145,38	145,38	145,36	145,37	145,36	145,37	145,36	145,38
2	145,38	145,37	145,38	145,39	145,37	145,38	145,37	145,38	145,36	145,38
3	145,39	145,38	145,39	145,39	145,38	145,39	145,38	145,39	145,37	145,39
4	145,39	145,40	145,40	145,40	145,39	145,40	145,38	145,40	145,38	145,39
5	145,39	145,41	145,41	145,40	145,40	145,40	145,39	145,40	145,39	145,39
6	145,40	145,42	145,41	145,41	145,40	145,41	145,40	145,41	145,40	145,40
7	145,41	145,42	145,42	145,41	145,41	145,42	145,41	145,42	145,41	145,41

Таблица 6.3

Исходные данные

Результаты измерения $R_i$	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	145,43	145,44	145,45	145,43	145,44	145,45	145,43	145,44	145,45	145,43
9	145,43	145,44	145,45	145,44	145,45	145,46	145,44	145,46	145,46	145,45
10	145,44	145,45	145,46	145,45	145,46	145,46	145,45	145,47	145,46	145,45
11	145,45	145,46	145,46	145,46	145,46	145,47	145,46	145,47	145,47	145,46
12	145,46	145,47	145,47	145,47	145,47	145,48	145,47	145,48	145,48	145,47
13	145,46	145,48	145,47	145,48	145,48	145,48	145,48	145,48	145,48	145,48
14	145,47	145,48	145,48	145,48	145,48	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49
15	145,48	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49
16	145,48	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49

Таблица 6.4

Исходные данные

Результаты измерения $R_{0i}$	Вторая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	45,28	45,22	45,24	45,23	45,25	45,15	45,13	45,14	45,13	45,17
	45,30	45,28	45,28	45,26	45,28	45,18	45,16	45,18	45,19	45,11
	45,31	45,33	45,31	45,32	45,32	45,22	45,22	45,21	45,23	45,12
	45,32	45,34	45,33	45,36	45,35	45,25	45,26	45,23	45,24	45,14
	45,35	45,35	45,34	45,37	45,37	45,27	45,27	45,24	45,25	45,15

***Рассмотрим методику решение задачи на примере.***

*Исходные данные:*

- результаты измерения  $R_i$ : 145,44; 145,36; 145,43; 145,38; 145,44; 145,42; 45,41; 145,39; 145,40; 145,41; 145,45; 145,43; 145,46; 145,37; 145,48; 145,48 мОм.
- результаты измерения  $R_{0i}$ : 45,30; 45,29; 45,28; 45,31 45,26 мОм.

*Решение:*

***1. Определение систематической погрешности.***

Систематическая погрешность измерения сопротивления состоит из трех составляющих, обусловленных:

ненулевым значением сопротивления соединительных проводов и переходных контактов зажимов используемых средств измерений;

основной и дополнительной погрешностями измерителя иммитанса Е7–14.

Первая из них может быть оценена исходя из данных измерений нулевого сопротивления магазина. Полученный ряд данных характеризуется средним арифметическим значением и оценкой его СКО:

$$\overline{R_0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{0i} ; \quad (6.5)$$

$$S_{\overline{R_0}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (R_{0i} - \overline{R_0})^2} , \quad (6.6)$$

где  $n$  – количество измерений;  $\overline{R_0}$  – среднее арифметическое значение нулевого сопротивления магазина, мОм;  $S_{\overline{R_0}}$  – оценка СКО нулевого сопротивления магазина, мОм.

Для удобства расчетов составим таблицу 6.5.

Таблица 6.5

Расчет среднего арифметического значения и оценки СКО сопротивления соединительных проводов и переходных контактов зажимов

$R_{0i}$	$R_{0i} - \overline{R_0}$	$(R_{0i} - \overline{R_0})^2$
45,26	-0,028	0,000784
45,28	-0,008	0,000064

45,29	0,002	0,000004
45,30	0,012	0,000144
45,31	0,022	0,000484
$\Sigma R_{0i} = 226,44$		$\Sigma (R_{0i} - \bar{R}_0)^2 = 0,0148$

$$\bar{R}_0 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 R_{0i} = 45,288 \text{ мОм};$$

$$S_{\bar{R}_0} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \sum_{i=1}^5 (R_{0i} - 45,288)^2} = 0,0086 \text{ мОм}.$$

Сопротивление проводов постоянно присутствует в результатах измерений и по своей сути является систематической погрешностью, которая может быть исключена из результатов измерений путем введения поправки, равной  $\theta = -45,288 \text{ мОм}$ .

После введения поправки получается исправленный ряд значений сопротивления  $R_{ui}$ : 100,072; 100,082; 100,092; 100,102; 100,112; 100,122; 100,122; 100,132; 100,142; 100,142; 100,152; 100,152; 100,162; 100,172; 100,192; 100,192 мОм.

## 2. Определение среднего арифметического и оценки СКО исправленных результатов.

Среднее арифметическое исправленных значений сопротивления и его оценку СКО определяем по формуле:

$$\bar{R}_u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{ui}; \quad (6.7)$$

$$S_{\bar{R}_u} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (R_{ui} - \bar{R}_u)^2}. \quad (6.8)$$

где  $R_{ui}$  – значений сопротивления исправленного ряда, мОм;  $S_{\bar{R}_u}$  – оценка СКО среднего арифметического исправленных значений сопротивления, мОм.

Для удобства расчетов составим таблицу 6.6.

Таблица 6.6

Расчет среднего арифметического значения и оценки СКО сопротивления магазина сопротивлений (по исправленному ряду значений)

$R_{ui}$	$R_{ui} - \bar{R}_u$	$(R_{ui} - \bar{R}_u)^2$
100,072	-0,058	0,003364

100,082	-0,048	0,002304
100,092	-0,038	0,001444
100,102	-0,028	0,000784
100,112	-0,018	0,000324
100,122	-0,008	0,000064
100,122	-0,008	0,000064
100,132	0,002	0,000004
100,142	0,012	0,000144
100,142	0,012	0,000144
100,152	0,022	0,000484
100,152	0,022	0,000484
100,162	0,032	0,001024
100,172	0,042	0,001764
100,192	0,062	0,003844
100,192	0,062	0,003844
$\Sigma R_{ui} = 1602,14$		$\Sigma (R_{ui} - \bar{R}_u)^2 = 0,02008$

$$\bar{R}_u = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} R_{ui} = 100,1339 \text{ МОм};$$

$$S_{\bar{R}_u} = \sqrt{\frac{1}{16 \cdot (16-1)} \sum_{i=1}^{16} (R_{ui} - 100,1339)^2} = 0,009148 \text{ МОм}.$$

Оценка СКО исправленных результатов измерений определяем по формуле:

$$S_{R_u} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_{ui} - \bar{R}_u)^2} ; \quad (6.9)$$

$$S_{R_u} = \sqrt{\frac{1}{16-1} \sum_{i=1}^n (R_{ui} - 100,1339)^2} = 0,03543 \text{ МОм}.$$

**3. Проверка результатов измерений на наличие грубых погрешностей.** Для проверки результатов измерений на наличие грубых погрешностей используем критерий Романовского [13].

Вычисляем отношение

$$\left| \frac{\bar{R}_u - R_{ui}}{S_{R_u}} \right| = \beta \quad (6.10)$$

и полученное значение  $\beta$  сравниваем с теоретическим  $\beta_T$  при заданном уровне значимости  $q$  (табл. 6.7). Если полученное значение  $\beta \geq \beta_T$ , результат измере-



ния исключают и проверяют следующий и т.д. По новой выборке заново проводят все расчеты.

Таблица 6.7

Таблица значений  $\beta_T = f(n)$

Уровень значимости $q$	Число измерений, $n$						
	4	5	8	10	12	15	20
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	2,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,45	2,62

Для нашего примера при уровне значимости  $q = 1 - P = 0,01$  и  $n = 16$ , табличный коэффициент  $\beta_T = 2,64$ .

Проверим крайние значения результатов измерения  $R_{\text{umax}}$  и  $R_{\text{umin}}$

$$\left| \frac{100,1339 - 100,072}{0,03543} \right| = 1,75 < 2,64;$$

$$\left| \frac{100,1339 - 100,192}{0,03543} \right| = 1,64 < 2,64,$$

т.е. все результаты измерений приняты.

#### **4. Проверка гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению.**

Для проверки гипотезы используем составной критерий [4], т.к. число измерений  $n = 16$ . Уровень значимости проверки гипотез принять в зависимости от варианта по таблице 6.8.

Таблица 6.8

Первая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_1$	0,02	0,1	0,2	0,02	0,1	0,2	0,02	0,1	0,2	0,02
Вторая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_2$	0,02	0,01	0,05	0,02	0,01	0,05	0,02	0,01	0,05	0,02

В нашем примере уровень значимости проверки гипотез принимаем  $q_1 = q_2 = 0,02$ .

Вычисляем статистику по формуле

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |R_{ui} - \overline{R_u}|}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n (R_{ui} - \overline{R_u})^2}}. \quad (6.11)$$

Квантили (квантиль – абсцисса, соответствующая определенной вероятности) распределения которых приведены в таблице 6.9.

Таблица 6.9

$n$	$d_{0,01}$	$d_{0,05}$	$d_{0,1}$	$d_{0,90}$	$d_{0,95}$	$d_{0,99}$
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,8733	0,7452	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,8631	0,7495	0,7304	0,6905
26	0,8901	0,8686	0,8570	0,7530	0,7360	0,7040
31	0,8827	0,8625	0,8511	0,7559	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,8468	0,7583	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,8436	0,7604	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,8409	0,7621	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,8385	0,7636	0,7518	0,7291

Если при данном числе измерений  $n$  и выбранном уровне значимости  $q_1$  соблюдается условие

$$d_{1-0,5q} < d \leq d_{0,5q}, \quad (6.12)$$

то гипотеза о нормальности распределения на основании первого критерия принимается, если – нет, то отвергается.

В нашем случае по формуле

$$d = \frac{0,474}{\sqrt{16 \cdot 0,02008}} = 0,8362.$$

Из табл. 6.9 для  $n = 16$  и  $q_1 = 0,02$  находим квантили  $d_{0,01} = 0,9137$  и  $d_{0,99} = 0,6829$ .

Сравнение статистики  $d$  с квантилями показывает, что  $0,6829 < d = 0,8362 < 0,9137$ . Это означает, что в соответствии с первым критерием (при уровне значимости 0,02) результаты измерений распределены по нормальному закону.

Гипотеза по второму критерию принимается, если не более  $m$  абсолютных разностей результатов измерений  $|R_{ui} - \overline{R_u}|$  при заданном уровне значимости, превышают значение

$$t_p \cdot S_{Ru}, \quad (6.13)$$

где  $t_p$  – квантиль, соответствующая интегральной функции нормированного нормального распределения  $\Phi(t_p) = 0,5(1 + P)$ , определяемая по табл. 1 или 2 (приложение Б). Величина  $P$  находится при заданном уровне значимости  $q_2$  по данным табл. 6.10.

Таблица 6.10

$n$	$m$	$P$ при уровне значимости $q$ , равном		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,96
11 – 14	1	0,99	0,98	0,97
15 – 20	1	0,99	0,99	0,98
21 – 22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
23 – 27	2	0,98	0,98	0,97
28 – 32	2	0,99	0,98	0,97
33 – 35	2	0,99	0,98	0,98
36 – 49	2	0,99	0,99	0,98

При  $q_2 = 0,02$ ,  $n = 16$  по табл. 6.10 находим  $P = 0,99$ ,  $m = 1$ . По табл. 2 (приложения Б) для  $\Phi(t_p) = 0,995$  значение  $t_p = 2,575$  и значение допускаемого уровня (6.13)

$$2,575 \cdot 0,03543 = 0,09123.$$

Анализ результатов измерений, приведенных в таблице 6.6, показывает, что ни один из результатов не превышает 0,09123, поэтому распределение результатов наблюдений можно считать близким к нормальному в соответствии со вторым критерием при уровне значимости 0,02.

Таким образом, оба критерия говорят о том, что распределение результатов измерений с уровнем значимости  $q \leq q_1 + q_2 = 0,04$  можно признать нормальным.

##### **5. Определение доверительных границ случайной погрешности.**

Случайную составляющую погрешности измерений определяем по формуле

$$\overset{\circ}{\Delta}_p(\overline{R}_u) = t_p S_{\overline{R}_u}; \quad (6.14)$$

где  $t_p$  – величина, определяемая по таблице 4 (см. приложение Б), для  $P_\delta = 0,95$  и  $k = 15$ , это значение  $t_p = 2,131$ .

$$\overset{\circ}{\Delta}_{0,95}(\overline{R_u}) = 2,131 \cdot 0,009148 = 0,0195 \text{ мОм.}$$

Доверительный интервал погрешности измерения сопротивления проводов определяем по формуле

$$\overset{\circ}{\Delta}_P(\overline{R_0}) = t_p S_{\overline{R_0}}, \quad (6.15)$$

где  $t_p$  – величина определяемая по таблице 4 (см. приложение Б), для  $P_\delta = 0,95$  и  $k = 4$ , это значение  $t_p = 2,776$ .

$$\overset{\circ}{\Delta}_{0,95}(\overline{R_0}) = 2,776 \cdot 0,034409 = 0,095176 \text{ мОм.}$$

Эту погрешность можно рассматривать двояко: как неисключенную систематическую погрешность и как составляющую случайной погрешности.

Случайные погрешности измерений исследуемого сопротивления и сопротивления подводящих проводов можно считать некоррелированными, так как измерения проводились в разное время. Поэтому суммарную случайную погрешность определяем по формуле

$$\overset{\circ}{\Delta}_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^m \overset{\circ}{\Delta}_i^2}, \quad (6.16)$$

где  $\overset{\circ}{\Delta}_\Sigma$  – суммарная случайная погрешность измерения, мОм;  $\overset{\circ}{\Delta}_i$  – границы  $i$ -й элементарной случайной погрешности, мОм.

$$\overset{\circ}{\Delta}_{0,95} = \sqrt{0,0195^2 + 0,095176^2} = 0,097153 \text{ мОм.}$$

## **6. Определение доверительных границ неисключенной систематической погрешности.**

Обычно эта погрешность образуется из ряда составляющих: погрешности метода и средства измерения, субъективной погрешности и т.д. При суммировании эти составляющие рассматривают как случайные величины. При отсутствии информации о законе распределения неисключенных составляющих систематических погрешностей, их распределения принимают за равно-

мерные, и границы неисключенной систематической погрешности результата измерения вычисляют по формуле

$$\theta_{\Sigma} = \begin{cases} k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2}, & \text{если } k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i}, \\ \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i}, & \text{если } k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i}, \end{cases} \quad (6.17)$$

где  $\theta_i$  – границы  $i$ -й элементарной случайной погрешности;  $k$  – поправочный коэффициент, зависящий от числа слагаемых  $m$ , их соотношения и доверительной вероятности. При  $P < 0,99$  он мало зависит от числа слагаемых и может быть представлен усредненными значениями, приведенными в таблице 6.11.

Таблица 6.11

Зависимость коэффициента  $k$  от  $P$  и  $m$

$P$	Значение $k$ при $m$					Среднее значение
	2	3	4	5	$\infty$	
0,90	0,97	0,96	0,95	0,95	0,95	0,95
0,95	1,10	1,12	1,12	1,12	1,13	1,1
0,99	1,27	1,37	1,41	1,42	1,49	1,4

Составляющую систематической погрешности, обусловленную основной погрешностью измерителя иммитанса Е7–14, рассчитываем по формуле (6.3). В формуле (6.3) за измеряемое значение  $R$  принимаем  $\overline{R_n}$  – среднее арифметическое значений ряда неисправленных показаний измерителя иммитанса, Ом.

Среднее арифметическое значение ряда неисправленных показаний измерителя иммитанса определяем по формуле

$$\overline{R_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i. \quad (6.18)$$

$$\overline{R_i} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} R_i = 145,4219 \text{ мОм.}$$

Следовательно, систематическая погрешность, обусловленная основной погрешностью Е7–14 по формуле (6.3) составит:

$$\theta_{осн} = 0,145422 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} = 0,0004454 \text{ Ом.}$$

Систематическую погрешность, обусловленную дополнительной погрешностью средства измерений определяем по формуле (6.4). В нашем случае принимаем  $k = 2$ , тогда

$$\theta_{доп} = 2\theta_{осн}; \quad (6.19)$$

$$\theta_{доп} = 2 \cdot 0,4454 = 0,8908 \text{ мОм.}$$

Суммарную систематическую погрешность определяем по формуле (6.17)

$$\theta_{\Sigma} = 1,10 \sqrt{(0,4454)^2 + (0,8908)^2} = 1,10 \sqrt{0,9919} = 1,0955 \text{ мОм.}$$

## **7. Определение доверительных границ суммарной погрешности результата измерения.**

Вычисляют доверительные границы суммарной погрешности результата измерения:

если  $\theta_{\Sigma} / S_{\overline{R_u}} < 0,8$ , то границы погрешности результата измерения принимаются равными случайной погрешности,  $\Delta_{\Sigma} = \overset{\circ}{\Delta}_{\Sigma}$ ;

если  $\theta_{\Sigma} / S_{\overline{R_u}} > 8$ , то границы погрешности результата измерения принимаются равными систематической погрешности,  $\Delta_{\Sigma} = \theta_{\Sigma}$ ;

если  $0,8 \leq \theta_{\Sigma} / S_{\overline{R_u}} \leq 8$ , то общую погрешность измерения определяют по формуле

$$\Delta_{\Sigma} = K \cdot S_{\Sigma}, \quad (6.20)$$

где  $K$  – коэффициент, зависящий от соотношения  $\overset{\circ}{\Delta}_{\Sigma}$  и  $\theta_{\Sigma}$ ;  $S_{\Sigma}$  – оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерений;

$$K = \frac{\overset{\circ}{\Delta}_{\Sigma} + \theta_{\Sigma}}{S_{\overline{R_u}} + \sqrt{\frac{\theta_{\Sigma}^2}{3}}}; \quad (6.21)$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\frac{\theta_{\Sigma}^2}{3} + S_{\overline{R_u}}^2}. \quad (6.22)$$

В нашем случае  $\theta_{\Sigma} / S_{\overline{R_u}} = 1,095/0,009148 = 119 > 8$ .

Из полученных данных видно, что систематическая погрешность значительно больше случайной, поэтому, последнюю можно не учитывать.

Результат измерения записываем в виде (6.1)

$$R = (100,1 \pm 1,1) \text{ мОм при } P = 0,95, n = 16$$

**Задание 6.2.** При проведении поверки рабочего средства измерений проводили прямые многократные измерения образцовой величины  $Z$  в количестве  $n = 100$  раз. Действительное значение измеряемой величины усиливалось в  $K$  раз, поэтому при ее определении требуется корректировка на величину множителя  $\phi$ .

Требуется провести обработку результатов наблюдений:

- определить и исключить систематические погрешности;
- построить укрупненный статистический ряд для исправленных результатов наблюдений;
- определить среднее арифметическое значение, оценку СКО результатов наблюдений и оценку СКО среднего арифметического;
- проверить результаты измерений на наличие грубых погрешностей и промахов;
- проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению;
- определить доверительные границы результата измерения;
- записать результат измерения.

Уровень значимости проверки гипотез принять  $q = 0,05$ , доверительные границы при расчете погрешностей  $P_{\delta} = 0,95$ .

Исходные данные приведены в таблицах 6.12 и 6.13.

Таблица 6.12

Показатель	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Образцовая величина $Z$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100





9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9;  
 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0;  
 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0;  
 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,0; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1;  
 10,1; 10,1; 10,2; 10,2; 10,2 Ом.

### **1. Определение систематической погрешности.**

В общем случае, если известна величина  $Z$ , воздействующая на прибор, с точностью в три и более раз превышающей точность самого прибора (например, образцовая, эталонная), то систематическую погрешность определяем по формуле

$$\Delta_c = \bar{x} - Z, \quad (6.23)$$

где  $\bar{x}$  – среднее арифметическое значение неисправленного ряда наблюдений, Ом.

Среднее арифметическое значение неисправленного ряда наблюдений определяем по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (6.24)$$

В нашем случае значение неисправленного ряда наблюдений:

$$\bar{x} = (9,6 \cdot 5 + 9,7 \cdot 12 + 9,8 \cdot 21 + 9,9 \cdot 25 + 10,0 \cdot 23 + 10,1 \cdot 11 + 10,2 \cdot 3) / 100 = 9,894 \text{ Ом.}$$

Тогда систематическая погрешность по формуле (6.23) составит

$$\Delta_c = 9,894 - 10,0 = -0,106 \text{ Ом.}$$

Систематическая погрешность должна быть исключена из результатов измерений путем введения поправки. Поправка берется равной систематической погрешности с обратным знаком, в нашем случае  $\Delta_n = 0,106$  Ом.

После введения поправки получается исправленный ряд значений  $x_{ui}$ :

9,706; 9,706; 9,706; 9,706; 9,706; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806;  
 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,806; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906;  
 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906; 9,906;

9,8906; 9,906; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006;  
 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006;  
 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,006; 10,106; 10,106; 10,106;  
 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106;  
 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106; 10,106;  
 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206; 10,206;  
 10,206; 10,306; 10,306; 10,306 Ом.

## 2. Построение укрупненного статистического ряда.

Для удобства обработки результатов наблюдений построим укрупненный статистический ряд.

Определяем область изменения признака (размах выборки):

$$R = x_{\max} - x_{\min}, \quad (6.25)$$

где  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  – наибольшее и наименьшее показания прибора при измерениях.

Для нашего примера

$$R = 10,306 - 9,706 = 0,6 \text{ Ом.}$$

Число классов (интервалов) укрупненного статистического ряда  $m$  определяют по формуле [...]:

$$m_{\min} = 0,55 \cdot n^{0,4}; \quad (6.26)$$

$$m_{\max} = 1,25 \cdot n^{0,4}. \quad (6.27)$$

В нашем случае число классов укрупненного статистического ряда  $m$ :

$$m_{\min} = 0,55 \cdot 100^{0,4} = 3,47;$$

$$m_{\max} = 1,25 \cdot 100^{0,4} = 7,88.$$

Примем  $m = 7$ .

Определяем ширину класса (интервал):

$$d = \frac{R}{m}, \quad \text{при условии } dm \geq R. \quad (6.28)$$

Значение  $d$  округляем в большую сторону со значащими цифрами, как и у выборки (или в два раза точнее). Тогда:

$$d = 0,6/7 = 0,086, \text{ примем } d = 0,1 \text{ Ом.}$$

Строим таблицу укрупненного статистического ряда (табл. 6.16). В первой строке таблицы записываем номера классов укрупненного ряда  $1...j...m$ . Во второй строке располагаем наибольшие и наименьшие значения результатов наблюдений для каждого класса. Наименьшее значение первого класса приравниваем к наименьшему значению выборки:  $x_{1\min} \leq x_{\min}$  (примем  $x_{1\min} = 9,656$  Ом, чтобы величина 9,706 стала серединой класса); наибольшее значение первого класса получается так:  $x_{1\min} + d = x_{1\max}$ . Для всех классов последовательность выбора повторяем:  $x_{2\min} = x_{1\max}$  и  $x_{2\max} = x_{2\min} + d$ ;  $x_{3\min} = x_{2\max}$  и  $x_{3\max} = x_{3\min} + d$ ;  $x_{4\min} = x_{3\max}$  и  $x_{4\max} = x_{4\min} + d$  и т.д.

Таблица 6.16

Параметры статистического ряда,  
эмпирического и теоретического распределений

Номер класса $m$		1	2	3	4	5	6	7	$\Sigma$
Границы класса	$x_{j\min}$	9,656	9,756	9,856	9,956	10,056	10,156	10,256	–
	$x_{j\max}$	9,756	9,856	9,956	10,056	10,156	10,256	10,356	–
Средняя точка класса $x_j$		9,706	9,806	9,906	10,006	10,106	10,206	10,306	–
Частота $n_j$		5,000	12,000	21,000	25,000	23,000	11,000	3,000	100,00
Относительная частота $P_j^*$		0,050	0,120	0,210	0,250	0,230	0,110	0,030	1,00
$(x_j - \bar{x})$		-0,294	-0,194	-0,094	0,006	0,106	0,206	0,306	–
$P_j^* (x_j - \bar{x})^2$		0,00432	0,00452	0,0010	0	0,0026	0,0047	0,0028	0,0208
$P_j$		0,0441	0,0924	0,2404	0,2734	0,2082	0,1026	0,0307	
$P_j \cdot n$		4,41	9,24	24,04	27,34	20,82	10,26	3,07	
$(n_j - P_j \cdot n)^2$		0,0348	7,6176	9,2416	5,4756	4,7524	0,5476	0,0049	
$(n_j - P_j \cdot n)^2 / (P_j \cdot n)$		0,0789	0,82441	0,3844	0,2003	0,2283	0,0534	0,0016	1,77

Частота  $n_j$  в  $j$ -м классе – это попавшие в интервал  $x_{j\min} \leq x_i \leq x_{j\max}$  значения  $x_i$  выборки  $1 \dots i \dots n$ . Для первого класса, исходя из вышеуказанного,  $x_{1\min} \leq x_i \leq x_{1\max}$ . В нашем случае из вариационного ряда видно, что в класс 9,656 ... 9,756 Ом пять раз попадают значения 9,706 Ом, в класс 9,7526 ... 9,856 двенадцать раз – 9,806 и т.д. Заполняется четвертая строка таблицы 6.16. При этом сумма частот

$$\sum_{j=1}^m n_j = n. \quad (6.29)$$

В нашем случае:  $5 + 12 + 21 + 25 + 23 + 11 + 3 = 100$ .

Относительную частоту  $P_j^*$  записываем в пятой строке таблицы 6.16 и определяем так:

$$P_j^* = \frac{n_j}{n}, \quad (6.30)$$

поэтому  $\sum_{j=1}^m P_j^* = 1,0$ .

### **3. Определение среднего арифметического значения, оценки СКО результатов наблюдений и оценки СКО среднего арифметического.**

Среднее арифметическое значение для укрупненного статистического ряда исправленных наблюдений определяем по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \approx \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j n_j \approx \sum_{j=1}^m x_j P_j^*. \quad (6.31)$$

В нашем случае после введения поправки среднее арифметическое для исправленного ряда наблюдений должно быть равно Z:

$$\bar{x} = 9,706 \cdot 0,05 + 9,806 \cdot 0,12 + 9,906 \cdot 0,21 + 10,006 \cdot 0,25 + 10,106 \cdot 0,23 + 10,206 \cdot 0,11 + 10,305 \cdot 0,03 = 10,0 \text{ Ом}. \quad (6.32)$$

Определяем точечную оценку дисперсии (второго центрального момента выборки):

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \approx \sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2 P_j^*, \quad (6.33)$$

Для нашего случая, пользуясь таблицей 6.16, имеем

$$S_x^2 = (-0,294)^2 \cdot 0,05 + (-0,194)^2 \cdot 0,12 + (-0,094)^2 \cdot 0,21 + 0,006^2 \cdot 0,25 + 0,106^2 \cdot 0,23 + 0,206^2 \cdot 0,11 + 0,306^2 \cdot 0,03 = 0,021 \text{ Ом}^2.$$

Точечная оценка СКО определяется по формуле:

$$S_x = \sqrt{S_x^2}. \quad (6.34)$$

В нашем случае

$$S_x = \sqrt{0,021} = 0,144 \text{ Ом}.$$

Точечная оценка СКО среднего арифметического значения определяет-

ся по выражению

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}. \quad (6.35)$$

Для нашего случая:

$$S_{\bar{x}} = \frac{0,144}{\sqrt{100}} = 0,0144 \text{ Ом.}$$

#### ***4. Проверка результатов измерений на наличие грубых погрешностей.***

Так как число измерений  $n = 100 > 50$ , то для проверки результатов измерений на наличие грубых погрешностей применим критерий  $3\sigma$  [12]. В этом случае считается, что результат, полученный с вероятностью  $P = 0,003$ , маловероятен и его можно квалифицировать как промах, т. е. сомнительный результат должен быть исключен из измерений, если

$$|\bar{x} - x_i| > 3\sigma_x. \quad (6.36)$$

Для этого берем крайние точки выборки и определяются отношения  
(6.36)

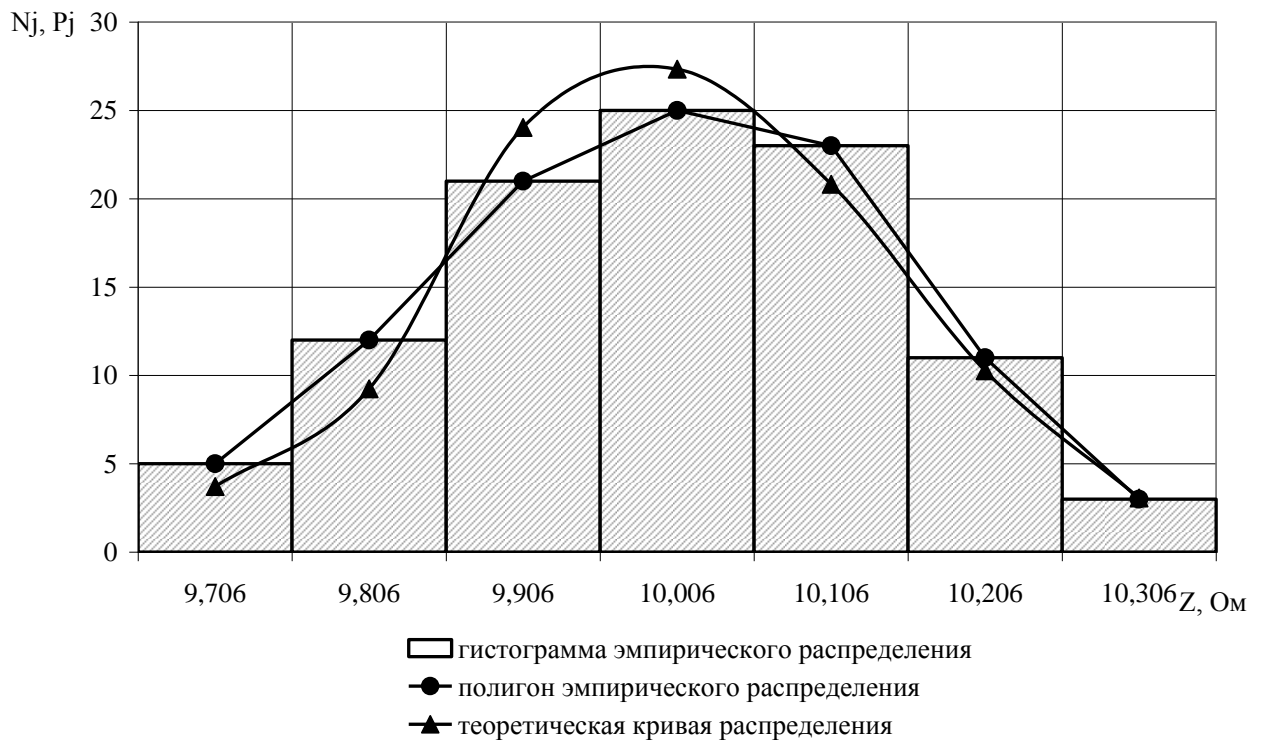
$$10,0 - 9,706 = 0,294 < 3 \cdot 0,144 = 0,432;$$

$$10,306 - 10,0 = 0,306 < 3 \cdot 0,144 = 0,432.$$

Следовательно, крайние точки выборки не являются грубыми погрешностями.

#### ***5. Проверка гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению.***

*Построение эмпирического распределения погрешности.* Для нашего примера, по данным таблицы 6.16, построим гистограмму и полигон для наглядного представления формы закона распределения погрешностей (рис.6.1).



**Рис. 6.1. Распределение погрешностей**

Из рисунка 6.2 видно, что форма гистограммы и полигона эмпирического распределения указывает на то, что результаты наблюдений могут быть распределены по нормальному закону.

Проверяют выдвинутую гипотезу о нормальности распределения результатов измерения, используя метод Пирсона. Расхождение между экспериментальной гистограммой и выбранной теоретической кривой в этом методе оценивается с помощью критерий  $\chi^2$  [12]

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^m C_i (P_i^* - P_i)^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - nP_i)^2}{nP_i}, \quad (6.37)$$

где  $C_i$  – коэффициент весов разрядов, выбранный для усиления веса составляющих с малой вероятностью в виде  $C_i = n/P_i$ ;  $P_i^*$  – значение вероятности в  $i$ -м интервале экспериментальной гистограммы;  $P_i$  – значение вероятности в  $i$ -м интервале, определенное по теоретической кривой как площадь под  $i$ -м интервалом:

$$P_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx. \quad (6.37)$$

Мера расхождения  $\chi_k^2$  – величина случайная, и плотность вероятности распределения этой величины подчиняется распределению Пирсона при  $m_i > 5$  и  $n \rightarrow \infty$  (реально при  $n > 40$ ).

Заметим, что число степеней свободы здесь  $k = m - 3$ , поскольку результаты измерений использованы для вычисления среднего, дисперсии и общей площади под гистограммой.

Задаваясь уровнем значимости  $q = 1 - P$ , по табл. 6.17 находят значение  $\chi_{k,q}^2$ , соответствующее значению  $q$  или вероятности  $P$ . Если  $\chi_k^2 \leq \chi_{k,q}^2$ , то распределение результатов измерений принимают нормальным и гипотеза о нормальности распределения считается верной.

Таблица 6.17

Квантиль  $\chi_k^2$  – распределения

$k$	$P$												
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,0002	0,0006	0,0040	0,0158	0,0064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141

Для определения меры расхождения (6.37) необходимо вычислить вероятности

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}}{s_x}\right), \quad (6.38)$$

где  $x_{i+1}$ ,  $x_{i-1}$ , – верхняя и нижняя границы  $i$ -го интервала укрупненного статистического ряда (табл.6.16), а  $\Phi(z)$  находится из табл.1 (см. приложение Б).

Для первого интервала (9,656; 9,756) имеем

$$P_{i=1} = \Phi\left(\frac{9,756-10}{0,144}\right) - \Phi\left(\frac{9,656-10}{0,144}\right) = 0,0548 - 0,0107 = 0,0441.$$

Результаты вычислений остальных вероятностей сведены в табл. 6.16.

Подставив соответствующие значения в формулу (6.37), получим расхождение  $\chi_k^2 = 1,77$ .

Поскольку число степеней свободы  $k = 4$ , то из табл. 6.17 для уровня значимости  $q = 0,05$  или вероятности принятия гипотезы верной  $P = 0,95$  находим  $\chi_{k,q}^2 = \chi_{4,0,05}^2 = 9,488$ .

Так как,  $\chi_k^2 = 1,77 < \chi_{4,0,05}^2 = 9,488$ , то гипотезу о том, что результаты наблюдений распределены по нормальному закону, можно считать правдоподобной.

## **6. Определение доверительных границ погрешностей результата измерения.**

Сначала определяют границы доверительного интервала случайной погрешности измерений:

$$\overset{\circ}{\Delta}_P = \pm t_P S_x^-, \quad (6.39)$$

где  $t_P$  – квантиль распределения.

В нашем примере

$$\overset{\circ}{\Delta}_{0,95} = \pm 1,96 \cdot 0,0144 = \pm 0,0282 \text{ Ом.}$$

Определяем доверительные границы неисключенной систематической погрешности  $\theta$ .

В качестве границ неисключенной систематической погрешности принимаем погрешности изготовления меры  $\theta = \pm 0,02 \text{ Ом.}$

Доверительные границы суммарной погрешности результата измерения определяют в зависимости от соотношения:

если  $\theta / S_x^- < 0,8$ , то границы погрешности результата измерения прини-



маются равными случайной погрешности,  $\Delta_{\Sigma} = \overset{\circ}{\Delta}$ ;

если  $\theta / S_x^- > 8$ , то границы погрешности результата измерения принимаются равными систематической погрешности,  $\Delta_{\Sigma} = \theta$ ;

если  $0,8 \leq \theta / S_x^- \leq 8$ , то общую погрешность измерения определяют по формуле

$$\Delta_{\Sigma} = K \cdot S_{\Sigma}, \quad (6.20)$$

где  $K$  – коэффициент, зависящий от соотношения  $\overset{\circ}{\Delta}$  и  $\theta$ ;  $S_{\Sigma}$  – оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерений;

$$K = \frac{\overset{\circ}{\Delta} + \theta}{S_x^- + \sqrt{\frac{\theta^2}{3}}}; \quad (6.21)$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\frac{\theta^2}{3} + S_R^2}. \quad (6.22)$$

Доверительные границы суммарной погрешности результата измерения зависят от соотношения  $\theta / S_x^-$ . Для нашего примера  $\theta / S_x^- = 0,02 / 0,0144 = 1,39$ , тогда определяем суммарную погрешность результата измерения по формуле (6.20)

$$K = \frac{0,0282 + 0,02}{0,0144 + \sqrt{\frac{0,02^2}{3}}} = 3,317;$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\frac{0,02^2}{3} + 0,0144^2} = 0,0185 \text{ Ом};$$

$$\Delta_{\Sigma} = 3,317 \cdot 0,0185 = 0,061 \text{ Ом}.$$

Результат измерения записываем в виде (6.1)

$$A = (10,00 \pm 0,06) \text{ Ом, при } P = 0,95 \%; n = 100.$$

## 7. ОБРАБОТКА КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

### Теоретические сведения.

При косвенных измерениях значение искомой величины получают на основании известной зависимости, связывающей ее с другими величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Методика обработки результатов косвенных измерений приведена в документе МИ 2083–90 «ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей».

В общем случае косвенно измеряемая величина представляет собой некоторую функцию

$$Z = F(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m), \text{ где } j = 1, \dots, m, \quad (7.1)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m$  – значения, полученные при прямых измерениях,  $m$  – число измеряемых неизвестных величин.

Если величины  $x_1, x_2, \dots, x_m$  измерены  $n$  раз с погрешностью  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_j, \dots, \Delta x_m$ , то искомая величина  $Z$  будет иметь погрешность, равную:

$$\Delta_Z = F(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m) - F(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_m + \Delta x_m). \quad (7.2)$$

Разложив правую часть уравнения в ряд Тейлора и, ограничившись членами 1-го порядка, получим:

$$\Delta_Z = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \partial x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \partial x_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_j} \partial x_j + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_m} \partial x_m. \quad (7.3)$$

Каждая из величин  $x_j$  измерена с некоторой погрешностью  $\Delta x_j$ . Полагая, что погрешности  $\Delta x_j$  малы, можно заменить  $\partial x_j$  на  $\Delta x_j$ :

$$\Delta_Z = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \Delta x_j. \quad (7.4)$$

Математическое ожидание  $M(\Delta_Z)$  и дисперсия  $\sigma^2(\Delta_Z)$  погрешности  $\Delta_Z$ , если величины  $x_j$  измерены со случайными погрешностями  $\Delta_j$ , имеющими ну-

левые математические ожидания  $M(\Delta x_j) = 0$  и дисперсии  $\sigma_{x_j}^2$ , принимая во внимание (7.4) определяем по формуле:

$$M(\Delta_Z) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_j} M(\Delta x_j) = 0; \quad (7.5)$$

$$\sigma^2(\Delta_Z) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 \sigma_{x_j}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^m r_{ij} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}, \quad (7.6)$$

где  $r_{ij}$  – коэффициенты корреляции погрешностей всех испытаний  $j$  и  $i$ , кроме  $i = j$ .

Если погрешности  $\Delta x_j$  некоррелированы (т.е. коэффициенты корреляции  $r_{ij} = 0$ ), то согласно теореме о сложении дисперсий [1]:

$$\sigma^2(\Delta_Z) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 \sigma_{x_j}^2. \quad (7.7)$$

При ограниченном числе измерений ( $n \neq \infty$ ) оценкой истинного значения физической величины  $Z$ , определяемой как функция случайных величин (аргументов), может служить ее значение  $\bar{Z}$ , полученное после выполнения вычислительных операций со средними арифметическими значениями  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_m$  аргументов в соответствии с этой функцией, т.е.

$$\bar{Z} = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_m). \quad (7.8)$$

При этом в соотношениях (7.6) и (7.7) необходимо использовать оценки дисперсий  $S_{\bar{x}_j}^2$ , т.е. формулу (7.7) можно записать в виде

$$S^2(\Delta_{\bar{Z}}) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 \cdot S_{x_j}^2. \quad (7.9)$$

Систематическая погрешность результата косвенного измерения определяется систематическими погрешностями результатов измерений аргументов. При измерениях последние стремятся исключить. Однако полностью это сделать не удастся, всегда остаются неисключенные систематические по-

грешности, которые рассматриваются как реализации случайной величины, имеющей равномерное распределение.

Доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения  $\theta_P$  в случае, если неисключенные систематические погрешности аргументов заданы границами  $\theta_j$ , вычисляют по формуле

$$\theta_P = k \sqrt{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 \theta_j^2}, \quad (7.10)$$

где  $k$  – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью  $P$  и числом  $m$  составляющих  $\theta_j$ . Его значения приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Значение коэффициента $k$				
$P$	0,9	0,95	0,98	0,99
$k$	0,95	1,1	1,3	1,4

Доверительную границу случайной погрешности результата косвенного измерения вычисляют по формуле

$$\Delta_P^0 = t_P S(\Delta_{\bar{z}}). \quad (7.11)$$

В выражении (7.11) коэффициент Стьюдента  $t_P$  определяется по таблице 4 (приложение Б) для принятого или заданного значения доверительной вероятности и известного эффективного числа степеней свободы  $k_{эф}$ , которое определяется по формуле

$$k_{эф} = \frac{\left[ \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 S_{xj}^2 \right]^2 - 2 \left[ \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^4 S_{xj}^4 \frac{1}{n_j + 1} \right]}{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^4 S_{xj}^4 \frac{1}{n_j + 1}}, \quad (7.12)$$

где  $n_j$  – число наблюдений, выполненное при измерении  $j$ -го аргумента.

При большом числе измерений (более 25–30), выполненных при нахождении каждого из аргументов, доверительную границу случайной погрешности результата косвенного измерения можно определить по формуле

$$\overset{o}{\Delta}_P = Z_P S(\Delta_{\bar{Z}}), \quad (7.13)$$

где  $z_p$  – квантиль нормального распределения, соответствующий выбранной доверительной вероятности  $P$  (табл. 1, приложение Б).

Суммарная погрешность результата косвенного измерения оценивается на основе композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей. Формулы для ее расчета в зависимости от соотношения границ неисключенной систематической составляющей и СКО случайной составляющей погрешности приведены в таблице 7.2.

Таблица 7.2

Суммарная погрешность результата косвенных измерений

Значение $\theta_P / S(\Delta_{\bar{Z}})$	Погрешность результата измерения $\Delta_P$
$\theta_P / S(\Delta_{\bar{Z}}) < 0,8$	$\overset{o}{\Delta}_P$
$0,8 \leq \theta_P / S(\Delta_{\bar{Z}}) \leq 8$	$k_P \left[ \overset{o}{\Delta}_P + \theta_P \right]$
$\theta_P / S(\Delta_{\bar{Z}}) > 8$	$\theta_P$

Коэффициент  $k_P$  определяется по таблице 7.3.

Таблица 7.3

Зависимость  $k_P$  от отношения  $\theta_P / S(\Delta_{\bar{Z}})$  при различной доверительной вероятности

$\theta_P / S(\Delta_{\bar{Z}})$	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_{0,95}$	0,81	0,77	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
$k_{0,99}$	0,87	0,85	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

Следует сделать еще одно замечание. При выводе соотношения (8.6) в разложении Тейлора были учтены только линейные члены ряда, поскольку члены начиная со второй производной содержат произведения погрешностей и, соответственно, являются малыми величинами более высокого порядка по сравнению с линейными членами. Однако такое приближение приводит к появлению смещения при оценке  $\bar{Z}$  по формуле (7.8). Это смещение при отсутствии корреляции между погрешностями аргументов составляет

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} \right) \sigma_{x_j}^2 = -q, \quad (7.14)$$

Результат косвенного измерения при известных дисперсиях погрешностей измеряемых величин записывается в виде

$$Z = \bar{Z} + q \pm \Delta \text{ при } P = \dots\%, \quad (7.15)$$

при оценках дисперсий

$$Z = \bar{Z} + q \pm t_p S(\Delta_{\bar{Z}}) \text{ при } P = \dots\%. \quad (7.16)$$

### ***Задание для самостоятельной работы.***

Определение параметра  $Z = f(x_1, x_2, x_3)$  проводится с помощью прямых многократных измерений параметров  $x_1, x_2, x_3$ , для каждого из которых известны основные метрологические характеристики применяемых средств измерений – пределы измерений (ПИ) и класс точности (КТ).

*Требуется:*

провести обработку результатов измерений;

найти суммарную погрешность косвенного измерения параметра  $Z$  измерения с доверительной вероятностью  $P = 95 \%$ .

Исходные данные приведены в таблицах 7.4 – 7.6.

Таблица 7.4

Исходные данные

Результаты измерения $x_{ij}$	Первая цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{1i}$	10,31	11,28	12,15	13,23	14,36	15,42	16,74	17,82	18,64	19,71
	10,32	11,29	12,16	13,24	14,36	15,44	16,77	17,82	18,67	19,73
	10,35	11,29	12,15	13,26	14,38	15,46	16,75	17,84	18,68	19,75
	10,34	11,27	12,14	13,28	14,37	15,46	16,76	17,85	18,67	19,74
	10,39	11,26	12,17	13,24	14,39	15,43	16,76	17,83	18,53	19,72
$x_{2i}$	21,9	23,3	24,3	25,4	26,6	27,0	28,9	29,3	30,2	31,9
	22,0	23,8	24,5	25,6	26,7	27,4	28,8	29,8	30,9	31,5
	22,1	23,5	24,8	25,9	26,9	27,6	28,4	29,6	30,5	31,8
	22,8	23,1	24,1	25,1	27,0	27,8	28,6	29,7	30,4	31,2
	22,6	23,6	24,9	25,7	27,1	27,5	28,7	29,5	30,7	31,4
$x_{3i}$	5,05	6,12	7,17	8,12	9,21	5,13	6,72	7,31	8,22	9,23

	5,03	6,15	7,19	8,16	9,29	5,16	6,77	7,33	8,29	9,24
	5,04	6,18	7,12	8,17	9,28	5,15	6,75	7,37	8,28	9,26
	5,06	6,12	7,14	8,19	9,30	5,14	6,76	7,34	8,27	9,29
	5,02	6,14	7,15	8,20	9,31	5,19	6,79	7,39	8,26	9,21

Таблица 7.5

Исходные данные											
Результаты измерения $x_{ij}$		Вторая цифра варианта									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{1i}$	ПИ	$\pm 35$	$0 \dots 20$	$-10 \dots +20$	$\pm 20$	$0 \dots 25$	$\pm 25$	$-20 \dots +25$	$0 \dots 30$	$\pm 30$	$-20 \dots 35$
	КТ	0,01	0,02	0,015	0,025	0,04	0,01	0,02	0,015	0,03	0,025
$x_{2i}$	ПИ	$-20 \dots 35$	$\pm 40$	$0 \dots 40$	$-20 \dots +35$	$\pm 45$	$0 \dots 45$	$\pm 40$	$-10 \dots +40$	$0 \dots 40$	$\pm 45$
	КТ	(0,2)	(0,3)	(0,15)	(0,2)	(0,1)	(0,25)	(0,4)	(0,15)	(0,2)	(0,1)
$x_{3i}$	ПИ	$0 \dots 30$	$-20 \dots +25$	$\pm 25$	$0 \dots 25$	$-10 \dots +20$	$\pm 15$	$0 \dots 30$	$\pm 30$	$-20 \dots +35$	$0 \dots 20$
	КТ	0,04/0,02	0,025/0,02	0,025/0,01	0,02/0,01	0,06/0,02	0,2/0,15	0,15/0,01	0,4/0,2	0,25/0,1	0,02/0,01

Сокращения. ПИ – пределы измерения средства измерения; КТ – класс точности средства измерения.

Таблица 7.6

Исходные данные					
Параметр	Вторая цифра варианта				
	0	1	2	3	4
Вид функции $Z = f(x_1, x_2, x_3)$	$\frac{5x_1^3}{x_2 x_3}$	$\frac{3x_1 x_2^2}{x_3}$	$\frac{10x_2^2}{x_1 x_3}$	$\frac{5x_3^3 x_3}{x_1}$	$\frac{5x_3^3}{x_1 x_2}$
Продолжение таблицы 7.6					
Параметр	Вторая цифра варианта				
	5	6	7	8	9
Вид функции $Z = f(x_1, x_2, x_3)$	$\frac{6x_2^3}{x_1 x_3}$	$\frac{5x_1^2 x_3^2}{x_2}$	$\frac{2x_3^4}{x_1 x_2}$	$\frac{3x_1^3}{x_2 x_3}$	$\frac{8x_2^2}{x_1 x_3}$

**Рассмотрим методику решения задачи на примере.**

Исходные данные сведем в таблицу 7.7.

Таблиц 7.7

Измеряемый параметр		Пределы измерений	Класс точности	Вид функции
$x_1$	21,21; 21,22; 21,22; 21,23; 21,23	$0 \dots 40$	0,02	$Z = \frac{x_1 x_2}{x_3 x_4}$
$x_2$	10,12; 10,11; 10,10; 10,13; 10,11	$\pm 25$	0,01	
$x_3$	12,05; 12,06; 12,06; 12,07; 12,08	$\pm 20$	0,06	
$x_4$	6,02; 6,018; 6,019; 6,02; 6,021	$0 \dots 20$	0,03	

### 1. Определение оценки истинного значения искомого параметра.

При ограниченном числе измерений ( $n \neq \infty$ ) оценкой истинного значения физической величины  $Z$ , определяемой как функция случайных величин (аргументов), может служить ее значение  $\bar{Z}$ , полученное после выполнения вычислительных операций со средними арифметическими значениями  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_m$  аргументов в соответствии с этой функцией (7.8)

Средние арифметические значения параметров  $x_i$  определяем по формуле

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (7.17)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{21,21 + 21,22 + 21,22 + 21,23 + 21,23}{5} = 21,222;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{10,12 + 10,11 + 10,10 + 10,13 + 10,11}{5} = 10,114;$$

$$\bar{x}_3 = \frac{12,05 + 12,06 + 12,06 + 12,07 + 12,08}{5} = 12,064;$$

$$\bar{x}_4 = \frac{6,02 + 6,018 + 6,019 + 6,02 + 6,021}{5} = 6,0196.$$

Оценка истинного значения  $\bar{Z}$  с учетом вида ее функции

$$\bar{Z} = \frac{21,222 \cdot 10,114}{12,064 \cdot 6,0196} = 2,9556.$$

**2. Определение оценки среднеквадратического отклонения искомого параметра.** Оценку дисперсии результата косвенного измерения определяют по формуле

$$S_{\bar{Z}}^2 = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 S_{x_j}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^m r_{ij} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) S_{x_i} S_{x_j}. \quad (7.18)$$



где  $S_{x_j}^2$  – оценка дисперсии результата измерения  $j$ -го аргумента;  $\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)S_{x_j}$  – частные погрешности косвенного измерения;  $r_{ij}$  – коэффициенты корреляции погрешностей всех испытаний  $j$  и  $i$ , кроме  $i = j$ ;

В тех же случаях, когда исходные величины измеряют с помощью различных средств измерения в разное время, можно с полным правом ожидать, что результаты, если и будут коррелированы, то очень мало, и коэффициентом корреляции можно пренебречь, поэтому выражение (7.18) примет вид

$$S_{\bar{z}}^2 = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial X_j} \right)^2 S_{\bar{x}_j}^2. \quad (7.19)$$

Оценку среднеквадратического отклонения результата измерения  $j$ -го аргумента определяем по формуле

$$S_{\bar{x}_j} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}; \quad (7.20)$$

$$S_{\bar{x}_1} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \sum_{i=1}^5 (X_{1i} - 21,222)^2} = 0,00374;$$

$$S_{\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \sum_{i=1}^5 (X_{2i} - 10,114)^2} = 0,0051;$$

$$S_{\bar{x}_3} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \sum_{i=1}^5 (X_{3i} - 12,064)^2} = 0,0051;$$

$$S_{\bar{x}_4} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \sum_{i=1}^5 (X_{4i} - 6,0196)^2} = 0,00051$$

Вычислим частные производные и частные погрешности косвенных измерений по каждому параметру  $x_j$

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial x_1} \right) S_{x_1} = \frac{\bar{x}_2}{x_3 x_4} S_{x_1};$$

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial X_1} \right) S_{\bar{x}_1} = \frac{10,114}{12,064 \cdot 6,0196} \cdot 0,00374 = 0,0005211;$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_2}\right)S_{\bar{x}_2} = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_3 \bar{X}_4} S_{\bar{x}_2};$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_2}\right)S_{\bar{x}_2} = \frac{21,222}{12,064 \cdot 6,0196} \cdot 0,0051 = 0,00149$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_3}\right)S_{\bar{x}_3} = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_3 \bar{X}_4} S_{\bar{x}_3};$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_3}\right)S_{\bar{x}_3} = -\frac{21,222 \cdot 10,114}{12,064^2 \cdot 6,0196} \cdot 0,0051 = -0,001249;$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_4}\right)S_{\bar{x}_4} = -\frac{\bar{X}_1 \bar{X}_2}{\bar{X}_3 \bar{X}_4^2} S_{\bar{x}_4};$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_4}\right)S_{\bar{x}_4} = -\frac{21,222 \cdot 10,114}{12,064 \cdot 6,0196^2} \cdot 0,00051 = -0,0002504.$$

Таким образом, оценка СКО косвенного измерения параметра  $Z$ , рассчитанное по формуле (7.10), составляет

$$S_{\bar{Z}} = \sqrt{0,0005211^2 + 0,00149^2 + (-0,001249)^2 + (-0,0002504)^2} = 0,002029.$$

**3. Определение доверительных границ случайной погрешности.** Доверительную границу случайной погрешности результата косвенного измерения вычисляем по формуле (7.11). Эффективное число степеней свободы определяем по формуле (7.12).

Для удобства расчетов составим таблицу 7.8.

Таблица 7.8

Вспомогательные расчеты

Параметр	$\left(\frac{\partial Z}{\partial x_j}\right)$	$\left(\frac{\partial Z}{\partial x_j}\right)^2$	$\left(\frac{\partial Z}{\partial x_j}\right)^4$	$S_{x_j}$	$S_{x_j}^2$	$S_{x_j}^4$
$\bar{x}_1$	0,139685	0,019512	0,000381	0,00374	$1,39 \cdot 10^{-5}$	$1,95 \cdot 10^{-10}$
$\bar{x}_2$	0,292232	0,085399	0,007293	0,0051	0,000026	$6,76 \cdot 10^{-10}$
$\bar{x}_3$	0,244996	0,060023	0,003603	0,0051	0,000026	$6,76 \cdot 10^{-10}$
$\bar{x}_4$	0,491001	0,241082	0,058121	0,00051	$2,6 \cdot 10^{-7}$	$6,76 \cdot 10^{-14}$

$$k_{\phi} = \frac{1,667 \cdot 10^{-15} - 2,4465 \cdot 10^{-16}}{1,42235 \cdot 10^{-15}} = 5,81.$$

При таком числе степеней свободы для доверительной вероятности  $P = 95 \%$  интерполяцией данных по таблице 4 (приложение Б) находим  $t_{0,95} = 2,44$ . Тогда доверительные границы случайной погрешности

$$\Delta_{0,95}^0 = 2,44 \cdot 0,002029 = 0,00495.$$

**4. Определение доверительных границ неисклученной систематической погрешности.** Доверительные границы неисклученной систематической погрешности результата косвенного измерения  $\theta_P$  в случае, если неисклученные систематические погрешности аргументов заданы границами  $\theta_j$ , вычисляем по формуле (7.10).

В нашем случае неисклученные систематические погрешности аргументов определяются границами основной погрешности средств измерений.

Так как класс точности всех трех средств измерений указан в виде приведенной погрешности, то в абсолютной форме погрешность средств измерений определяем по формуле (3.13). Для нашего случая

$$\Delta_1 = \frac{0,02 \cdot 40}{100} = 0,008;$$

$$\Delta_2 = \frac{0,01 \cdot 50}{100} = 0,005;$$

$$\Delta_3 = \frac{0,06 \cdot 40}{100} = 0,024;$$

$$\Delta_4 = \frac{0,03 \cdot 20}{100} = 0,006.$$

Тогда по формуле (7.10) определим границы неисклученной систематические погрешности

$$\theta_{0,95} = 1,1 \sqrt{0,019 \cdot 6,4 \cdot 10^{-5} + 0,085 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} + 0,059 \cdot 5,76 \cdot 10^{-4} + 0,236 \cdot 3,6 \cdot 10^{-5}} = 0,0075.$$

**5. Определение доверительных границ суммарной погрешности результата косвенного измерения.** Суммарная погрешность результата косвенного измерения оценивается на основе композиции распределений случайных и неисклученных систематических погрешностей. Формулы для ее расчета в зависимости от соотношения границ неисклученной систематической

ской составляющей и СКО случайной составляющей погрешности приведены в таблице 7.2. Коэффициент  $k_p$  определяем по таблице 7.3.

Так как, в нашем случае, отношение  $\theta_p/S_{\bar{z}} = 0,0075/0,002029 = 3,7$ , то суммарная погрешность результата косвенных измерений будем определять по формуле

$$\Delta = k_p \left[ \overset{\circ}{\Delta}_P + \theta_p \right]. \quad (7.21)$$

Для вероятности  $P = 95 \%$  по таблице 7.3  $k_{0,95} = 0,75$ , тогда

$$\Delta = 0,75 \cdot (0,0495 + 0,0075) = 0,009346.$$

**6. Определение доверительных границ систематической погрешности результата косвенного измерения.** Систематическую погрешность, возникающую при косвенных измерениях, при отсутствии корреляции между погрешностями аргументов определяем по формуле (7.14).

В нашем случае формула (7.14) имеет вид

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j^2} \right) S_{x_j}^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2} \right) S_{x_3}^2 + \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x_4^2} \right) S_{x_4}^2 \right],$$

поскольку вторые производные по остальным аргументам равны нулю. Тогда

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2 \cdot 12,064^3} \cdot 0,0051^2 + \frac{2,9556}{2 \cdot 6,0196^3} \cdot 0,00051^2 \right) = 2,746 \cdot 10^{-7}.$$

Полученная величина значительно меньше пяти единиц разряда, следующего за последней значащей цифрой погрешности результата. Если эту погрешность учесть путем введения в итог измерения соответствующей поправки, то она все равно пропадает при округлении. Поэтому принимаем  $\theta = 0$ .

Результат косвенного измерения при оценках в виде погрешностей измеряемых величин записываем в виде (7.15)

$$Z = 2,9556 \pm 0,009346 \text{ при } P = 95 \%,$$

после округления

$$Z = 2,956 \pm 9,0 \cdot 10^{-3} \text{ при } P = 95 \%.$$

## 8. КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ

***Контрольный тест на темы: «Международная система единиц ФВ СИ»,  
«Округление результатов измерений»***

### **Темы (группы) заданий.**

1. Основные единицы Международная система единиц ФВ СИ (задание 1).
2. Размерности производных единиц Международной системы единиц ФВ СИ (задание 2-4).
3. Внесистемные единицы измерения (задание 5).
4. Множители и приставки для образования десятичных единиц измерения и их наименований (задание 6).
5. Множители и приставки для образования дольных единиц измерения и их наименований (задание 7).
6. Правила написания и обозначения единиц измерения (задание 8-11).
7. Округление результатов измерения (задание 12 -15).

### **Вариант 00.**

#### *Задание 1*

*Вопрос.* Укажите определение единицы времени – секунда, принятое в международной системе единиц СИ.

*Выберите один из 4 вариантов ответа:*

- 1) Время равное  $1/31556925$  части тропического года на 0 января 1900 г. В 12 часов эфемероидного времени.
- 2) Продолжительность  $9192631770$  периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атом цезия-133, не возмущенного внешними полями.
- 3) Продолжительность квантового перехода основного состояния атома водорода.
- 4) Время равное  $1/86400$  части средних солнечных суток.

### Задание 2

*Вопрос.* Указать правильное выражение размерности в системе СИ единицы плотности (килограмм на кубический метр).

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $L^3N$
- 2)  $LM^{-3}$
- 3)  $L^{-3}N$
- 4)  $L^3M$
- 5)  $L^{-3}M$

### Задание 3

*Вопрос.* Указать правильное выражение размерности в системе СИ единицы электрической емкости – фарад ( $\Phi = Кл/В$ ).

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $L^{-2}M^{-1}TI^2$
- 2)  $LMT^{-2}$
- 3)  $L^2M^{-1}T^4I^2$
- 4)  $L^{-2}M^1T^4I^2$
- 5)  $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$

### Задание 4

*Вопрос.* Указать правильное выражение размерности в системе СИ единицы индуктивности – генри ( $\Gamma_n = Вб/А$ ).

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $LMIT^{-3}$
- 2)  $LMIT^{-2}$
- 3)  $L^2MIT^{-2}$
- 4)  $L^2MT^{-2}I^{-2}$
- 5)  $L^2MT^{-2}I^2$

### Задание 5

*Вопрос.* Укажите, к какому виду единиц ФВ относятся единица массы – карат.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) Основная единица системы СИ
- 2) Внесистемная, допускаемые наравне с единицами СИ
- 3) Внесистемная, изъятая из употребления
- 4) Производная единица системы СИ
- 5) Внесистемная, допускаемые к применению в специальных областях

*Задание 6*

*Вопрос.* Укажите, какому множителю в системе СИ соответствует приставка пико.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $10^{-9}$
- 2)  $10^{18}$
- 3)  $10^9$
- 4)  $10^{-12}$
- 5)  $10^{-6}$

*Задание 7*

*Вопрос.* Укажите, обозначение приставки в системе СИ, которой обозначается множитель  $10^{12}$ .

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) к
- 2) М
- 3) Г
- 4) Э
- 5) Т

*Задание 8*

*Вопрос.* Укажите правильный вариант написания единиц измерений.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) 20 ° С
- 2) 80%
- 3) 20°C
- 4) 100кВт
- 5) 80 %

### *Задание 9*

*Вопрос.* Укажите правильный вариант написания единиц измерений.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $5^{\circ}45,48'$
- 2) 80%
- 3)  $20^{\circ} \text{ C}$
- 4)  $20^{\circ}\text{C}$
- 5)  $5^{\circ}45',48$

### *Задание 10*

*Вопрос.* Укажите правильный вариант написания значений величин с предельными отклонениями.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $150,0 \pm 0,9\text{A}$
- 2)  $560,0 \text{ B} \pm 0,4 \text{ B}$
- 3)  $260,02 \pm 0,8\text{Ом};$
- 4)  $(450,0 \pm 0,6)\text{Ом}$
- 5)  $60,0\text{Ом} \pm 0,4\text{Ом}$

### *Задание 11*

*Вопрос.* Укажите правильный вариант написания буквенного обозначения и наименования единиц.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) 20 Дж/килограмм
- 2) 20Дж/кг
- 3) 20 джоулей на килограмм
- 4) 20 джоулей на кг
- 5) 50 фарад на м



### Задание 12

*Вопрос.* Укажите правильный вариант округления результата измерения напряжения  $V = (3497,2321 \pm 38,185)$  В.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $3497,23 \pm 38,18$
- 2)  $3490 \pm 40$
- 3)  $3497 \pm 38$
- 4)  $3500 \pm 40$
- 5)  $3497,2 \pm 38,1$

### Задание 13

*Вопрос.* Укажите правильный вариант округления результата измерения напряжения  $V = (4762,2321 \pm 18,185)$  В.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $4762,2321 \pm 18,185$
- 2)  $4762,2 \pm 18,2$
- 3)  $4760 \pm 20$
- 4)  $4762 \pm 18$
- 5)  $4762,23 \pm 18,19$

### Задание 14

*Вопрос.* Укажите правильный вариант округления результата измерения сопротивления  $R = (34,972 \pm 0,185)$  Ом.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $35,0 \pm 0,2$
- 2)  $34,97 \pm 0,18$
- 3)  $34,97 \pm 0,19$
- 4)  $34,9 \pm 0,2$
- 5)  $34,972 \pm 0,185$

### Задание 15

*Вопрос.* Укажите правильный вариант округления результата измерения сопротивления  $R = (224,773 \pm 0,825)$  Ом.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $225 \pm 1$
- 2)  $224,8 \pm 0,8$
- 3)  $224,77 \pm 0,83$
- 4)  $224,773 \pm 0,825$
- 5)  $224,77 \pm 0,82$

**Ключ к тесту**

<i>Задание</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<i>Ответ</i>	2	5	5	4	5	4	5	5	1	2	3	4	4	2	2

***Контрольный тест на тему:***

***«Средства измерений»***

**Темы (группы) заданий.**

1. Термины и определения.
2. Определение диапазона измерения прибора.
3. Определение чувствительности прибора.
4. Определение показания прибора.
5. Классификация погрешностей средств измерения.
6. Нормирование погрешности средств измерения.
7. Обозначение классов точности средств измерений.
8. Расчет приведенной погрешности.
9. Расчет относительной погрешности.
10. Расчет погрешности измерения прибора по классу точности (при нормировании приведенной погрешности).
11. Расчет погрешности измерения прибора по классу точности (при нормировании относительной погрешности).
12. Расчет погрешности измерения прибора по классу точности (при нормировании относительной погрешности).

13. Определение аддитивной и мультипликативной прибора погрешности по классу точности.
14. Выбор средств измерения.
15. Определение класса точности прибора.

### Вариант 00.

#### Задание 1

*Вопрос:* Укажите, как называется наибольшее и наименьшее значение диапазона измерений.

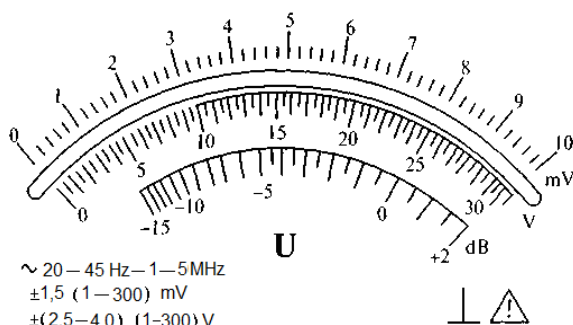
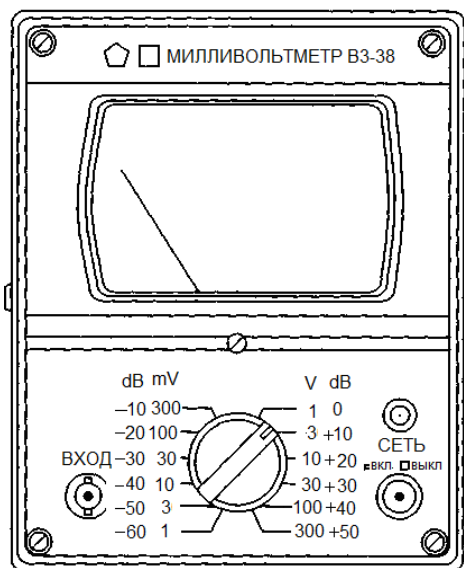
*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) область отсчета СИ
- 2) шкала СИ
- 3) диапазон измерений
- 4) пределы измерений
- 5) интервал показаний

#### Задание 2

*Вопрос:* Для вольтметра ВЗ-38 показанного на рисунке определите диапазон измеряемых напряжений.

*Изображение:*



*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) от 0,1 мВ до 300 В.
- 2) от 1 мВ до 300 В.
- 3) от 1 В до 300 В.
- 4) от 0,1 В до 300 В.
- 5) от 0,5 мВ до 300 В.

### *Задание 3*

*Вопрос:* Определите чувствительность вольтметра ВЗ-38 показанного на рисунке (см. задание 2).

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) 100 дел./мВ.
- 2) 0,02 мВ/дел.
- 3) 1 дел./мВ.
- 4) 5 дел./мВ.
- 5) 50 дел./мВ.

### *Задание 4*

*Вопрос:* Для вольтметра ВЗ-38 показанного на рисунке (см. задание 2) определите значение измеряемого параметра при следующих известных данных:

положение переключателя пределов измерения.....300 mV

положение стрелки .....26

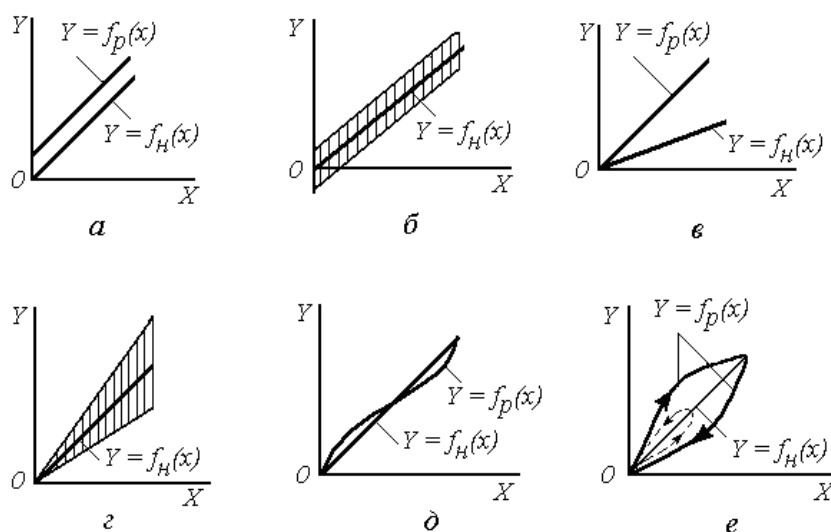
*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) 140 мВ
- 2) 260 мВ
- 3) 130 мВ
- 4) 136 мВ
- 5) 256 мВ

### *Задание 5*

*Вопрос:* На рисунке изображены функции преобразования измерительных устройств, указать вид погрешности которая соответствует рисунку 2.

Изображение:



Выберите один из 5 вариантов ответа:

- 1) мультипликативная случайная
- 2) линейности
- 3) аддитивная случайная
- 4) аддитивная систематическая
- 5) мультипликативная систематическая

#### Задание 6

Вопрос: Как изменяется абсолютная погрешность СИ с нормированной абсолютной погрешностью?

Выберите один из 5 вариантов ответа:

- 1) линейно
- 2) мультипликативно
- 3) аддитивно и мультипликативно
- 4) по гистерезису
- 5) аддитивно

#### Задание 7

Вопрос: Указать, обозначение класса точности СИ с нормированными пределами допускаемой абсолютной погрешности.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $\surd^{0,1}$
- 2) III
- 3) 0,02/0,01
- 4) 1,5
- 5)  $\bigcirc_{0,5}$

*Задание 8*

*Вопрос:* Рабочим вольтметром с  $U_{ном} = 100$  В измерили напряжение 75 В, при этом образцовый прибор показал значение 76 В. Определить приведенную погрешность измерения.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $\pm 0,01$
- 2)  $\pm 1,2 \%$
- 3)  $\pm 1 \%$
- 4)  $\pm 0,01 \%$
- 5)  $\pm 0,06$

*Задание 9*

*Вопрос:* Рабочим вольтметром с  $U_{ном} = 150$  В измерили напряжение 75 В, при этом образцовый прибор показал значение 74 В. Определить относительную погрешность измерения.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $\pm 0,7 \%$
- 2)  $\pm 1 \%$
- 3)  $\pm 0,014 \%$
- 4)  $\pm 1,4 \%$
- 5)  $\pm 1,2 \%$

*Задание 10*

*Вопрос:* Для вольтметра В3-38 показанного на рисунке (см. задание 2) в выбранном диапазоне определить погрешность измерения напряжения постоянного тока 150 мВ.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $\pm 1,5$  мВ
- 2)  $\pm 2,5$  мВ
- 3)  $\pm 4$  мВ
- 4)  $\pm 4,5$  мВ
- 5)  $\pm 3,5$  мВ

### *Задание 11*

*Вопрос:* Отсчет по шкале прибора с пределами измерений  $\pm 150$  единиц и равномерной шкалой составил 75 единиц. Пренебрегая другими видами погрешностей измерения, оценить пределы допускаемой абсолютной погрешности этого отсчета при использовании СИ класса точности  $\textcircled{1,5}$ .

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $\pm 1,125$
- 2)  $\pm 0,5$  %
- 3)  $\pm 1,5$
- 4)  $\pm 1,25$
- 5)  $\pm 0,25$  %

### *Задание 12*

*Вопрос:* При измерении напряжения вольтметром класса точности 0,4/0,2 с верхним пределом измерения 200 В его показание было 122 В. Определите абсолютную погрешность измерения.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $U = (122,00 \pm 0,06)$  В
- 2)  $U = (122,0 \pm 0,6)$  В
- 3)  $U = (122,00 \pm 0,4)$  В
- 4)  $U = (122,00 \pm 0,2)$  В
- 5)  $U = (122,0 \pm 7,5)$  В

### Задание 13

*Вопрос:* Определите наибольшее значение мультипликативной составляющей погрешности вольтметра В4-14, класса точности 1/0,1, с верхним пределом измерения 300 В.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $\pm 2,7 \%$
- 2)  $\pm 1 \text{ В}$
- 3)  $\pm 0,1 \%$
- 4)  $\pm 3,96 \text{ В}$
- 5)  $\pm 2,7 \text{ В}$

### Задание 14

*Вопрос:* Определите класс точности магнитоэлектрического милливольтметра с пределом измерения  $U_B = 10 \text{ мВ}$  для измерения напряжения в диапазоне  $U = 5 \dots 8 \text{ мВ}$  так, чтобы относительная погрешность  $\delta \leq \pm 1,5\%$ .

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) не больше 1,5
- 2) не меньше 0,6
- 3) не больше 0,6
- 4) не больше 0,75
- 5) не меньше 0,75

### Задание 15

*Вопрос:* Абсолютные погрешности измерения напряжения вольтметром Э358 с односторонней шкалой 0 ... 200 В составляют 1,0 В; -1,3 В; 0,6 В; -0,5 В; -1,85 В. Определить класс точности этого вольтметра.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) не меньше 1,0
- 2) не меньше 0,6
- 3) не больше 1,2
- 4) не больше 0,6
- 5) не больше 1,0



### Ключ к тесту

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ответ	4	1	5	3	1	5	2	3	4	4	1	2	5	3	1

### *Контрольный тест на тему:*

### *«Погрешности измерений»*

### **Темы (группы) заданий.**

1. Законы распределения случайных величин (задание 1).
2. Моменты случайных величин (задание 2).
3. Точечные оценки случайных величин (задание 3).
4. Расчет СКО для различных законов распределения (задание 4).
5. Интервальные оценки случайной величины (задание 5-10).

### **Варианта 00.**

#### *Задание 1*

*Вопрос.* Какому закону подчиняются, погрешности дискретности в цифровых приборах?

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) арксинусоидальному
- 2) Симпсона
- 3) нормальному
- 4) равномерному
- 5) Лапласа

#### *Задание 2*

*Вопрос.* Чему равняется математическое ожидание случайной погрешности?

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) моде
- 2) медиане
- 3) нулю
- 4) единице
- 5) дисперсии

### Задание 3

*Вопрос.* Укажите формулу расчета точечной оценки дисперсии единичного значения измеряемой величины.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

1)  $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$

2)  $\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$

3)  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

4)  $\sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$

5)  $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$

### Задание 4

*Вопрос.* Погрешность результата измерения тока распределена по нормальному закону в интервале от  $-4$  мА до  $+3$  мА. Определите систематическую погрешность  $\Delta_c$  и СКО результата измерения.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

1)  $\Delta_c = +0,5$  мА;  $\sigma_x = 2,023$  мА

2)  $\Delta_c = +0,5$  мА;  $\sigma_x = 1,43$  мА

3)  $\Delta_c = -0,5$  мА;  $\sigma_x = 1,43$  мА

4)  $\Delta_c = -1$  мА;  $\sigma_x = 1,43$  мА

5)  $\Delta_c = -0,5$  мА;  $\sigma_x = 2,023$  мА

### Задание 5

*Вопрос.* Погрешность измерения сопротивления  $\Delta R$  распределена по нормальному закону, причем известно значение  $\sigma_R = 60$  мОм, и что систематическая погрешность равна нулю. Найдите вероятность того, что результат измерения  $R$  отличается от действительного значения сопротивления более чем на  $120$  мОм.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) 0,0188 (1,88 %)
- 2) 0,9938 (99,38 %)
- 3) 0,9544 (95,44%)
- 4) 0,0456 (4,56 %)
- 5) 0,0938 (9,38 %)

#### *Задание 6*

*Вопрос.* При измерении сопротивления омметр показывает  $R = 880$  мОм. Систематическая погрешность измерения  $\Delta_c = +5,5$  мА. Среднее квадратичное отклонение показаний  $\sigma_R = 25$  мОм. Укажите доверительные границы для истинного значения измеряемого сопротивления с вероятностью  $P = 0,8$ . Распределения результатов измерений описывается нормальным законом.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $R = (874,5 \pm 51,5)$  Ом, при  $P = 0,8$
- 2)  $R = (885,5 \pm 25,5)$  Ом, при  $P = 0,8$
- 3)  $R = (874,5 \pm 32,04)$  Ом, при  $P = 0,8$
- 4)  $R = (874,5 \pm 25,5)$  Ом, при  $P = 0,8$
- 5)  $R = (885,5 \pm 32,04)$  Ом, при  $P = 0,8$

#### *Задание 7*

*Вопрос.* Произведено 16 измерений напряжения. Определить доверительный интервал истинного значения напряжения, если закон распределения нормальный с параметрами  $\bar{U} = 140$  мкВ,  $\sigma_U = 20$  мкВ при доверительной вероятности  $P = 90$  %.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $\pm 12,129$  мкВ
- 2)  $\pm 9,8$  мкВ
- 3)  $\pm 8,2245$  мкВ
- 4)  $\pm 6,598$  мкВ
- 5)  $\pm 4,8$  мкВ

### Задание 8

*Вопрос.* В условиях нормального распределения найдено, что среднее арифметическое результатов измерений и их СКО соответственно равны  $\bar{x} = 24,022$ ,  $\sigma_x = 0,125$ . Число измерений  $n = 25$ . Определить вероятность того, что истинное значение отличается от среднего арифметического результатов более чем на 0,04.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) 0,3128 (31,28 %)
- 2) 0,1096 (10,96 %)
- 3) 0,8904 (89,04 %)
- 4) 0,6872 (68,72%)
- 5) 0,9836 (98,36 %)

### Задание 9

*Вопрос.* В условиях нормального распределения погрешности измерения получены следующие оценки результатов измерения: средняя арифметическая длина стержня  $\bar{x} = 32,84$  мм и ее оценка СКО  $s_{\bar{x}} = 0,016$  мм. Число измерений  $n = 12$ . Определить интервал, в котором может находиться истинное значение величины с вероятностью 99,5 %

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) интервал от 32,754 до 32,866
- 2) интервал от 32,75 до 32,862
- 3) интервал от 32,798 до 32,910
- 4) интервал от 32,784 до 32,896
- 5) интервал от 32,77 до 32,882

### Задание 10

*Вопрос.* В условиях нормального распределения погрешности измерения получены следующие оценки результатов измерения: средняя арифметическая длина стержня  $\bar{x} = 13,043$  мм и ее оценка СКО  $S_{\bar{x}} = 0,02$  мм. Число измерений  $n = 14$ . Определить вероятность того, что истинное значение измеряемой величины находится в интервале  $\Delta = \pm 0,027$ .

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) 0,91 (91%)
- 2) 0,2931 (29,31 %)
- 3) 0,8 (80 %)
- 4) 0,223 (2,23 %)
- 5) 0,5633 (56,33 %)

### Ключ к тесту

<i>Задание</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Ответ</i>	4	3	1	5	4	3	3	2	4	3

### Итоговый тест по дисциплине

### «Метрология, стандартизация и сертификация»

### Темы (группы) заданий.

1. Шкалы физических величин.
2. Виды измерений.
3. Средства измерений.
4. Методы измерений.
5. Характеристики качества измерений.
6. Эталоны физических величин.
7. Поверка и калибровка средств измерений.
8. Методы поверки (калибровки) и поверочные схемы.
9. Метрологический контроль.
10. Метрологический надзор.

11. Теоретические основы стандартизации.
12. Методы стандартизации.
13. Расчет уровня унификации.
14. Система стандартизации РФ.
15. Международные организации по стандартизации.
16. Термины и определения в области подтверждения соответствия.
17. Формы подтверждения соответствия. Системы сертификации.
18. Схемы сертификации.
19. Обработка прямых измерений с многократными наблюдениями.
20. Обработка косвенных измерений.

### **Вариант 00**

#### *Задание 1*

*Вопрос.* Укажите, к какому типу шкал относится атлас цветов.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) порядка;
- 2) абсолютная;
- 3) отношений;
- 4) интервалов;
- 5) наименований.

#### *Задание 2*

*Вопрос.* Укажите, к какому виду относятся измерения, при которых искомое значение величины определяют на основании результатов прямых измерений других физических величин, связанных с искомой известной функциональной зависимостью.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) относительные;
- 2) совместные;
- 3) совокупные;
- 4) противопоставления;
- 5) косвенные.

### *Задание 3*

*Вопрос.* Укажите виды средств измерений согласно классификации.

*Выберите несколько из 5 вариантов ответа:*

- 1) измерительные системы;
- 2) измерительные модули;
- 3) меры;
- 4) амперметры;
- 5) измерительные наконечники.

### *Задание 4*

*Вопрос.* Укажите название метода сравнения с мерой, в котором измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, одновременно воздействуют на прибор сравнения, с помощью которого устанавливается соотношение между этими величинами.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) совпадения;
- 2) противопоставления;
- 3) дифференциальный;
- 4) замещения;
- 5) нулевой.

### *Задание 5*

*Вопрос.* Укажите, как называется характеристика качества измерений, отражающая близость их результатов к истинному значению измеряемой величины.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) точность;
- 2) воспроизводимость;
- 3) идентичность;
- 4) достоверность;
- 5) сходимоссть.

### *Задание 6*

*Вопрос.* Укажите, как называется эталон, воспроизводящий единицу физической величины с наивысшей точностью, возможной в данной области измерений на современном уровне научно-технических достижений.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) рабочий;
- 2) высший;
- 3) образцовый;
- 4) первичный;
- 5) единый.

### *Задание 7*

*Вопрос.* Укажите, существующие виды поверок средств измерения.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) внеочередная;
- 2) контрольная;
- 3) вторичная;
- 4) обязательная.
- 5) интервальная;

### *Задание 8*

*Вопрос.* Укажите, как называется утвержденный в установленном порядке документ, регламентирующий средства, методы и точность передачи размера единицы физической величины от государственного эталона или исходного образцового средства измерений рабочим средствам измерений.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) калибровочная схема;
- 2) передаточная схема;
- 3) технический регламент;
- 4) государственный регламент;
- 5) поверочная схема;



### *Задание 9*

*Вопрос.* Укажите, какие виды деятельности попадают под сферу государственного метрологического надзора.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) валютные операции;
- 2) испытание и утверждение типа средств измерений;
- 3) обязательное подтверждение соответствия новых средств измерений;
- 4) количество товаров, отчуждаемое при совершении торговых операций;
- 5) лицензирование средств измерений.

### *Задание 10*

*Вопрос.* Укажите, какие функции включает в себя государственный метрологический контроль.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) калибровка средств измерений;
- 2) определение соответствия выпускаемых средств измерений утвержденному типу;
- 3) определение наличия и применения аттестованных методик выполнения измерений;
- 4) обязательное подтверждение соответствия новых средств измерений;
- 5) утверждение типа средств измерений.

### *Задание 11*

*Вопрос.* Укажите правильное условное обозначение основного неограниченного ряда предпочтительных чисел.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) R 20/4;
- 2) Ra 160;
- 3) Ra 40;
- 4) R40;
- 5) Ra 5 (...2,5).

### *Задание 12*

*Вопрос.* Укажите, как называется научно-технический метод отбора и регламентации оптимальной и сокращенной номенклатуры объектов одинакового функционального назначения.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) унификация;
- 2) симплификация;
- 3) типизация;
- 4) систематизация;
- 5) агрегатирование.

### *Задание 13*

*Вопрос.* Определите стоимость оригинальных деталей в изделии, если коэффициент применяемости по стоимости равен 30 %, а общая стоимость изделия – 900 руб.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) 270
- 2) 700
- 3) 870
- 4) 630
- 5) 300

### *Задание 14*

*Вопрос.* Укажите, какие документы в области стандартизации используются на территории РФ в соответствии с законом «О техническом регулировании».

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) государственные стандарты;
- 2) технические регламенты;
- 3) национальные стандарты;
- 4) технические условия;
- 5) стандарты предприятий.

### *Задание 15*

*Вопрос.* Укажите, как называется международная организация, цель которой содействовать унификации стандартов в области электротехники, радиотехники и электроники.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) ИСО;
- 2) СТУ;
- 3) МЭК;
- 4) ИСА;
- 5) МОЗМ.

### *Задание 16*

*Вопрос.* Укажите, как называется документ, удостоверяющий соответствие объекта требованиям технических регламентов, положениям стандартов или условиям договоров.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1) лицензия;
- 2) технический регламент;
- 3) декларация о соответствии;
- 4) стандарт;
- 5) сертификат соответствия

### *Задание 17*

*Вопрос.* Укажите объекты сертификации в Системе сертификации ГОСТ Р.

*Выберите несколько из 5 вариантов ответа:*

- 1) системы качества;
- 2) производства;
- 3) предприятия;
- 4) организации;
- 5) документация.

### Задание 18

*Вопрос.* Укажите, какие схемы основаны на использовании в качестве элемента подтверждения соответствия продукции установленным требованиям декларации о соответствии поставщика.

*Выберите несколько из 5 вариантов ответа:*

- 1) 3а;
- 2) 9а;
- 3) 3;
- 4) 7;
- 5) 10.

### Задание 19

*Вопрос.* В результате 16-ти кратных наблюдений получено значение физической величины  $\bar{x} = 46,83$ . Для измерения было использовано средство измерения класс точности 0,15 диапазон показания от +150 до -150. Оценка среднего квадратического значения единичного наблюдения 0,4. Определите результат измерения с доверительной вероятностью 95 %.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

- 1)  $\bar{x} = 46,83 \pm 0,89$
- 2)  $\bar{x} = 46,8 \pm 1,5$
- 3)  $\bar{x} = 46,8 \pm 0,5$
- 4)  $\bar{x} = 46,83 \pm 0,04$
- 5)  $\bar{x} = 46,8 \pm 0,9$

### Задание 20

$$Z = \frac{x_1^2}{x_2}$$

*Вопрос.* Имеется зависимость  $Z = \frac{x_1^2}{x_2}$ . Измерения аргументов дали следующие результаты  $x_1 = 10,5$ ;  $x_2 = 5$ . Первый аргумент был измерен прибором класса точности 0,1 с диапазоном показания 0 ... 20, второй - класса точности ①, диапазон показаний 0 .... 25. Определите результат измерения.

*Выберите один из 5 вариантов ответа:*

1)  $Z = 22,05 \pm 0,24$

2)  $Z = 22,05 \pm 1,4$

3)  $Z = 22,1 \pm 0,8$

4)  $Z = 22,1 \pm 2,1$

5)  $Z = 22,05 \pm 0,6$

**Ключ к тесту**

<i>Задание</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Ответ</i>	5	5	1,3	2	1	4	1	5	4	5

<i>Задание</i>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
<i>Ответ</i>	4	1	4	3	3	5	1,2	2,5	3	1

## КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИБОРОВ

### Амперметры и вольтметры цифровые серии 3010



Амперметры и вольтметры серии 3010 предназначены для точных измерений постоянного тока и напряжения и действующих значений переменного тока и напряжения.

Амперметры и вольтметры серии 3010 могут использоваться при поверке приборов постоянного и переменного тока класса точности 0,3 и ниже.

Амперметры и вольтметры серии 3010 предназначены для использования в стационарных условиях макроклиматических районов с умеренным климатом при температуре от 5 до 40 °С и относительной влажности 90 % при 25 °С.

Нормальные условия применения приведены в таблице 1.

Таблица 1

Влияющая величина	Нормальное значение	Допускаемое отклонение
Температура окружающего воздуха, °С	20	$\pm 2$
Относительная влажность воздуха, %	30 – 80	–
Атмосферное давление, кПа (мм рт.ст.)	60 – 106,7 (460 – 800)	–
Внешнее магнитное поле	Практически отсутствует	Магнитное поле Земли

Значения пределов измерений приведены в таблице 2.

Таблица 2

Наименование и тип прибора	Пределы измерений $I_{\Pi}$ ( $U_{\Pi}$ )
Амперметр СА3010/1	5 мА – 10 мА – 20 мА – 50 мА
Амперметр СА3010/2	50 мА – 100 мА – 200 мА – 500 мА
Амперметр СА3010/3	1 А – 2,5 А – 5 А – 10 А
Вольтметр СВ3010/1	7,5 В – 15 В – 30 В – 60 В
Вольтметр СВ3010/2	75 В – 150 В – 300 В – 600 В

Диапазоны измерений амперметров серии 3010 от  $0,1I_{\Pi}$  до  $I_{\Pi}$ , вольтметров серии 3010 от  $0,1U_{\Pi}$  до  $U_{\Pi}$ .

Пределы допускаемой основной приведенной погрешности измерений амперметров и вольтметров серии 3010 не превышают  $\pm 0,1 \%$  от предела измерения.

Амперметры и вольтметры серии 3010 тепло- и холодоустойчивы в диапазоне температур от 5 до 40 °С. При этом пределы допускаемой дополнительной погрешности измерений, вызванной изменением температуры окружающего воздуха от нормальной до любой температуры в рабочем диапазоне температур равны  $\pm 0,1 \%$  на каждые 10 °С изменения температуры.

Амперметры и вольтметры серии 3010 соответствуют требованиям по допускаемой погрешности измерения в частотном диапазоне измеряемого тока или напряжения от 40 до 1500 Гц.



## Цифровой мультиметр DMM 4020 (ТЕКТРОНИХ)

### Функции

Измерение напряжения, сопротивления и тока;

- ✓ Проверка диодов и проверка на обрыв;
- ✓ Измерения частоты;
- ✓ 4-х проводное измерения сопротивления (по схеме  $2 \times 4$ );
- ✓ Специальные измерения утечки по постоянному току;
- ✓ Шесть специальных кнопок для быстрого доступа к установкам прибора;

### Общие характеристики

Таблица 3

Габаритные размеры

Габариты	мм	дюймы
Высота	88	3,46
Ширина	217	8,56
Глубина	297	11,7
Масса	кг	фунты
Нетто	2,1	4,6

Таблица 4

## Условия окружающей среды

Характеристика	Описание
Температура	
Рабочее состояние	от 0 °С до 50 °С
Хранение	от -40 °С до 70 °С
Прогрев	пол часа для достижения заявленных точностных характеристик
Относительная влажность	
Рабочее состояние	Неконтролируемая (< 10 °С) < 90 % (от 10 °С до 28 °С) < 75 % (от 28 °С до 40 °С) < 45 % (от 40 °С до 50 °С)

**Электрические характеристики***Характеристики напряжения переменного тока*

Характеристики переменного тока приведены для синусоидальных сигналов переменного тока >5% диапазона. Для входов диапазоном от 1% до 5% и <50 кГц, добавьте дополнительную погрешность в 0,1% диапазона, а для значений от 50 кГц до 100 кГц, добавьте 0,13% диапазона.

Таблица 5

Характеристика	Описание
Способ измерений	Связанное по переменному току, истинное среднеквадратическое значение. Измерение переменной составляющей тока входа со смещением до 1000 В постоянного тока в любом диапазоне
Полоса пропускания фильтра переменного тока	20 Гц – 100 кГц
Подавление синфазного сигнала	60 дБ при 50 Гц или 60 Гц (асимметрия 1 кОм)
Максимальный коэффициент амплитуды	3:1 при полном масштабе
Дополнительные погрешности коэффициента амплитуды	Коэффициент амплитуды 1-2, 0,05% полного масштаба Коэффициент амплитуды 2-3, 0,2% полного масштаба
	Относится только к несинусоидальным сигналам



Таблица 6

## Входные характеристики

Диапазон	Полный масштаб (5,5 разрядов)	Разрешение			Входное сопротивление
		Медленное	Среднее	Быстрое	
200 мВ	199,999 мВ	1 мкВ	10 мкВ	10 мкВ	1 МОм $\pm 2\%$ параллельное соединение по <100 пф
2 В	1,99999 В	10 мкВ	100 мкВ	100 мкВ	
20 В	19,9999 В	100 мкВ	1000 мкВ	1000 мкВ	
200 В	199,999 В	1 мВ	10 мВ	10 мВ	
750 В	750,00 В	10 мВ	100 мВ	100 мВ	

Таблица 7

Диапазон	Частота	Погрешность*, при 23 °C $\pm 5$ °C	Коэффициент температуры/°C за пределами 18 – 28 °C
200 мВ	20 Гц – 45 Гц	0,8 + 0,05	0,01 + 0,005
	45 Гц – 20 кГц	0,15 + 0,05	0,01 + 0,005
	20 кГц – 50 кГц	0,3 + 0,05	0,01 + 0,005
	50 кГц – 100 кГц	0,8 + 0,05	0,05 + 0,01
2 В	20 Гц – 45 Гц	0,8 + 0,05	0,01 + 0,005
	45 Гц – 20 кГц	0,15 + 0,05	0,01 + 0,005
	20 кГц – 50 кГц	0,3 + 0,05	0,01 + 0,005
	50 кГц – 100 кГц	0,8 + 0,05	0,05 + 0,01
20 В	20 Гц – 45 Гц	0,8 + 0,05	0,01 + 0,005
	45 Гц – 20 кГц	0,15 + 0,05	0,01 + 0,005
	20 кГц – 50 кГц	0,3 + 0,05	0,01 + 0,005
	50 кГц – 100 кГц	0,8 + 0,05	0,05 + 0,01
200 В	20 Гц – 45 Гц	0,8 + 0,05	0,01 + 0,005
	45 Гц – 20 кГц	0,15 + 0,05	0,01 + 0,005
	20 кГц – 50 кГц	0,3 + 0,05	0,01 + 0,005
	50 кГц – 100 кГц	0,8 + 0,05	0,05 + 0,01
750 В	20 Гц – 45 Гц	0,8 + 0,05	0,01 + 0,005
	45 Гц – 20 кГц	0,15 + 0,05	0,01 + 0,005
	20 кГц – 50 кГц	0,3 + 0,05	0,01 + 0,005
	50 кГц – 100 кГц	0,8 + 0,05	0,05 + 0,01

\* Погрешность приведена в виде  $\pm(\% \text{ показания} + \% \text{ диапазона})$ ,

**6 1/2-разрядный****мультиметр 2000 (KEITHLEY).**

6 1/2-разрядный мультиметр модели 2000 является частью семейства

высокопроизводительных цифровых мультиметров (ЦМ) фирмы Keithley.

ЦМ 2000 является быстродействующим, точным, высокостабильным и простым в эксплуатации прибором. Он совмещает широкий диапазон измерений с высокой точностью.

Таблица 8

Характеристики по переменному току (в эффективных значениях)

Диапазон измерения напряжения	Разрешающая способность	Точность: $\pm(\% \text{ от показания} + \% \text{ от диапазона})$ , при температуре $23\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 5\text{ }^{\circ}\text{C}$				
		3Гц – 10Гц	10Гц – 20кГц	20кГц – 50кГц	50кГц – 100кГц	100кГц – 300кГц
100,0000 мВ	0,1 мкВ	0,35+0,03	0,05+0,03	0,11+0,05	0,60+0,08	4+0,5
1,000000 В	1,0 мкВ					
10,0000 В	10 мкВ					
100,0000 В	1000 мкВ					
750,000 В	1 мВ					
Температурный коэффициент точности 0-18°C и 28-50°C		0,035+0,003	0,005+0,003	0,006+0,005	0,01+0,006	0,03+0,01



### Вольтметр универсальный В7-77

Вольтметр универсальный В7-77 предназначен для измерения напряжения постоянного тока, силы постоянного тока, напряжения и силы переменного тока синусоидальной формы, электрического сопротивления постоянному току, тестирования полупроводниковых диодов и проверки электрических цепей на короткое замыкание («прозвонка»).

Вольтметр может быть применен при наладке, контроле, ремонте измерительных приборов и систем различного назначения.

Вольтметр предназначен для работы от сети переменного тока напряжением  $(220 \pm 22)$  В, частотой  $(50 \pm 0,5)$  Гц.

Вольтметр соответствует требованиям ГОСТ 22261-94, а по условиям применения относится к группе 2 ГОСТ 22261-94 с расширенным диапазоном рабочих температур от 5 до 40 °С.

Нормальные условия применения:

- температура окружающего воздуха, °С  $20 \pm 5$ ;
- относительная влажность воздуха, % от 30 до 80;
- атмосферное давление, кПа (мм рт. ст.) от 84 до 106 (от 630 до 795).

Рабочие условия применения:

- температура окружающего воздуха, °С от 5 до 40;
- относительная влажность воздуха, % до 80 при температуре 25 °С;
- атмосферное давление, кПа (мм рт. ст.) от 84 до 106,7 (от 630 до 800).

### *Технические характеристики*

Пределы допускаемой основной погрешности при измерении напряжения переменного тока синусоидальной формы не превышают значений, приведенных в таблице 9.

Таблица 9

Предел измерения ( $U_{\text{п}}$ )	Цена ед. мл. разряда	Пределы допускаемой основной погрешности в нормальных условиях применения $\pm$ (% от $U$ + ед. мл. разряда)			
		от 20 Гц до 10 кГц	от 10 до 20 кГц	от 20 до 50 кГц	от 50 до 100 кГц
200.0 мВ	100 мкВ	0,5 + 4	0,5 + 10	1 + 10	2 + 20
2.000 В	1 мВ	0,5 + 4	0,5 + 10	1 + 10	2 + 20
20.00 В	10 мВ	0,5 + 4	0,5 + 10	1 + 10	2 + 20
200.0 В	100 мВ	0,5 + 4	0,5 + 10	-	-
750 В	1 В	0,5 + 4	-	-	-

Вольтметр обеспечивает измерение силы постоянного тока до 10 А с конечными значениями пределов  $I_{\text{п}}$  – 2, 20, 200 мА, 10 А. Формат индикации 4 1/2 разряда.

Пределы допускаемой основной погрешности при измерении силы постоянного тока не превышают значений, приведенных в таблице 10.

Таблица 10

Предел измерения ( $I_{\text{п}}$ )	Цена ед. мл. разряда	Пределы допускаемой основной погрешности в нормальных условиях применения $\pm$ (% от $I$ + ед. мл. разряда)
2.0000 мА	100 нА	0,25 + 4
20.000 мА	1 мкА	0,25 + 4
200.00 мА	10 мкА	0,25 + 4
10.000 А	1 мА	0,25 + 4

Вольтметр обеспечивает измерение силы переменного тока синусоидальной формы до 10 А с конечными значениями пределов  $I_{\text{п}}$  – 2, 20, 200 мА, 10 А. Формат индикации 3 1/2 разряда.

Пределы допускаемой основной погрешности при измерении силы переменного тока синусоидальной формы не превышают значений, приведенных в таблице 11.

Таблица 11

Предел измерения ( $I_{\text{п}}$ )	Цена ед. мл. разряда	Пределы допускаемой основной погрешности в нормальных условиях применения $\pm$ (% от $I$ + ед. мл. разряда)
		от 40 Гц до 1000 Гц
2.000 мА	1 мкА	1 + 2
20.00 мА	10 мкА	1 + 2
200.0 мА	100 мкА	1 + 2
10.00 А	10 мА	1 + 2

Пределы допускаемой дополнительной погрешности измерения при изменении температуры окружающего воздуха на каждые 10 °С в интервале рабочих температур не превышают пределов основной погрешности для каждого вида измерений.

Вольтметр обеспечивает свои технические характеристики в пределах норм, по истечении времени установления рабочего режима, равного 15 мин.

Вольтметр допускает непрерывную работу в рабочих условиях применения в течение времени не менее 16 ч при сохранении своих технических характеристик.

Вольтметр сохраняет свои технические характеристики в пределах норм при питании от сети переменного тока напряжением (220±22) В, частотой (50±0,5) Гц, содержанием гармоник до 5 %.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица 1. Интегральная функция нормированного нормального распределения  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

<b>z</b>	<b>0,09</b>	<b>0,08</b>	<b>0,07</b>	<b>0,06</b>	<b>0,05</b>	<b>0,04</b>	<b>0,03</b>	<b>0,02</b>	<b>0,01</b>	<b>0,00</b>
-3,5	0,00017	0,00017	0,00018	0,00019	0,00019	0,00020	0,00021	0,00022	0,00022	0,00023
-3,4	0,00024	0,00025	0,00026	0,00027	0,00028	0,00029	0,00030	0,00031	0,00033	0,00034
-3,3	0,00035	0,00036	0,00038	0,00039	0,00040	0,0006	0,00043	0,00045	0,00047	0,00048
-3,2	0,00050	0,00052	0,00054	0,00056	0,00058	0,00080	0,00062	0,00064	0,00066	0,00069
-3,1	0,00071	0,00074	0,00076	0,00079	0,0082	0,00085	0,00087	0,00090	0,00094	0,00097
-3,0	0,00100	0,00104	0,00107	0,00111	0,00114	0,00118	0,00122	0,00126	0,00131	0,00135
-2,9	0,0014	0,001411	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0017	0,0018	0,0019
-2,8	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026
-2,7	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
-2,6	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047
-2,5	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0065	0,0067	0,0069	0,0060	0,0062
-2,4	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	0,0082
-2,3	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107
-2,2	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139
-2,1	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179
-2,0	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228
-1,9	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287
-1,8	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359
-1,7	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446
-1,6	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548
-1,5	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668
-1,4	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	0,0808
-1,3	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	0,0968
-1,2	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1057	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151
-1,1	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357
-1,0	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
-0,9	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
-0,8	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
-0,7	0,2148	0,2177	0,2207	0,2236	0,2266	0,2297	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
-0,6	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
-0,5	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
-0,4	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
-0,3	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
-0,2	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
-0,1	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
-0,0	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000

<b>z</b>	<b>0,00</b>	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,03</b>	<b>0,04</b>	<b>0,05</b>	<b>0,06</b>	<b>0,07</b>	<b>0,08</b>	<b>0,09</b>
+0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
+0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
+0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
+0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
+0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
+0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
+0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
+0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
+0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
+0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
+1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
+1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
+1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
+1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
+1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
+1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
+1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
+1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
+1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
+1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
+2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
+2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
+2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
+2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
+2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
+2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
+2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9057	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
+2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
+2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
+2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
+3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
+3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
+3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
+3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
+3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
+3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

Таблица 2. Интегральная функция нормированного нормального распределения. Значение  $z$  для различных  $\Phi(z)$

$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$
0,0005	-3,2905	0,50	+0,0000
0,005	-2,575	0,55	+0,1257
0,01	-2,3267	0,60	+0,2533
0,05	-1,6449	0,65	+0,3853
0,10	-1,2816	0,70	+0,5244
0,15	-1,0364	0,75	+0,6745
0,20	-0,8416	0,80	+0,8416
0,25	-0,6745	0,85	+1,0364
0,30	-0,5244	0,90	+1,2816
0,35	-0,3853	0,95	+1,6449
0,40	-0,2533	0,99	+2,3267
0,45	-0,1257	0,995	+2,5750
0,50	-0,0000	0,999	+3,2905

Таблица 3. Распределение Стьюдента.

Значения  $P\{|t| < t_p\} = 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt$  для различных  $t_p$

$k$	$t_p$			
	2,0	2,5	3,0	3,5
1	0,7048	0,7578	0,7952	0,8228
2	0,8164	0,8764	0,9046	0,9276
3	0,8606	0,9122	0,9424	0,9606
4	0,8838	0,9332	0,9600	0,9752
5	0,8980	0,9454	0,9700	0,9828
6	0,9076	0,9534	0,9760	0,9872
7	0,9144	0,9590	0,9800	0,9900
8	0,9194	0,9630	0,9830	0,9920
9	0,9234	0,9662	0,9850	0,9932
10	0,9266	0,9686	0,9866	0,9942
11	0,9292	0,9704	0,9880	0,9950
12	0,9314	0,9720	0,9890	0,9956
13	0,9332	0,9737	0,9898	0,9960
14	0,9348	0,9740	0,9904	0,9964
15	0,9360	0,9754	0,9910	0,9968
16	0,9372	0,9764	0,9916	0,9970
17	0,9382	0,9770	0,9920	0,9972
18	0,9392	0,9776	0,9924	0,9974
19	0,9400	0,9782	0,9926	0,9976
20	0,9408	0,9788	0,9930	0,9978
$\infty$	0,9545	0,9876	0,9973	0,9995

Таблица 4. Распределение Стьюдента  $P\{|t| < t_p\} = 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt$

$k$	$P$											
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,307	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,332	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,707
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
$\infty$	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *ГОСТ 8.417–2002*. Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Единицы величин.
2. *ГОСТ 8.401–80* ГСИ. Классы точности средств измерений. Общие требования.
3. *ГОСТ 8.051–81* ГСИ. Погрешности, допускаемые при измерении линейных размеров до 500 мм.
4. *Кузнецов В.А., Ялунна Г.В.* Общая метрология. – М.: ИПК Изд-во стандартов, 2001. – 272 с.
5. *Леонов О.А., Карпузов В.В., Шкаруба Н.Ж., Кисенков Н.Е.* Метрология, стандартизация и сертификация / Под ред. О.А.Леонова. – М.: КолосС, 2009. – 568 с.
6. *Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж.* Метрология и технические измерения: учебное пособие для студентов, осваивающих образовательные программы бакалавриата по направлению подготовки «Агроинженерия». – М: Издательство РГАУ-МСХА, 2015. – 239 с.
7. *Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж.* Методы и средства измерений электрических и тепловых величин: учебное пособие для студентов, осваивающих образовательные программы бакалавриата по направлению подготовки «Агроинженерия». – М: Издательство РГАУ-МСХА, 2015. – 166 с.
8. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
9. *Раннев Г.Г., Тарасенко А.П.* Методы и средства измерений: учебник для студ. высш. учеб. заведений. – М.: ИЦ «Академия», 2008. – 336 с.
10. *РМГ 29–2013* ГСИ. Метрология. Основные термины и определения.

11. *РД 50–98–86* Методические указания. Выбор универсальных средств измерений линейных размеров до 500 мм (По применению ГОСТ 8.051-81).

12. *Сергеев А.Г.* Метрология и метрологическое обеспечение: учебник/ А.Г.Сергеев. – М.: Высшее образование, 2008. – 575 с.

13. *Шкаруба Н.Ж.* Метрология: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 110300 «Агроинженерия». – М: МГАУ, 2007. – 162 с.

14. *Шкаруба Н.Ж.* Техничко-экономические критерии выбора универсальных средств измерений при ремонте сельскохозяйственной техники: монография.– М: МГАУ, 2009. – 118 с.

*Учебное издание*

**Шкаруба Нина Жоровна**

**Теоретическая метрология**

Учебное пособие

Издано в авторской редакции  
Корректурa авторов

Подписано в печать Формат 60×84 1/16  
Усл. печ. л. Уч.-изд. л. Изд. № . Зак. .

Издательство РГАУ-МСХА  
127550, Москва, Тимирязевская ул., 44  
Тел.: 8 (499) 977-00-124; 977-40-64