Некоторые примеры ручного счета для лабораторных работ 4 и 5

Интегрирование

Задание. Дана функция *F(x)=1/(1+x+x^2)*, где x изменяется на интервале [1;-1] с шагом интегрирования hx=(b-a)/10=(1-(-1))/10=0.2. Вычислить значение интеграла с помощью численных методов с точностью ε=0,0001.

Вычислим значение функции F(x) для соответствующих значений x_i:

x_0=-1 $f(x_0)= 1/(1+x+x^2) =1/(1-1+(-1)^2)=1$

x_1=-0.8 $f(x_1)= 1/(1+x+x^2) =1/(1-0.8+(-0.8)^2)= 1,1905$

x_2=-0.6 $f(x_2)= 1/(1+x+x^2) =1/(1-0.6+(-0.6)^2)= 1,3158$

x_3=-0.4 $f(x_3)= 1/(1+x+x^2) =1/(1-0.4+(-0.4)^2)= 1,3157895$

x_4=-0.2 $f(x_4)= 1/(1+x+x^2) =1/(1-0.2+(-0.2)^2)= 1,1904762$

x_5=0 $f(x_5)= 1/(1+x+x^2) =1/(1+0+0^2)= 1$

x_6=0.2 $f(x_6)= 1/(1+x+x^2) =1/(1+0.2+0.2^2)= 0,8064516$

x_7=0.4 $f(x_7)= 1/(1+x+x^2) =1/(1+0.4+0.4^2)= 0,6410256$

x_8=0.6 $f(x_8)= 1/(1+x+x^2) =1/(1+0.6+0.6^2)= 0,5102041$

x_9=0.8 $f(x_9)= 1/(1+x+x^2) =1/(1+0.8+0.8^2)= 0,4098361$

x_{10}=1 $f(x_{10})= 1/(1+x+x^2) =1/(1+1+1^2)= 0,3333$

Метод левых прямоугольников. $S_{лп} = h_x[y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}] = h_x[f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})]$

ILP=0.2*(1+1.1905+1.3158+1.3157895+1.1904762+1+0.8064516+0.6410256+0.5102041+ +0.4098361)= **1,876010**

Метод правых прямоугольников. $S_{пп} = h_x[y_1 + y_2 + ... + y_n] = h_x[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]$

IPP=0.2*(1.1905+1.3158+1.3157895+1.1904762+1+0.8064516+0.6410256+0.5102041+ +0.4098361+0.3333)= **1,742676**

Метод центральных прямоугольников.

$S_{пп} = h_x[y^c{}_1 + y^c{}_2 + ... + y^c{}_n] = h_x[f(x^c{}_1) + f(x^c{}_2) + ... + f(x^c{}_n)]$

Среднее значение Xc_i	Значение функции от среднего значения $F(xc_i)$
Xc_0= -0,9	$f(xc_0)= 1/(1+x+x^2) =1/(1-0.9+(-0.9)^2)= 1,0952$
Xc_1= -0,7	$f(xc_1)= 1/(1+x+x^2) =1/(1-0.7+(-0.7)^2)= 1,2531$
Xc_2= -0,5	$f(xc_2)= 1/(1+x+x^2) =1/(1-0.5+(-0.5)^2)= 1,3158$
Xc_3= -0,3	$f(xc_3)= 1/(1+x+x^2) =1/(1-0.3+(-0.3)^2)= 1,2531$
Xc_4= -0,1	$f(xc_4)= 1/(1+x+x^2) =1/(1-0.1+(-0.1)^2)= 1,0952$
Xc_5= 0,1	$f(xc_5)= 1/(1+x+x^2) =1/(1+0.1+0.1^2)= 0,9032$
Xc_6= 0,3	$f(xc_6)= 1/(1+x+x^2) =1/(1+0.3+0.3^2)= 0,7237$
Xc_7= 0,5	$f(xc_7)= 1/(1+x+x^2) =1/(1+0.5+0.5^2)= 0,5756$
Xc_8= 0,7	$f(xc_8)= 1/(1+x+x^2) =1/(1+0.7+0.7^2)= 0,46$
Xc_9= 0,9	$f(xc_5)= 1/(1+x+x^2) =1/(1+0.9+0.9^2)= 0,3716$

ICP=0,2*(1,0952+1,2531+1,3158+1,2531+1,0952+0,9032+0,7237+0,5756+0,46+0,3716)= = **1,809343**

Метод трапеций.

$$S_{тр} = h_x\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})\right] \quad S'_{тр} = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_{n-2})}{2} h_x$$

ITR=0.2*((1+0.3333)/2+1.1905+1.3158+1.3157895+1.1904762+1+0.8064516+0.6410256+0.5102041+0.4098361)= **1,809343**

Метод парабол (метод Симпсона).

$$S_{пр} = \frac{h_x}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})\right) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2})\right)\right]$$

S1(нечетные)= 1.1905+1.3157895+1+0.6410256+0.4098361=4,5571512
S2(четные)=1.3158+1.1904762+0.8064516+0.5102041=3,8229319
IPR=(0,2/3)*(1+0,3333+4*4,5571512+2*3,8229319)= **1,813846**

Вычислим ***точное значение*** интеграла

$$\int \frac{1}{\left(1 + x + x^2\right)}\,dx \rightarrow \rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(1 + x + x^2\right)}\,dx = 1.81379936$$

I=1.81379924

Вычислим ***погрешности*** для всех методов:

QLP=	|I-ILP|=	|1.81379924-1,876010|=	0,062210
QPP=	|I-IPP|=	|1.81379924-1,742676|=	0,071123
QCP=	|I-ICP|=	|1.81379924-1,809343|=	0,004456
QTR=	|I-ITR|=	|1.81379924-1,809343|=	0,004456
QPR=	|I-IPR|=	|1.81379924-1,813846|=	0,000046

Самым точным является метод парабол, его погрешность составляет меньше заданной точности ε=0,0001.

Дифференцирование

Пример 1.

Ручная реализация метода. Пусть дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y'' + y' + 2y - x = 0.$$

Задан интервал интегрирования [a;*b*]=[0;3] и число разбиений *n*=3.
Шаг интегрирования $hx=(b-a)/n = (3-0)/3=1$.
Начальные условия: $y(0)=1$, $y'(0)=2$.
Для удобства обозначим $z(x)= y'(x)$. Тогда дифференциальное уравнение второго порядка преобразуется в систему двух дифференциальных уравнений первого прядка относительно двух неизвестных функций $y(x)$ и $z(x)$

$$\frac{dy}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -z - 2y + x$$

с начальными условиями $y(0)=1$ и $z(0)=2$ на интервале интегрирования [0;3] с шагом $hx=1$. Обозначим функции в правых частях системы дифференциальных уравнений: $fy(z)=z$, $fz(x,y,z)=-z-2y+x$. Тогда итерационные формулы для нахождения y_i, z_i, x_i, где i=1, 2, 3, запишутся в виде (метод Эйлера):

$$\begin{cases} y_i = y_{i-1} + hx \cdot fy(z_{i-1}), \\ z_i = z_{i-1} + hx \cdot fz(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}), \\ x_i = x_{i-1} + hx \end{cases}$$

При $i = 1$ имеем $y_1 = y_0 + hx{\cdot}fy(z_0) = 1 + 1{\cdot}2 = 3$

$z_1 = z_0 + hx{\cdot}fz(x_0, y_0, z_0) = 2 + 1{\cdot}(-2 - 2{\cdot}1 + 0) = -2$

$x_1 = x_0 + hx = 0 + 1 = 1$

При $i = 2$ имеем $y_2 = y_1 + hx{\cdot}fy(z_1) = 3 + 1{\cdot}(-2) = 1$

$z_2 = z_1 + hx{\cdot}fz(x_1, y_1, z_1) = -2 + 1{\cdot}(2 - 2{\cdot}3 + 1) = -5$

$x_2 = x_1 + hx = 1 + 1 = 2$

При $i = 3$ имеем $y_3 = y_2 + hx{\cdot}fy(z_2) = 1 + 1{\cdot}(-5) = -4$

$z_3 = z_2 + hx{\cdot}fz(x_2, y_2, z_2) = -5 + 1{\cdot}(5 - 2{\cdot}1 + 2) = 0$

$x_1 = x_0 + hx = 2 + 1 = 3$

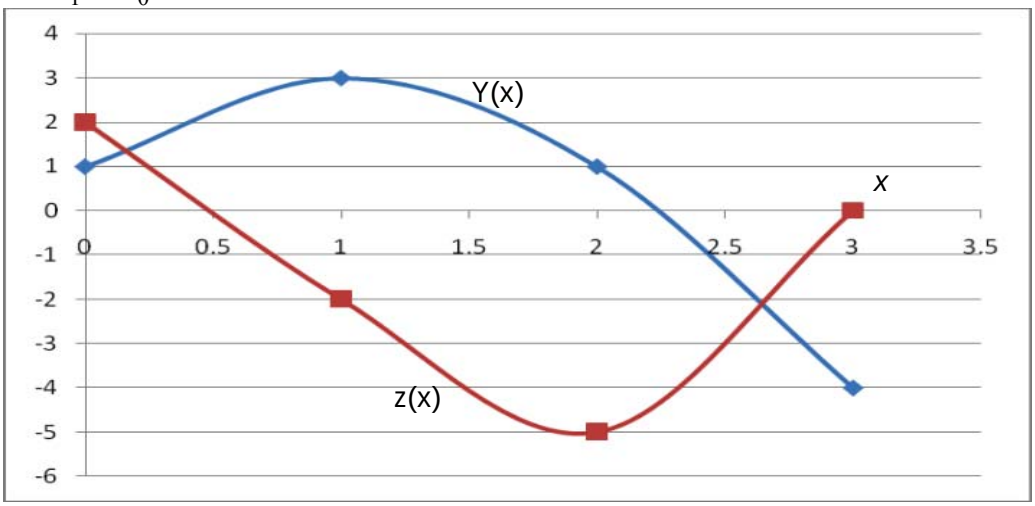

Рис.1. Графики искомых функций y(x) и z(x)

Пример 2.

Ручная реализация метода.

y''+4y'+4y-2x+3=0 y(0)=-1/4 y'(0)=-1/2 интервал [0;0.5]

Сделаем замену z(x)=y'(x).Тогда задача Коши заменится решением системы уравнения первого порядка:

$$\begin{Bmatrix} z' = -4z - 4y + 2x - 3 \\ y' = z \end{Bmatrix}$$

Метод Эйлера (простой):

К=0

$x_1 = 0 + 0.1 = 0.1$

$y_1 = -0.25 + 0.1(-0.5) = -0.3$

$z_1 = -0.5 + 0.1(-4(-0.5) - 4(-0.3) + 2(0.1) - 3) = -0.46$

К=1

$x_2 = 0.1 + 0.1 = 0.2$

$y_2 = -0.3 + 0.1(-0.46) = -0.346$

$z_2 = -0.46 + 0.1(-4(-0.46) - 4(-0.346) + 2(0.2) - 3) = -0.4176$

К=2

$x_3 = 0.2 + 0.1 = 0.3$

$y_3 = -0.346 + 0.1(-0.4176) = -0.30424$

$z_3 = -0.4176 + 0.1(-4(-0.4176) - 4(-0.30424) + 2(0.2) - 3) = -0.408864$

Метод Эйлера (модификация №1)

K=0

$x_1 = 0 + 0.05 = 0.05$

$y_1 = -0.25 + 0.05(-0.5) = -0.275$

$z_1 = -0.5_0.05(-4(-0.5) - 4(-0.275) + 2(0.05) - 3) = -0.49$

K=1

$x_2 = 0.05 + 0.05 = 0.1$

$y_2 = -0.275 + 0.05(-0.49) = -0.2995$

$z_2 = -0.49 + 0.05(-4(-0.49) - 4(-0.2995) + 2(0.1) - 3) = -0.4721$

K=2

$x_3 = 0.1 + 0.05 = 0.15$

$y_3 = -0.2995 + 0.05(0.4721) = -0.32311$

$z_3 = -0.32311 + 0.05(-4(-0.32311) - 4(0.4721) + 2(0.15) - 3) = -0.2991$

Метод Эйлера (модификация №2)

K=0

$x_1 = 0 + 0.1 = 0.1$

$y_1 = -0.25 + 0.1(-0.46) = -0.296$

$z_1 = -0.5 + 0.1(-4(-0.296) - 4(-0;.46) + 2(0.1) - 3) = -0.4776$

K=1

$x_2 = 0.1 + 0.1 = 0.2$

$y_2 = -0.296 + 0.1(0.66) = -0.23$

$z_2 = -0.4776 + 0.1(-4(-0.4776) - 4(-0.23) + 2(0.2) - 3) = -0.45456$

K=2

$x_3 = 0.2 + 0.1 = 0.3$

$y_3 = -0.23 + 0.1(0.272) = -0.2028$

$z_3 = -0.45456 + 0.1(-4(-0.45456) - 4(-0.2028) + 2(0.3) - 3) = -0.431616$

Метод Эйлера (модификация №3)

K=0

$x_1 = 0 + 0.1 = 0.1$

$y_1 = -0.25 + 0.05(-0.5 + (-0.46)) = -0.298$

$z_1 = -0.5 + 0.05(2 \cdot 0 - 3 - 3(-0.5) - 4(-0.25) - 3 + 2(0.1) - 4(-0.46) - 4(-0.3)) = -0.488$

K=1

$x_2 = 0.1 + 0.1 = 0.2$

$y_2 = -0.298 + 0.05(-0.488 - 4.552) = -0.55$

$z_2 = -0.488 + 0.05(2(0.2) - 3 - 4(-0.488) - 4(-0.298) - 3 + 2(0.2) - 4(-4.552) - 4(-0.55)) = 0.4296$

K=2

$x_3 = 0.2 + 0.1 = 0.3$

$y_3 = -0.55 + 0.05(0.4296 + (-1.2296)) = -0.59$

$z_3 = 0.4296 + 0.05(-3 + 2(0.3) - 4(0.4296) - 4(-0.55) - 3 + 2(0.3) - 4(-1.2296) - 4(0.4296)) = -0.7064$

Пример 3.
Ручная реализация метода.

Задание:

Решить задачу Коши с начальными условиями.

$y'' - 4y' + 5y = 3x$

$y(0) = 2.5 \quad y'(0) = 2.2$ интервал [0; 0.5]

Суть решения:

Требуется определить на промежутке [a;b] с шагом hx приближенные значения функций y(x), y'(x), удовлетворяющие д.у. и начальным условиям, в табличной форме.

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_i & \dots & y_n \\ y'_0 & y'_1 & \dots & y'_i & \dots & y'_n \end{bmatrix}$$

Ручной счет:

$y'' - 4y' + 5y = 3x \quad y(0) = 2.5 \quad y'(0) = 2.2$ [0; 0.5] n=4 hx=(b-a)/n hx=(0.5-0)/4=0.125

x_0=0 y_0=2.5 z_0=2.2

fy(z)=z fz(x,y,z)=3x+4z-5y

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ z_{i+1} \\ x_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_i + hx \cdot fy(z_i) \\ z_i + hx \cdot fz(x_i, z_i) \\ x_i + hx \end{pmatrix}$$

При i=1

$y_1 = y_0 + hx \cdot fy(z_0) = 2.775$

$z_1 = z_0 + hx \cdot fz(x_0, z_0) = 1.738$

$x_1 = x_0 + hx = 0.125$

При i=2

$y_2 = y_1 + hx \cdot fy(z_1) = 2.992$

$z_2 = z_1 + hx \cdot fz(x_1, z_1) = 0.919$

$x_2 = x_1 + hx = 0.25$

При i=3

$y_3 = y_2 + hx \cdot fy(z_2) = 3.107$

$z_3 = z_2 + hx \cdot fz(x_2, z_2) = -0.398$

$x_3 = x_2 + hx = 0.375$

При i=4

$y_3 = y_2 + hx \cdot fy(z_2) = 3.057$

$z_3 = z_2 + hx \cdot fz(x_2, z_2) = -2.399$

$x_3 = x_2 + hx = 0.5$

Получили данные:

x	***y***	***z***
0	2,5	2,2
0,125	2,775	1,738
0,25	2,992	0,919
0,375	3,107	-0,398
0,5	3,057	-2,399

Например, вычисление Z_3=-0,398+0,125*(3*0,375+4*-0,398-5*3,107)=
-0,398+0,125*(1,125-1,592-15,535)=-2,399

Метод Эйлера (с усреднением)

При i=1

$y_1 = y_0 + hx \cdot fy(z_0) = 2.738$

$z_1 = z_0 + hx \cdot fz(x_0, z_0) = 1.534$

$x_1 = x_0 + hx = 0.125$

При i=2

$$y_2 = y_1 + hx \cdot \frac{(fy(z_1) + fy(z_0))}{2} = 2.862$$

$$z_2 = z_1 + hx \cdot \frac{(fz(x_1, z_1) + fz(x_0, z_0)}{2} = 0.342$$

$x_2 = x_1 + hx = 0.25$

При i=3

$$y_3 = y_2 + hx \cdot \frac{(fy(z_2) + fy(z_1))}{2} = 2.792$$

$$z_3 = z_2 + hx \cdot \frac{(fz(x_2, z_2) + fz(x_1, z_1)}{2} = -1.598$$

$$x_3 = x_2 + hx = 0.375$$

При i=4

$$y_3 = y_2 + hx \cdot \frac{(fy(z_2) + fy(z_1))}{2} = 2.419$$

$$z_3 = z_2 + hx \cdot (fz(x_2, z_2) + fz(x_1, z_1) = -3.575$$

$$x_3 = x_2 + hx = 0.5$$

Метод Эйлера (с центрированием)

При i=1

$$y_{1/2} = y_0 + {hx}/{2} \cdot fy(z_0) = 2.61$$

$$z_{1/2} = z_0 + {hx}/{2} \cdot fz(x_0, z_0) = 1.97$$

$$x_{1/2} = x_0 + {hx}/{2} = 0.06$$

$$y_1 = y_0 + hx \cdot fy(z_{1/2}) = 2.62$$

$$z_1 = z_0 + hx \cdot fz(x_{1/2}, z_{1/2}) = 2.32$$

$$x_1 = x_0 + hx = 0.125$$

При i=2

$$y_{3/2} = y_1 + {hx}/{2} \cdot fy(z_1) = 2.88$$

$$z_{3/2} = z_1 + {hx}/{2} \cdot fz(x_1, z_1) = 1.71$$

$$x_{3/2} = x_1 + {hx}/{2} = 0.19$$

$$y_2 = y_1 + hx \cdot fy(z_{3/2}) = 2.95$$

$$z_2 = z_1 + hx \cdot fz(x_{3/2}, z_{3/2}) = 1.88$$

$$x_2 = x_1 + hx = 0.25$$

При i=3

$$y_{5/2} = y_2 + {hx}/{2} \cdot fy(z_2) = 2.92$$

$$z_{5/2} = z_2 + {hx}/{2} \cdot fz(x_2, z_2) = 0.52$$

$$x_{5/2} = x_2 + {hx}/{2} = 0.31$$

$$y_3 = y_2 + hx \cdot fy(z_{5/2}) = 2.93$$

$$z_3 = z_2 + hx \cdot fz(x_{5/3}, z_{5/3}) = 0.71$$

$$x_3 = x_2 + hx = 0.38$$

При i=4

$$y_{7/2} = y_3 + {hx}/{2} \cdot fy(z_3) = 2.84$$

$$z_{7/2} = z3 + {hx}/{2} \cdot fz(x_3, z_3) = -1.41$$

$$x_{7/2} = x_3 + {hx}/{2} = 0.44$$

$$y_4 = y_3 + hx \cdot fy(z_{7/2}) = 2.73$$

$$z_4 = z_3 + hx \cdot fz(x_{7/3}, z_{7/3}) = -3.54$$

$$x_4 = x_3 + hx = 0.5$$

Ручной счет метода Рунге-Кутта

Высчитываем коэффициенты:

$$k_1 = hx * f(x, y, z)$$

$$k_2 = hx * f(x + \frac{hx}{2}, y + \frac{k_1}{2}, z + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hx * f(x + \frac{hx}{2}, y + \frac{k_2}{2}, z + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hx * f(x + \frac{hx}{2}, y + \frac{k_3}{2}, z + \frac{k_3}{2})$$

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Результат представим в таблицу

i	k_{1_i}	k_{2_i}	k_{3_i}	k_{4_i}	Δy_i
1	-0.6	-0.54	-0.50	-0.34	-0.5
2	-.091	-0.84	-0.80	-0.71	-0.82
3	-1.29	-1.20	-1.09	-0.92	-1.12
4	-1.75	-1.64	-1.53	-1.41	-1.58
5	-2.39	-2.25	-2.10	-1.94	-2.27