Численные методы решения нелинейного уравнения с одной неизвестной

Постановка задачи

Дано нелинейное уравнения x^2-11x+30, интервал поиска корня [3;5.5] и шаг hx=0.3.
Требуется:

- Отделить первый корень уравнения шаговым методом;
- Уточнить значение корня методом деления пополам с точностью ε=0,01;
- Уточнить значение корня методом Ньютона с точностью ε=0,001;
- Уточнить значение корня методом простой итерации с точностью ε=0,03.

Шаговый метод

Для отделения корней воспользуемся шаговым (табличным) методом (Рис. 1).

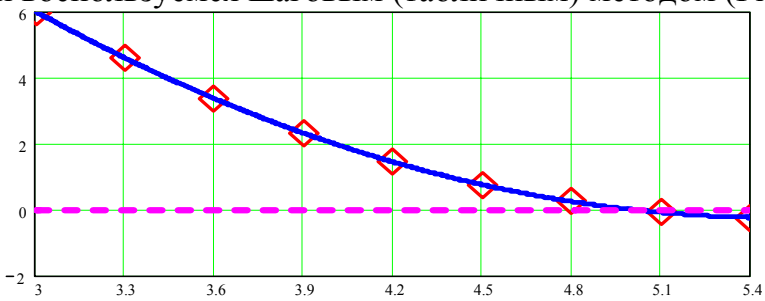

Рисунок 1. График функции f(x) на заданном интервале [3;3.5]

Идея метода состоит в вычислении таблицы значений функции y=f(x) при изменении величины x на заданном промежутке с выбранным шагом hx:

x	3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4
f(x)	6	4,59	3,36	2,31	1,44	0,75	0,24	-0,09	-0,24

Из анализа полученной таблицы следует, что на концах промежутка [4.8;5.1] функция y=f(x) меняет знак с (+) на (-). Из непрерывности функции следует, что на нём есть точка x1, где f(x1)=0. Следовательно, этот промежуток является интервалом изоляции корня.

Метод половинного деления

Идея метода состоит в делении исходного промежутка изоляции корня пополам точкой $x_{0ср}$=4.95 и вычислении значений функции на левом конце f(4.8)=0.24 и в середине f(4.95)=0.053. Так как их произведение >0, то смена знака функции будет на правой половине, выбираем её в качестве первого приближения [4.95; 5.1], исключив левую половину. Таким образом, на первой итерации получаем интервал (с корнем) в два раза короче, на второй – в четыре раза и так до тех пор, пока интервал изоляции не станет меньше ε=0,01.

Первая итерация:

$$x_{1ср} = \frac{4.8+5.1}{2} = 4{,}95$$

$f(4{,}95) = 0{,}053$ → выбираем правую половину [4,95; 5,1]

$f(4.95)\cdot f(5{,}1) < 0,$

Вторая итерация:

$$x_{1ср} = \frac{4.95+5.1}{2} = 5{,}025$$

$f(5{,}025) = -0{,}024$ → выбираем левую половину [4,95; 5,025]

$f(4.95)\cdot f(5{,}025) < 0,$

Третья итерация:

$$x_{2ср} = \frac{4.95 + 5.025}{2} = 4.9875$$

$f(4.9875) = 0{,}013$ → выбираем правую половину [4,9875; 5,025]

$f(4.95) \cdot f(4.9875) > 0,$

Четвертая итерация:

$$x_{3ср} = \frac{4.9875 + 5.025}{2} = 5{,}00625$$

$f(5{,}00625) = -0{,}006211$ → выбираем левую половину [4,9875; 5,00625]

$f(4.9875) \cdot f(5.00625) < 0,$

Пятая итерация:

$$x_{3ср} = \frac{4.9875 + 5.00625}{2} = 4.996875$$

$f(4.996875) = 0.003135$

$f(4.9875) \cdot f(4.996875) > 0,$

→ выбираем правую половину [4,996875; 5,00625]

Построим таблицу интервалов, последовательно выбираемых алгоритмом метода деления пополам, включая их длину $|a_k-b_k|$. Здесь и далее k – номер итерации.

k	0	1	2	3	4	5
a_k	4,8	4,95	4,95	4,987	4,987	4,997
b_k	5,1	5,1	5,025	5,025	5,006	5,006
$\|b_k-a_k\|$	0,3	0,15	0,075	0,038	0,019	0,009

Построим таблицу середин полученных интервалов.

k	0	1	2	3	4	5
xc	4,95	5,025	4,987	5,006	4,997	5,002

Построим таблицу значений функции f(x) на концах и в середине выбираемых интервалов по итерациям.

k	0	1	2	3	4	5
$f(a_k)$	0,24	0,053	0,053	0,013	0,013	0,003
$f(b_k)$	-0,09	-0,09	-0,024	-0,024	-0,006	-0,006
f(xc)	0,053	-0,024	0,013	-0,006	0,003	-0,002

Т.к. длина интервала [4,996875; 5,00625] на 5-й итерации равна 0.009375, что меньше заданной допустимой погрешности ε=0.01, то в качестве приближённого значения корня можно взять любую точку из полученного интервала, включая границы. Возьмем в качестве корня середину последнего пятого интервала xc=5,002, поскольку из известных нам точек пятого интервала a_5, b_5, xc_5 именно в середине интервала значение функции f(x) ближе к нулю: $f(xc_5)$=-0,0015. Таким образом, требуемая точность ε=0,01 в смысле близости к нулю функции f(x) достигнута на 3-ей итерации, а требуемая точность в смысле величины интервала изоляции корня достигнута на 5-ой итерации метода деления пополам.

Метод Ньютона (метод касательных).

Идея метода состоит в замене функции y=f(x) её линейной моделью в окрестности начального значения корня x_0 в виде касательной. Соответствующее нелинейному уравнению линейное уравнение $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$. Таким образом, имеем в качестве решения первое приближение к корню $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$. Уточним корень уравнения на интервале изоляции методом Ньютона.

Нулевая итерация:

Для определения нулевого приближения проверим *условие сходимости*: $F(x_0)*F''(x_0)>0$.

$F(x_0)= x^2-11x+30$ $\quad$ $F''(x_0)=2$

Для x_0=4.8 $F(x_0)= 4.8^2-11*4.8+30 =2281,2 >0$ $\quad$ $F(x_0)*F''(x_0)=2*2281,2>0$ – условие выполняется. В качестве нулевого приближения возьмем левую границу интервала изоляции корня [4.8;5.1]. x_0=4,8

Первая итерация:

$f(x_0) = x_0^2 - 11 \cdot x_0 + 30 = 4,8^2 - 11 \cdot 4,8 + 30 = 0,24 > \varepsilon = 0,001$

$f'(x_0) = 2 \cdot x_0 - 11=2 \cdot 4,8 - 11= -1,4$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4,8 - \frac{f(4,8)}{f'(4,8)} = 4,8 - \frac{0,24}{(-1,4)} = 4,8 - (-0,171) = 4,971$$

$f(x_1) = x_1^2 - 11 \cdot x_1 + 30 = 4,971^2 - 11 \cdot 4,971 + 30 = 0,029 > \varepsilon = 0,001$

$x_1 - x_0 = 0,171 > \varepsilon = 0,001$

Продолжаем итерации. Требуемая точность ε = 0,001 еще не достигнута.

Вторая итерация:

$f'(x_1) = 2 \cdot x_1 - 11=2 \cdot 4,971 - 11= -1,057$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 4,971 - \frac{f(4,971)}{f'(4,971)} = 4,971 - \frac{0,029}{(-1,057)} = 4,971 - (-0,028) = 4,999$$

$f(x_2) = x_2^2 - 11 \cdot x_2 + 30 = 4,999^2 - 11 \cdot 4,999 + 30 = 0,0007728 < \varepsilon = 0,001$

$x_2 - x_1 = 0,028 > \varepsilon = 0,001$

Требуемая точность ε = 0,001 в смысле близости к нулю функции $f(x_2)$достигнута. Требуемая точность ε = 0,001 в смысле близости к нулю $\Delta x=x_2 - x_1$ еще не достигнута.

Третья итерация:

$f'(x_2) = 2 \cdot x_2 - 11=2 \cdot 4,999 - 11= -1,002$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 4,999 - \frac{f(4,999)}{f'(4,999)} = 4,999 - \frac{0,0007728}{(-1,002)} = 4,999 - (-0,0000005954) = 5$$

$f(x_3) = x_3^2 - 11 \cdot x_3 + 30 = 5^2 - 11 \cdot 5+ 30 = 0,0000005954 < \varepsilon = 0,001$

$x_3 - x_2= 0,0007716 < \varepsilon = 0,001$

Требуемая точность ε = 0,001 в смысле близости к нулю функции $f(x_3)$достигнута. Требуемая точность ε = 0,001 в смысле близости к нулю $\Delta x=x_3 - x_2$ достигнута.

Если под погрешностью вычисления корня понимать Δy – близость по модулю к нулю функции f(x), то для достижения требуемой точности ε=0.001 требуется 2 итерации. Ответом является x_2=4.999 ($f(x_2)$=0.0007728). Если же под точностью вычисления корня понимать Δx – близость между двумя последовательными приближениями к корню, то ответом является x_3=5 ($f(x_3)$=0.0000005954, $\Delta x= x_3- x_2$=0.0007716<0.001).

Результаты вычислений и погрешности на каждой итерации можно свести в следующую таблицу:

№ итерации k	0	1	2	3
Приближение x_k	4,8	4,971	4,999	5
Ошибка $\lvert f(x_k)\rvert$	0,24	0,029	0,0007728	0,0000005954
Ошибка $\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$	-	0,171	0,028	0,0007716

Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Идея метода: Дано уравнение f(x)=0, требуется найти корень, находящийся на интервале изоляции [a;b].

– Заменим исходное уравнение равносильным уравнением $x = \varphi(x)$ (итерационная формула)
– Выберем $x_0 \in [a;b]$
– Подставляем его в правую часть, получаем:

$$x_1 = \varphi(x_0)$$
$$x_2 = \varphi(x_1)$$
или последовательность чисел $x_n = \varphi(x_{n-1})$

Возможно два случая:

– последовательность $x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n$ сходится, тогда предел последовательности является решением данного уравнения
– последовательность $x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n$ расходится, тогда предела не имеется.

Теорема сходимости: Пусть на [a;b] имеется единственный корень уравнения и во всех точках этого отрезка выполняется неравенство $|\varphi'(x)| < 1$, то итерационный процесс сходится. Чем меньше $|\varphi'(x)|$, тем лучше сходится итерационный процесс.

Заменим исходное уравнение f(x)=0, где $f(x)=x^2-11x+30$ итерационной формулой x=φ(x), где $\varphi(x) = \frac{x^2+30}{11}$, $\varphi'(x) = \frac{2}{11}x$

Проверка на сходимость:
$$|\varphi'(4.8)| = 0.8727 < 1$$
$$|\varphi'(5.1)| = 0.927 < 1$$

В данном случае производная функции φ(x) близка к единице, поэтому сходимость будет очень медленной. Попробуем найти другую итерационную формулу, воспользовавшись следующим стандартным приемом. Преобразуем исходное уравнение к виду x= x-λ·f(x), где λ – максимум производной функции f(x) на интервале [4.8;5.1].

f '(x)=2·x– 11
f '(4.8)=-1.4
f '(5.1)=-0.8

Таким образом, исходное уравнение f(x)=0 сводится к равносильному уравнению x=ϕ(x), где $\varphi'(x) = \frac{2}{11}x$

$f(x) = x^2 - 11 \cdot x + 30$
$\phi(x) = x + 0{,}8 \cdot f(x) = 0{,}8 \cdot x^2 - 7{,}8 \cdot x + 24$
$\phi'(x) = 1{,}6 \cdot x - 7{,}8$

Проверка на сходимость:
$$|\varphi'(4.8)| = |1.6 \cdot 4.8 - 7.8| = |7.68 - 7.8| = |-0.12| = 0.12 < 1$$
$$|\varphi'(5.1)| = |1.6 \cdot 5.1 - 7.8| = |8.16 - 7.8| = |0.36| = 0.36 < 1$$

Производная от найденной функции ϕ(x) на концах интервала поиска корня меньше единицы, следовательно, для полученного уравнения $\phi'(x) = 1{,}6 \cdot x - 7{,}8$ метод простой итерации должен сходится, причем, поскольку во втором случае *ϕ'(x)* не так близка к единице, как в

случае уравнения $\varphi'(x) = \frac{2}{11}x$, то сходимость в этом случае должна быть более быстрой.

Нулевая итерация:

В качестве нулевого приближения возьмем левую границу интервала изоляции корня [4,8;5,1]. x_0=4,8

$f(x_0) = x_0^2 - 11 \cdot x_0 + 30 = 4{,}8^2 - 11 \cdot 4{,}8 + 30 = 0{,}24 > \varepsilon = 0{,}03$

Первая итерация:

$x_1 = \phi(x_0) = x_0 + 0{,}8 \cdot f(x_0) = 4{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}024 = 4{,}992$

$f(x_1) = x_1^2 - 11 \cdot x_1 + 30 = 4{,}992^2 - 11 \cdot 4{,}992 + 30 = 0{,}008064 < \varepsilon = 0{,}03$

$x_1 - x_0 = 4{,}992 - 4{,}8 = 0{,}192 > \varepsilon = 0{,}03$

Требуемая точность $\varepsilon = 0{,}03$ в смысле близости к нулю функции $f(x_2)$достигнута.

Требуемая точность $\varepsilon = 0{,}03$ в смысле близости к нулю $\Delta x = x_2 - x_1$ еще не достигнута.

Вторая итерация:

$x_2 = \phi(x_1) = x_1 + 0{,}8 \cdot f(x_1) = 4{,}992 + 0{,}8 \cdot 0{,}008064 = 4{,}998$

$f(x_2) = x_2^2 - 11 \cdot x_2 + 30 = 4{,}998^2 - 11 \cdot 4{,}998 + 30 = 0{,}001551 < \varepsilon = 0{,}03$

$x_2 - x_1 = 0{,}006451 < \varepsilon = 0{,}001$

Требуемая точность $\varepsilon = 0{,}001$ в смысле близости к нулю функции $f(x_2)$достигнута. Требуемая точность $\varepsilon = 0{,}001$ в смысле близости к нулю $\Delta x = x_2 - x_1$ достигнута. Прекращаем итерации.

Если под погрешностью вычисления корня понимать Δy – близость по модулю к нулю функции f(x), то для достижения требуемой точности ε=0.03 требуется 1 итерация. Ответом является x_1=4.992 ($f(x_1)$=0.008064). Если же под точностью вычисления корня понимать Δx – близость между двумя последовательными приближениями к корню, то ответом является x_2=4,998 ($f(x_2)$=0.001551, $\Delta x = x_2 - x_1$=0.006451 < 0.03).

Результаты вычислений и погрешности на каждой итерации можно свести в следующую таблицу:

№ итерации k	0	1	2
Приближение x_k	4,8	4,992	4,998
Ошибка $\lvert f(x_k)\rvert$	0,24	0,008064	0,001551
$\phi(x_k)=x+0{,}8*x_k$	4,992	4,998	5
Ошибка $\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	-	0,192	0,006451
Ошибка $\lvert \phi(x_k) - x_{k-1}\rvert$	-	0,006451	0,001241

На первой же итерации ошибка в выполнении равенства $f(x_n)$=0 стала равной 0.008, что меньше допустимой погрешности ε=0.03, поэтому в качестве приближенного значения корня можно принять $x = x_1$=4.992.

Если же под точностью вычисления корня уравнения понимать близость к нулю разности двух последовательных приближений $\Delta x = \lvert x_k - x_{k-1}\rvert$, то требуемая точность ε=0.03 достигается на 2-й итерации, где Δx=0,006 < 0,03, и тогда в качестве корня уравнения следует взять $x = x_2$=4,998

Численные методы решения системы линейных уравнений

Постановка задачи: ***Дана система линейных уравнений:***

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -2 \\ -1x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 4 \end{cases}$$

Требуется решить систему уравнений, используя:

– Метод Гаусса;
– Метод простой итерации (3 итерации);
– Метод Зейделя (3 итерации).

Метод Гаусса

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 4 \end{cases} \text{или} \begin{bmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Идея метода состоит в равносильных преобразованиях системы к виду, когда матрица A[3;3] примет вид треугольной матрицы – это прямой ход метода Гаусса. После него делается так называемый обратный ход: из последнего уравнения выражаем x_3 и подставляем его в предпоследнее уравнение. Получим x_2. Подставим x_2 и x_3 в первое уравнение и получим x_1. Если выполнять вычисления в обыкновенных дробях, то получим точное решение, так как метод Гаусса является точным. При компьютерном решении возникает ошибка округления.

Итак, в результате *прямого хода* метода Гаусса получаем систему следующего вида:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ 0 & 1 & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Обратный ход метода Гаусса:

$x_3=b_3$

$x_2=b_2 - a_{2,3} \cdot x_3$

$x_1=b_1 - a_{1,2} \cdot x_2 - a_{1,3} \cdot x_3$

А теперь для нашего случая:

<u>Шаг1</u> Разделим первое уравнение на -7, чтобы получить $a_{11}=1$:

$$x_1 - \frac{1}{7}x_2 - \frac{3}{7}x_3 = \frac{3}{7} \qquad (1)$$

Для зануления a_{21} умножим уравнение (1) на $a_{21}=2$ и вычтем из второго уравнения:

$$2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -2$$

$$-$$

$$2x_1 - \frac{2}{7}x_2 - \frac{6}{7}x_3 = \frac{6}{7} \qquad (2)$$

$$-\frac{47}{7}x_2 + \frac{27}{7}x_3 = -\frac{20}{7}$$

Для зануления a_{31} умножим (1) на $a_{31}= -1$ и вычтем из третьего уравнения:

$$-x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 4$$

—

$$-x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 = -\frac{3}{7} \qquad (3)$$

$$-\frac{15}{7}x_2 + \frac{46}{7}x_3 = \frac{31}{7}$$

Таким образом, в первом столбце получили диагональный элемент $a_{11}=1$, а под ним все коэффициенты нулевыми ($a_{21}=a_{31}= 0$)

<u>Шаг 2</u> Рассмотрим систему без первого уравнения:

$$\begin{cases} -\frac{47}{7}x_2 + \frac{27}{7}x_3 = -\frac{20}{7} \\ -\frac{15}{7}x_2 + \frac{46}{7}x_3 = \frac{31}{7} \end{cases}$$

Поступая, аналогично шагу 1 сделаем $a_{22}=1$ и $a_{32}=0$, т.е. диагональный элемент матрицы – единичным, а под ним нулевым. Разделим первое уравнение на $-\frac{47}{7}$, чтобы получить $a_{22}=1$:

$$x_2 - \frac{27}{47}x_3 = \frac{20}{47} \qquad (4)$$

Для зануления a_{32} умножим уравнение (4) на $a_{32} = -\frac{15}{7}$, получим

$-\frac{15}{7}x_2 + \frac{15 \cdot 27}{7 \cdot 47}x_3 = -\frac{15 \cdot 20}{7 \cdot 47}$ и вычтем из третьего уравнения:

$$-\frac{15}{7}x_2 + \frac{46}{7}x_3 = \frac{31}{7}$$

—

$$-\frac{15}{7}x_2 + \frac{15 \cdot 27}{7 \cdot 47}x_3 = -\frac{15 \cdot 20}{7 \cdot 47}$$

$$\frac{251}{47}x_3 = \frac{251}{47}$$

<u>Шаг 3</u> Разделим последнее уравнение на $\frac{251}{47}$, получим: $x_3=1$.

Таким образом, с помощью равносильных преобразований система приведена к треугольному виду, когда коэффициенты матрицы A[3;3] на диагонали равны единице, а под диагональю равны нулю.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{7}x_2 - \frac{3}{7}x_3 = \frac{3}{7} \\ -\frac{47}{7}x_2 + \frac{27}{7}x_3 = -\frac{20}{7} \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Теперь делаем обратный ход метода Гаусса. Из третьего уравнения берем $x_3=1$ и подставляем во второе уравнение. Теперь из второго уравнения легко выражается

x_2=1. Подставляем найденные значения x_2 и x_3 в первое уравнение и находим таким образом x_1=1. Итак, методом Гаусса найдены корни линейной алгебраической системы 3-ого порядка

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 1$$

При вычислениях в обыкновенных дробях метод Гаусса дает точное решение. Но эти вычисления неудобно выполнять. Приведем реализацию метода Гаусса в десятичных дробях.

Прямой ход метода Гаусса:

$$a = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & -7 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 7 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}143 & -0{,}429 & 0{,}429 \\ 2 & -7 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 7 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}143 & -0{,}429 & 0{,}429 \\ 0 & -6{,}714 & 3{,}857 & -2{,}857 \\ 0 & -2{,}143 & 6{,}571 & 4{,}429 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}143 & -0{,}429 & 0{,}429 \\ 0 & 1 & -0{,}574 & 0.426 \\ 0 & -2{,}143 & 6{,}571 & 4{,}429 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}143 & -0{,}429 & 0{,}429 \\ 0 & 1 & -0{,}5.74 & 0{,}426 \\ 0 & 0 & 5.34 & 5{,}34 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}143 & -0{,}429 & 0{,}429 \\ 0 & 1 & -0{,}574 & 0.426 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Получена следующая линейная алгебраическая система:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}143x_2 - 0{,}429x_3 = 0{,}429 \\ \qquad\qquad x_2 - 0{,}574x_3 = 0{,}426 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса:

$x_3 = 1$

$x_2 = 0{,}426 + 0{,}574 \cdot x_1 = 0{,}426 + 0{,}574 \cdot 1 = 1$

$x_1 = 0{,}429 + 0{,}143 \cdot x_2 + 0{,}429 \cdot x_3 = 0{,}429 + 0{,}143 \cdot 1 + 0{,}429 \cdot 1 = 1{,}001$

При вычислениях в десятичных дробях с точностью ε =0,001 получилось решение

$$x = \begin{pmatrix} 1{,}001 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ошибка в первой компоненте вектора x объясняется ошибкой округления при вычислениях с точностью до 0,001.

Метод простой итерации

Идея метода простой итерации состоит в разрешении первого уравнения относительно x_1, т.е. выражаем x_1 через остальные неизвестные x_2, x_3. Из второго уравнения выражаем x_2 через x_1, x_3. Из третьего уравнения выражаем x_3 через x_1, x_2.

Тогда получим следующие *итерационные формулы метода простых итераций, иначе называемого методом Якоби:*

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)}\right)}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)}\right)}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{b_3 - \left(a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)}\right)}{a_{33}} \end{cases} \qquad (5)$$

где k – номер итерации ($k=0,1,2\ldots k_{max}$; k_{max} – максимально допустимое число итераций). Подставляя при k=0 в правую часть от знака равенства в итерационных формулах (1) начальное приближение к искомым величинам $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$, равное нулю, найдём в левой части первое приближение $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, к корням x_1^*, x_2^*, x_3^*. Далее, подставляя в правую часть первое приближение, найдём в левой части второе приближение, и так до тех пор, пока не будет выполнено равенство во всех уравнениях с заданной точностью или не будет обнаружено, что число итераций исчерпано ($k>k_{max}$).

Условие сходимости метода простой итерации при $k\to\infty$ проверяется подстановкой коэффициентов матрицы A[3;3] в следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \\ &|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| \\ &|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \end{aligned} \qquad (6)$$

Если все неравенства выполняются, то вычислительный процесс сходится, т.е. существуют пределы $x_j^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_j^k$ (j=1,2,3), которые и являются корнями исходной системы.

Итерационный процесс выполняется до тех пор, пока все $x_i^{(k)}$ не станут достаточно близки к $x_i^{(k-1)}$. Критерий близости можно, например, задать в следующем виде:

$$M^{(k)} = max\ |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon .$$

О близости найденного на k-ой итерации решения и точного можно также судить по так называемой невязке – разности правой и левой частей уравнений системы при подстановке в нее приближенного решения ($x_1^{(k)}$,$x_2^{(k)}$,$x_3^{(k)}$).

Формулы для вычисления ошибок (невязок) в выполнении равенств:

$$\begin{aligned} O_1^k &= |a_{11}x_1^k + a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k - b_1| \\ O_2^k &= |a_{21}x_1^k + a_{22}x_2^k + a_{23}x_3^k - b_2| \\ O_3^k &= |a_{31}x_1^k + a_{32}x_2^k + a_{33}x_3^k - b_3| \end{aligned} \qquad (7)$$

<u>*Проверка условия сходимости.*</u>

$$\begin{aligned} &|-7| > |1| + |3| \\ &|-7| > |2| + |3| \\ &|7| > |-1| + |-2| \end{aligned} \qquad (8)$$

Условия сходимости выполняются. Выразим из первого уравнения x_1, из второго – x_2, из третьего – x_3.

В нашем случае имеем:

(9)

Перепишем систему в виде (5)

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{7}(-3 - x_2 - 3x_3) \\ x_2 = -\dfrac{1}{7}(-2 - 2x_1 - 3x_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{7}(4 + x_1 + 2x_2) \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{7}(-3 - x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{7}(-2 - 2x_1^{(k)} - 3x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{7}(4 + x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}) \end{cases} \qquad (10)$$

Введем некоторое первое приближение к решению этой системы, обозначив его через $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$. Подставим это приближение в (10) и найдем новое приближение к решению системы $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$. Возьмем в качестве нулевого приближения нули.

Нулевое приближение к корням.

$x_1^{(0)}=0$ $\qquad$ $x_2^{(0)}=0$ $\qquad$ $x_3^{(0)}=0$

Ошибки (невязки) для нулевого приближения

$$O_1^{(0)} = | a_{1,1}x_1^{(0)} + a_{1,2}x_2^{(0)} + a_{1,3}x_3^{(0)} - b_1 |$$

$$O_2^{(0)} = | a_{2,1}x_1^{(0)} + a_{2,2}x_2^{(0)} + a_{2,3}x_3^{(0)} - b_2 |$$

$$O_3^{(0)} = | a_{3,1}x_1^{(0)} + a_{3,2}x_2^{(0)} + a_{3,3}x_3^{(0)} - b_3 |$$

$O_1^{(0)}=3$ $\qquad$ $O_2^{(0)}=2$ $\qquad$ $O_3^{(0)}=-4$

Первое приближение к корням.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -\frac{1}{7}(-3 - x_2^{(0)} - 3x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{7}(-2 - 2x_1^{(0)} - 3x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{7}(4 + x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)}) \end{cases}$$

$x_1^{(1)}=0.429$ $\qquad$ $x_2^{(1)}=0.286$ $\qquad$ $x_3^{(1)}=0.571$

Ошибки (невязки) для первого приближения

$$O_1^{(1)} = | a_{1,1}x_1^{(1)} + a_{1,2}x_2^{(1)} + a_{1,3}x_3^{(1)} - b_1 |$$

$$O_2^{(1)} = | a_{2,1}x_1^{(1)} + a_{2,2}x_2^{(1)} + a_{2,3}x_3^{(1)} - b_2 |$$

$$O_3^{(1)} = | a_{3,1}x_1^{(1)} + a_{3,2}x_2^{(1)} + a_{3,3}x_3^{(1)} - b_3 |$$

$O_1^{(1)}=2$ $\qquad$ $O_2^{(1)}=2.571$ $\qquad$ $O_3^{(1)}=-1$

Второе приближение к корням.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -\frac{1}{7}(-3 - x_2^{(1)} - 3x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{7}(-2 - 2x_1^{(1)} - 3x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{7}(4 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) \end{cases}$$

$x_1^{(2)}=0.714$ $\qquad$ $x_2^{(2)}=0.653$ $\qquad$ $x_3^{(2)}=0.714$

Ошибки (невязки) для второго приближения

$$O_1^{(2)} = | a_{1,1}x_1^{(2)} + a_{1,2}x_2^{(2)} + a_{1,3}x_3^{(2)} - b_1 |$$

$$O_2^{(2)} = | a_{2,1}x_1^{(2)} + a_{2,2}x_2^{(2)} + a_{2,3}x_3^{(2)} - b_2 |$$

$O_1^{(2)}=0,796$ $\qquad$ $O_2^{(2)}=1$ $\qquad$ $O_3^{(2)}=-1.02$

$$O_3^{(2)} = | a_{3,1}x_1^{(2)} + a_{3,2}x_2^{(2)} + a_{3,3}x_3^{(2)} - b_3 |$$

Третье приближение к корням.

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -\frac{1}{7}(-3 - x_2^{(2)} - 3x_3^{(2)}) \\ x_2^{(3)} = -\frac{1}{7}(-2 - 2x_1^{(2)} - 3x_3^{(2)}) \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{7}(4 + x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}) \end{cases}$$

$x_1^{(3)}$=0.828 $x_2^{(3)}$=0.796 $x_3^{(3)}$=0.86

Ошибки (невязки) для третьего приближения

$$O_1^{(3)} = | a_{1,1}x_1^{(3)} + a_{1,2}x_2^{(3)} + a_{1,3}x_3^{(3)} - b_1 |$$

$$O_2^{(3)} = | a_{2,1}x_1^{(3)} + a_{2,2}x_2^{(3)} + a_{2,3}x_3^{(3)} - b_2 |$$

$$O_3^{(3)} = | a_{3,1}x_1^{(3)} + a_{3,2}x_2^{(3)} + a_{3,3}x_3^{(3)} - b_3 |$$

$O_1^{(3)}$=0.58 $O_2^{(3)}$= 0.665 $O_3^{(3)}$=-0.399

Сведем все результаты вычислений в таблицы. Последовательные приближения к решению линейной алгебраической системы ($x_i^{(k)}$,$x_i^{(k)}$,$x_i^{(k)}$):

№ итерации k	0	1	2	3
x_1	0	0,429	0,714	0,828
x_2	0	0,286	0,653	0,796
x_3	0	0,571	0,714	0,86

Невязки O_i :

№ итерации k	0	1	2	3
O_1	3	2	0,796	0,58
O_2	2	2,571	1	0,665
O_3	-4	-1	-1,02	-0,399

Ошибки $\varepsilon_I^{(k)}=x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}$:

№ итерации k	1	2	3
ε_1	0,429	0,286	0,114
ε_2	0,286	0,367	0,143
ε_3	0,572	0,143	0,146

Для достижения выполнимости равенств системы с большей точностью необходимо увеличить количество итераций.

Метод Зейделя

Идея метода: Итерации по методу Зейделя отличаются от простых итераций тем, что при нахождении i-ой компоненты k-го приближения сразу используется уже найденные компоненты k-го приближения с меньшими номерами. *Условие сходимости* метода Зейделя совпадает с аналогичным условием метода простой итерации: при $k\to\infty$ проверяется подстановкой коэффициентов матрицы A[3;3] неравенства (6).

Заметим также, что метод простой итерации (метод Якоби) и метод Зейделя имеют пересекающиеся, но несовпадающие области сходимости. В случае, когда выполняется достаточное условие сходимости, сходятся оба метода, однако если это условие не выполняется, один из методов может сходиться, а другой – расходится, поскольку это условие не является необходимым. Как правило, метод Зейделя даёт более быструю сходимость, чем метод простой итерации (метод Якоби).

Итерационные формулы метода Зейделя:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)}\right)}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)}\right)}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{b_3 - \left(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)}\right)}{a_{33}} \end{cases} \qquad (11)$$

<u>Нулевое приближение к корням.</u>

$x_1^{(0)}=0$ $x_2^{(0)}=0$ $x_3^{(0)}=0$

Ошибки для нулевого приближения

$$O_1^{(0)} = | a_{1,1}x_1^{(0)} + a_{1,2}x_2^{(0)} + a_{1,3}x_3^{(0)} - b_1 |$$

$$O_2^{(0)} = | a_{2,1}x_1^{(0)} + a_{2,2}x_2^{(0)} + a_{2,3}x_3^{(0)} - b_2 |$$

$$O_3^{(0)} = | a_{3,1}x_1^{(0)} + a_{3,2}x_2^{(0)} + a_{3,3}x_3^{(0)} - b_3 |$$

$O_1^{(0)}=3$ $O_2^{(0)}=2$ $O_3^{(0)}=-4$

<u>Первое приближение к корням.</u>

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -\dfrac{1}{7}(-3 - x_2^{(0)} - 3x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = -\dfrac{1}{7}(-2 - 2x_1^{(1)} - 3x_3^{(0)}) \\ x_3^{(0)} = \dfrac{1}{7}(4 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) \end{cases}$$

$x_1^{(1)}=0.429$ $x_2^{(1)}=0.408$ $x_3^{(1)}=0.749$

Ошибки (невязки) для первого приближения

$$O_1^{(1)} = | a_{1,1}x_1^{(1)} + a_{1,2}x_2^{(1)} + a_{1,3}x_3^{(1)} - b_1 |$$

$$O_2^{(1)} = | a_{2,1}x_1^{(1)} + a_{2,2}x_2^{(1)} + a_{2,3}x_3^{(1)} - b_2 |$$

$$O_3^{(1)} = | a_{3,1}x_1^{(1)} + a_{3,2}x_2^{(1)} + a_{3,3}x_3^{(1)} - b_3 |$$

$O_1^{(1)}=2.656$ $O_2^{(1)}=2.248$ $O_3^{(1)}=0$

<u>Второе приближение к корням.</u>

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -\dfrac{1}{7}(-3 - x_2^{(1)} - 3x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = -\dfrac{1}{7}(-2 - 2x_1^{(2)} - 3x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1}{7}(4 + x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}) \end{cases}$$

$x_1^{(2)}=0.808$ $x_2^{(2)}=0.838$ $x_3^{(2)}=0.926$

Ошибки (невязки) для второго приближения

$$O_1^{(2)} = | a_{1,1}x_1^{(2)} + a_{1,2}x_2^{(2)} + a_{1,3}x_3^{(2)} - b_1 |$$

$$O_2^{(2)} = | a_{2,1}x_1^{(2)} + a_{2,2}x_2^{(2)} + a_{2,3}x_3^{(2)} - b_2 |$$

$$O_3^{(2)} = | a_{3,1}x_1^{(2)} + a_{3,2}x_2^{(2)} + a_{3,3}x_3^{(2)} - b_3 |$$

$O_1^{(2)}=0,96$ $O_2^{(2)}=0.531$ $O_3^{(2)}=0$

Третье приближение к корням.

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -\frac{1}{7}(-3 - x_2^{(2)} - 3x_3^{(2)}) \\ x_2^{(3)} = -\frac{1}{7}(-2 - 2x_1^{(3)} - 3x_3^{(2)}) \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{7}(4 + x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)}) \end{cases}$$

$x_1^{(3)}=0.945$ $x_2^{(3)}=0.953$ $x_3^{(3)}=0.979$

Ошибки (невязки) для третьего приближения

$$O_1^{(3)} = | a_{1,1}x_1^{(3)} + a_{1,2}x_2^{(3)} + a_{1,3}x_3^{(3)} - b_1 |$$

$$O_2^{(3)} = | a_{2,1}x_1^{(3)} + a_{2,2}x_2^{(3)} + a_{2,3}x_3^{(3)} - b_2 |$$

$$O_3^{(3)} = | a_{3,1}x_1^{(3)} + a_{3,2}x_2^{(3)} + a_{3,3}x_3^{(3)} - b_3 |$$

$O_1^{(3)}=0.272$ $O_2^{(3)}= 0.157$ $O_3^{(3)}=0$

Сведем все результаты вычислений методом Зейделя в следующие таблицы. Последовательные приближения к решению линейной алгебраической системы $(x_i^{(k)},x_i^{(k)},x_i^{(k)})$:

№ итерации k	0	1	2	3
x_1	0	0,429	0,808	0,945
x_2	0	0,408	0,838	0,953
x_3	0	0,749	0,926	0,979

Невязки O_i :

№ итерации k	0	1	2	3
O_1	3	2,656	0,96	0,272
O_2	2	2,248	0,531	0,157
O_3	-4	0	0	0

Ошибки $\varepsilon_I^{(k)}=x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}$:

№ итерации k	1	2	3
ε_1	0,429	0,379	0,137
ε_2	0,408	0,43	0,115
ε_3	0,749	0,177	0,052

Для достижения выполнимости уравнений системы с большей точностью необходимо увеличить количество итераций.

Численные методы решения задачи аппроксимации и интерполяции

Постановка задачи. ***Дана табличная функция:***

i	1	2	3	4	5
x(i)	-1	0	1	3	4
y(i)	-3	-1	-2	1	0

Требуется:

– Решить задачу кусочно-линейной интерполяции методом неопределенных коэффициентов для каждой последовательной пары точек 1+2, 2+3, 3+4, 4+5, результат оформить графически;

– Решить задачу кусочно-параболической интерполяции методом неопределенных коэффициентов для каждой последовательной тройки точек 1+2+3, 3+4+5, результат оформить графически;
– Решить задачу аппроксимации полиномом 1-й и 2-й степени методом наименьших квадратов для всех точек 1+2+3+4+5, результат оформить графически.

Кусочно-линейная интерполяция

а) Берем из данных координаты первой и второй точек. Требуется определить коэффициенты a_0 и a_1 интерполяционного полинома первого порядка

$$P1(x)=a_0+a_1x \qquad (12)$$

из условий интерполяции (прохождение графика искомой функции y=P1(x) через выбранные точки):

$P1(x_1)=y_1$

$$P1(x_2)=y_2 \qquad (13)$$

Метод неопределённых коэффициентов реализуется подстановкой выражения (12) в систему (13). Тогда получим систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными величинами a_0 и a_1

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 = y_2 \end{cases} \qquad (14)$$

Первый интервал (от 1-ой до 2-ой точки):

а) Подставляя числовые значения $x_1 = -1$, $y_1 = -3$, $x_2 = 0$, $y_2 = -1$, имеем

$$\begin{cases} a_0 - a_1 = -3 \\ a_0 \qquad = -1 \end{cases} \qquad (15)$$

Систему (15) можно записать в матричной форме

$$C\cdot a=b, \text{ где} \qquad (16)$$

C – матрица коэффициентов, a – вектор-столбец неизвестных a_0, a_1 , b – вектор-столбец. Решив систему (16), найдем коэффициенты полинома y = P1(x).

Из (16) следует:

$$a = C^{-1}\cdot b \qquad (17)$$

В нашем случае имеем:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Решив (15) методом Гаусса-Жордана, получим матрицу решений $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Замечание:

Для решения системы 2-ого порядка и нахождения аппроксимирующего полинома 1-ой степени найдено решение методом Гаусса – Жордана, когда исходная система линейных

алгебраических уравнений с помощью эквивалентных преобразований приводится не к треугольному виду, как в методе Гаусса, а к диагональному, где по диагонали оказываются коэффициенты, равные единице. В этом случае в столбце свободных членов сразу получается решение системы. В этой модификации метода Гаусса обратный ход не требуется, зато требуются дополнительные шаги, поскольку мы приводим исходную матрицу не к треугольному, а к диагональному виду

Вид интерполирующего полинома на первом интервале:
$P1(x) = -1 + 2 \cdot x$ или $P1(x)=2 \cdot x-1$

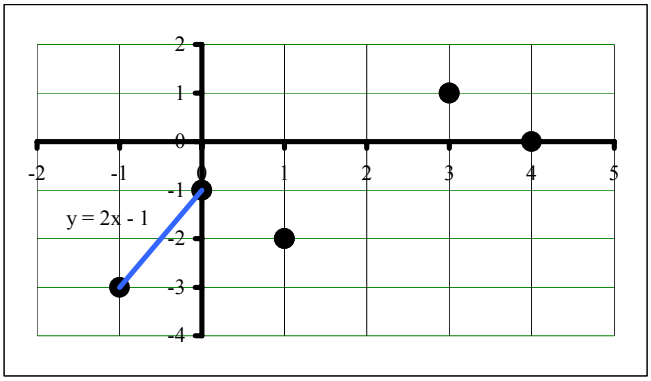

Рисунок 2. График функции кусочно-линейной аппроксимации на первом интервале интерполяции

б) *Второй интервал (от 2-ой до 3-ей точки):*
Теперь берем из данных координаты второй и третьей точек и по аналогии находим коэффициенты a_0 и a_1 интерполяционного полинома $P1(x)=a_0+a_1x$ для второго участка.
$P1(x_2)=y_2$
$P1(x_3)=y_3$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_2 = y_2 \\ a_0 + a_1 x_3 = y_3 \end{cases}$$

Подставляя числовые значения $x_2 = 0$, $y_2 = -1$, $x_3 = 1$, $y_3 = -2$, имеем

$$\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_0 + a_1 = -2 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Решив систему методом Гаусса-Жордана, получим матрицу решений $a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Вид интерполирующего полинома на втором интервале $P1(x) = -x - 1$

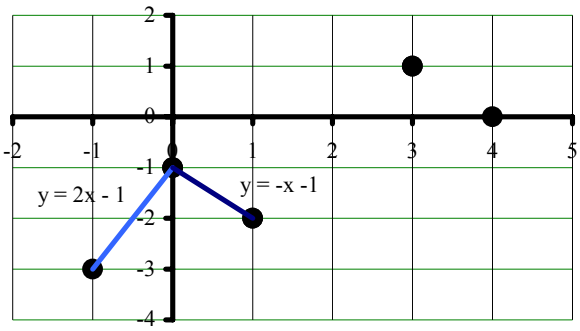

Рисунок 3. График функции кусочно-линейной аппроксимации на первых двух интервалах интерполяции

в) *Третий интервал (от 3-ей до 4-ой точки):*

$P1(x_3)=y_3$

$P1(x_4)=y_4$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_3 = y_3 \\ a_0 + a_1 x_4 = y_4 \end{cases}$$

Подставляя числовые значения $x_3 = 1$, $y_3 = -2$, $x_4 = 3$, $y_4 = 1$, имеем

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = -2 \\ a_0 + 3a_1 = 1 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \end{array}\right)$$

Решив систему методом Гаусса-Жордана, получим матрицу решений $a = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Вид интерполирующего полинома на третьем интервале: $P1(x) = 1{,}5x - 3{,}5$

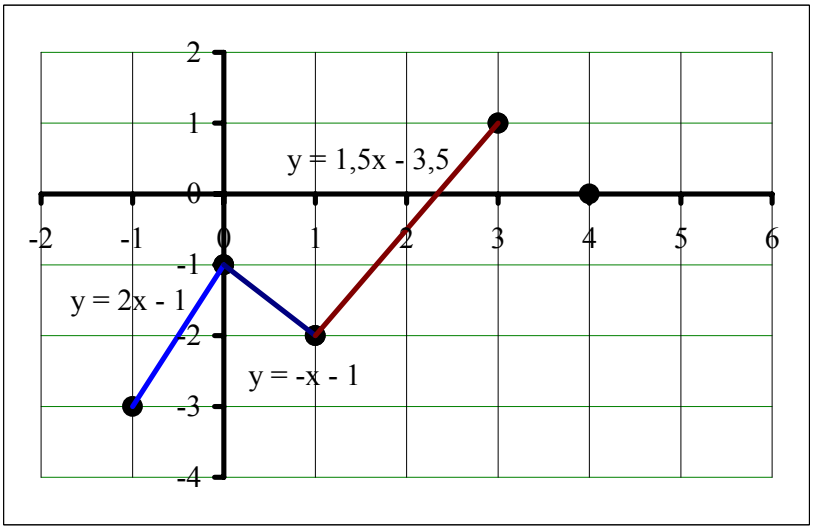

Рисунок 4. График функции кусочно-линейной аппроксимации на первых трёх интервалах интерполяции

г) *Четвёртый интервал (от 3-ей до 4-ой точки):*

$P1(x_4)=y_4$

$P1(x_5)=y_5$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_4 = y_4 \\ a_0 + a_1 x_5 = y_5 \end{cases}$$

Подставляя числовые значения $x_4 = 3$, $y_4 = 1$, $x_5 = 4$, $y_5 = 0$, имеем

$$\begin{cases} a_0 + 3a_1 = 1 \\ a_0 + 4a_1 = 0 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Решив систему методом Гаусса - Жордана, получим матрицу решений $a = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Вид интерполирующего полинома на четвертом интервале: $P1(x) = -x + 4$

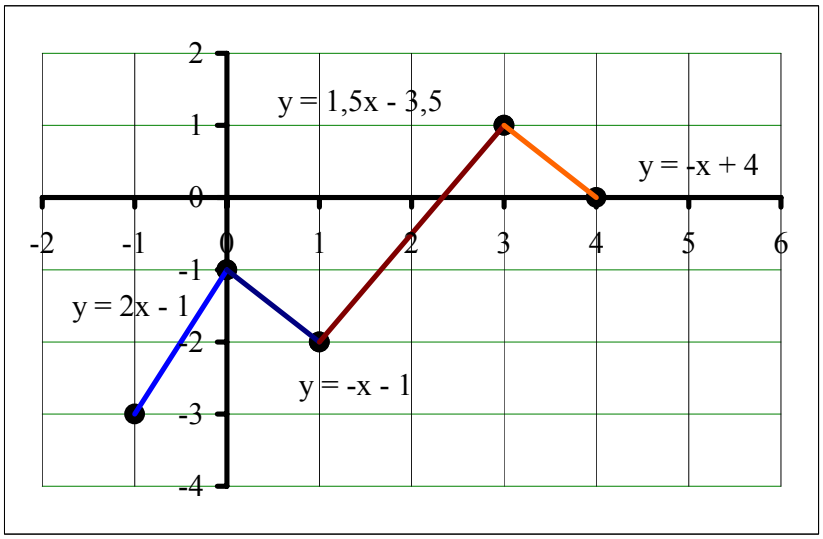

Рисунок 5. График функции кусочно-линейной аппроксимации на всем интервале интерполяции

Кусочно-параболическая интерполяция

а) Берем из таблицы координаты первой, второй и третей точек. Требуется определить коэффициенты a_0, a_1, a_2 интерполяционного полинома второго порядка

$$P2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \qquad (18)$$

из условий интерполяции (прохождение графика искомой функции $y=P2(x)$ через выбранные точки):

$$\begin{aligned} &P2(x_1)=y_1 \\ &P2(x_2)=y_2 \qquad (19) \\ &P2(x_3)=y_3 \end{aligned}$$

Метод неопределённых коэффициентов реализуется подстановкой выражения (18) в систему (19). Тогда получим систему трёх алгебраических уравнений с тремя неизвестными величинами a_0, a_1, a_2 :

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \\ a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 = y_3 \end{cases} \qquad (20)$$

а) *Первый интервал (от 1-ой до 3-ей точки):*

Подставляя числовые значения $x_1 = -1$, $y_1 = -3$, $x_2 = 0$, $y_2 = -1$, $x_3 = 1$, $y_3 = -2$, имеем:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = -3 \\ a_0 = -1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = -2 \end{cases} \qquad (21)$$

Систему (21) можно записать в матричной форме

$$C \cdot a = b, \qquad (22)$$

где C – матрица коэффициентов, a – вектор-столбец неизвестных a_0, a_1, a_2 , b – вектор-столбец.

Решив систему (21) или (22), найдем коэффициенты.

Из (22) следует:

$$a = C^{-1} \cdot B \qquad (23)$$

В нашем случае:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1,5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1,5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1,5 \end{array}\right) \sim$$

$$P2(x) = -1,5x^2 + 0.5x - 1$$

Решив систему методом Жордана – Гаусса, получим матрицу решений $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$

Вид интерполирующего полинома на первом интервале: $P2(x) = -1.5x^2 + 0.5x - 1$

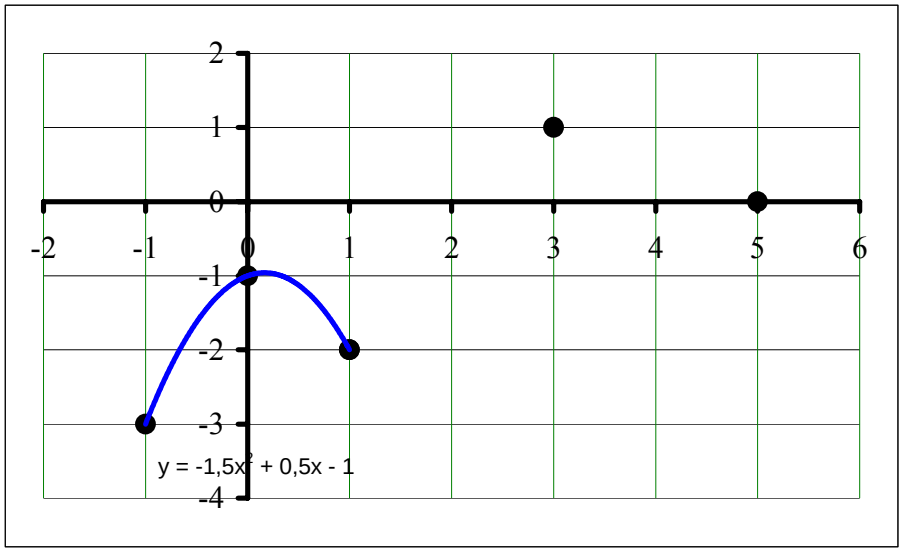

Рисунок 6. График функции кусочно-параболической интерполяции на первом интервале интерполяции

б) *Второй интервал (от 3-ей до 5-ой точки):*

$P2(x_3)=y_3$

$P2(x_4)=y_4$

$P2(x_5)=y_5$

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 = y_3 \\ a_0 + a_1x_4 + a_2x_4^2 = y_4 \\ a_0 + a_1x_5 + a_2x_5^2 = y_5 \end{cases}$$

Подставляя числовые значения $x_3 = 1$, $y_3 = -2$, $x_4 = 3$, $y_4 = 1$, $x_5 = 4$, $y_5 = 0$, имеем

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = -2 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 1 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 0 \end{cases}$$

В матричном виде эту систему линейных алгебраических уравнений можно записать следующим образом:

$C \cdot a = b$, где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ - вектор коэффициентов интерполирующего полинома

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 15 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1{,}5 \\ 0 & 3 & 15 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 3 & -2.5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.833 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3{,}5 \\ 0 & 1 & 4 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.833 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.833 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4{,}833 \\ 0 & 0 & 1 & -0.833 \end{array}\right)$$

Решив систему методом Жордана – Гаусса, получим решение: $a = \begin{pmatrix} -6 \\ 4{,}833 \\ -0.833 \end{pmatrix}$

Вид интерполирующего полинома на втором интервале $P2(x) = -0.833x^2 + 4.833x - 6$

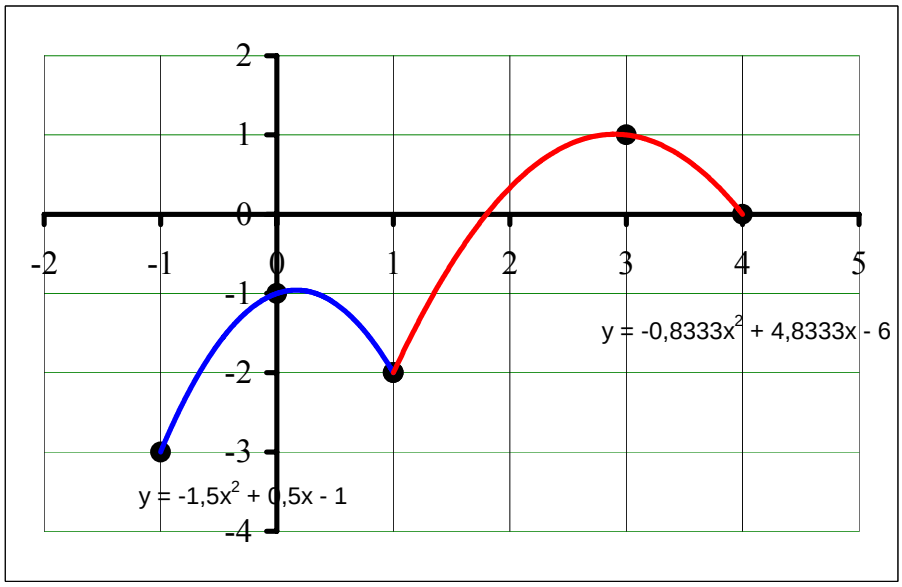

Рисунок 7. График функции кусочно-параболической интерполяции на всём интервале интерполяции

Аппроксимация полиномом 1-й и 2-й степени методом наименьших квадратов

Идея метода наименьших квадратов заключается в нахождении аппроксимирующей функции $P1(x) = a_0+a_1x$ (для полинома первой степени) или $P2(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$ (для полинома второй степени) из условия минимальности суммы квадратов отклонений этой функции в данных точках от соответствующих табличных значений.

а) *Аппроксимация полиномом первой степени.*

$$\begin{bmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5} x_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{5} y_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \end{bmatrix}$$ - система нормальных уравнений метода наименьших квадратов для полинома 1-й степени

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = -1 + 0 + 1 + 3 + 4 = 7$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = -3 - 1 - 2 + 1 + 0 = -5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = (-1)^2 + (0)^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 0 + 1 + 9 + 16 = 27$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = (-1)\cdot(-3) + 0\cdot(-1) + 1\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 4\cdot 0 = 3 + 0 - 2 + 3 + 0 = 4$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & -5 \\ 7 & 27 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1.4 & -1 \\ 7 & 27 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1.4 & -1 \\ 0 & 17{,}2 & 11 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1.4 & -1 \\ 0 & 17{,}2 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1.4 & -1 \\ 0 & 1 & 0{,}64 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1{,}895 \\ 0 & 1 & 0{,}64 \end{array}\right)$$

Вид аппроксимирующего полинома 1-ой степени:

$y = 0.64x - 1{,}896$

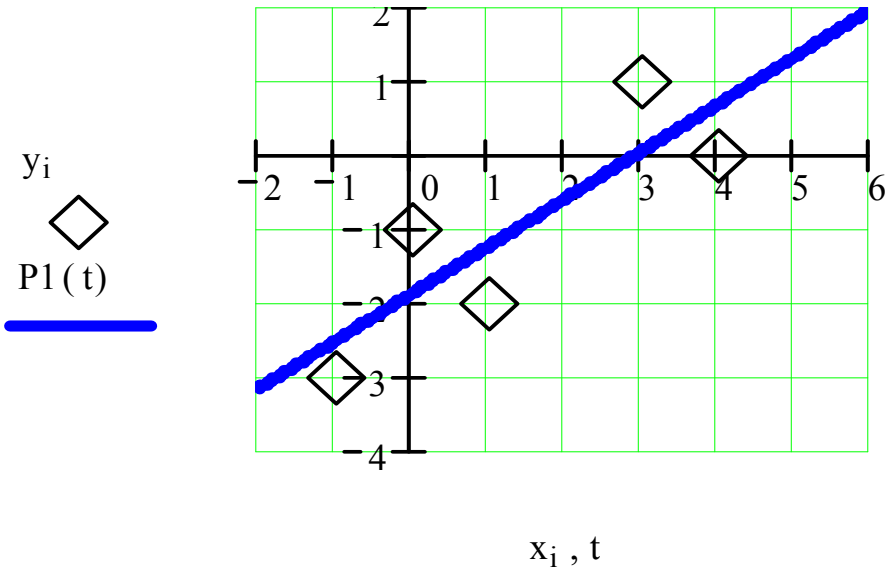

Рисунок 8. График функции линейной аппроксимации методом наименьших квадратов по пяти заданным точкам

б) *Аппроксимация полиномом второй степени.*

$$\begin{bmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum_{i=1}^{5} x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{5} y_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$ - система нормальных уравнений метода наименьших квадратов для полинома 2-й степени

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = -1+0+1+3+4 = 7$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = (-1)^2+0^2+1^2+3^2+4^2 = 1+0+1+9+16 = 27$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^3 = (-1)^3+0^3+1^3+3^3+4^3 = -1+0+1+27+64 = 91$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = (-1)^4+0^4+1^4+3^4+4^4 = 1+0+1+81+256 = 339$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = -3-1-2+1+0 = -5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = (-1)\cdot(-3)+0\cdot(-1)+1\cdot(-2)+3\cdot 1+4\cdot 0 = 3+0-2+3+0 = 4$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i = (-1)^2\cdot(-3)+0^2\cdot(-1)+1^2\cdot(-2)+3^2\cdot 1+4^2\cdot 0 = -3+0-2+9+0 = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 27 \\ 7 & 27 & 91 \\ 27 & 91 & 339 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 27 & -5 \\ 7 & 27 & 91 & 4 \\ 27 & 91 & 339 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.4 & 5.4 & -1 \\ 7 & 27 & 91 & 4 \\ 27 & 91 & 339 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.4 & 5.4 & -1 \\ 0 & 17.2 & 53.2 & 11 \\ 0 & 53.2 & 193.2 & 31 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.4 & 5.4 & -1 \\ 0 & 1 & 3.093 & 0.64 \\ 0 & 53.2 & 193.2 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.4 & 5.4 & -1 \\ 0 & 1 & 3.093 & 0.64 \\ 0 & 0 & 28.651 & -3.023 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.4 & 5.4 & -1 \\ 0 & 1 & 3.093 & 0.64 \\ 0 & 0 & 1 & -0.106 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1.07 & -1.895 \\ 0 & 1 & 3.093 & 0.64 \\ 0 & 0 & 1 & -0.106 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1.782 \\ 0 & 1 & 3.093 & 0.64 \\ 0 & 0 & 1 & -0.106 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1.782 \\ 0 & 1 & 0 & 0.966 \\ 0 & 0 & 1 & -0.106 \end{array}\right)$$

Вид аппроксимирующего полинома 2-ой степени:

$$P2(x) = -0.106x^2 + 0.966x - 1.782$$

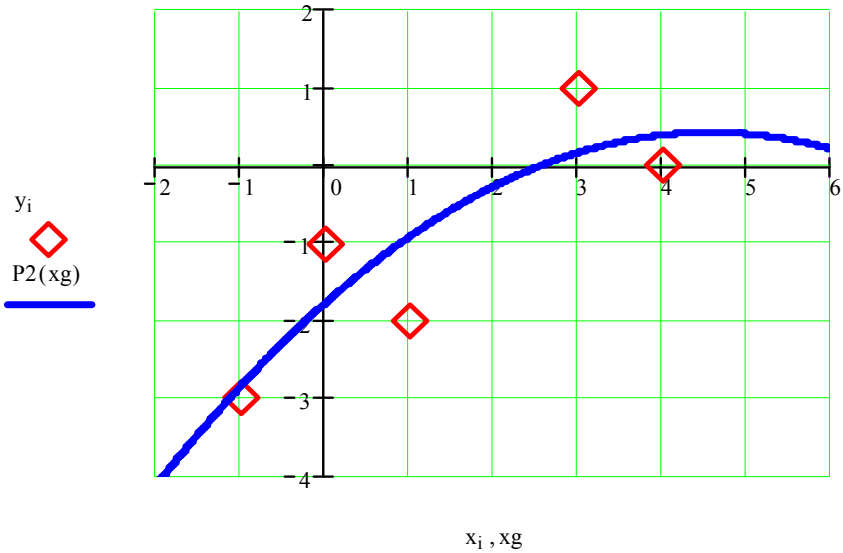

Рисунок 9. График функции параболической аппроксимации методом наименьших квадратов по пяти заданным точкам