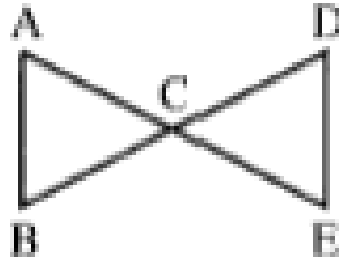


Листок 2. МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ. СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ.

Срок сдачи 27 февраля.

- (1) N блох распределены на двух собаках. Каждую секунду выбирается случайным образом одна блоха из N возможных. Эта блоха перепрыгивает на другую собаку. Пусть X_n — число блох на первой собаке. Доказать, что $\{X_n\}$ — марковская цепь и найти ее инвариантное распределение.
- (2) Шахматная фигура (конь, ладья, король, ферзь, слон) начинает случайное блуждание (делает ходы по шахматным правилам), начиная из угла шахматной доски, с одинаковой вероятностью выбирая на каждом шаге любое доступное для хода поле. Каково среднее число шагов, которое сделает фигура, до того как вернется на место старта?
- (3) Частица совершает случайные блуждания на вершинах трехмерного куба. В единицу времени с вероятностью $1/4$ она остается на месте, с вероятностью $1/4$ перемещается на соседнюю вершину. Пусть a, b — две противоположные вершины куба, частица начинает свой путь из a . Найти: 1) среднее время возвращения в a , 2) среднее время достижения b , 3) среднее число посещений b до возвращения в a .
- (4) (*Задача о разорении). Вы приходите в казино с $k\$$. За одну партию вы выигрываете $1\$$ с вероятностью p или проигрываете $1\$$ с вероятностью $q = 1 - p$, $p < 1/2$. Если у вас остается $0\$$, вы уходите. Если вы приобретаете $K\$$, где $K > k$ — некоторая фиксированная сумма, вы тоже уходите. Найти 1) вероятность $p(k)$ того, что вы уйдете ни с чем, 2) среднее время игры.
- (5) Частица блуждает по фигуре $ABCDE$.



В каждый момент времени переход на любую из соседних вершин равновероятен. Старт начинается в точке A . Найти среднее значение

- Времени возвращения в A
 - Количество посещений D до возвращения в A
 - Количество посещений C до возвращения в A
- (6) Марковская цепь принимает состояния $\{0, 1, 2, \dots\}$. Из состояния 0 цепь переходит в состояние 1 с вероятностью 1 . Из состояния r цепь переходит в состояние $\{0, 1, 2, \dots, r+1\}$ с вероятностью $\frac{1}{r+2}$. Найти инвариантное распределение.
 - (7) Рассмотрим одномерное случайное блуждание S_n , стартующее из нуля. Пусть T — первое время возвращения в ноль: $T = \min\{n > 0, S_n = 0\}$. Положим

$F(s) = \sum_{i=0}^n P(T = i)s^i$, $U(s) = \sum_{i=0}^n P(S_i = 0)s^i$. Докажите, что $U(s) = U(s)F(s) + 1$ и найдите $F(s)$. Выведит отсюда, что симметричное случайное блуждание возвращаемо, а несимметричное — нет.

- (8) Рассмотрим одномерное несимметричное случайное блуждание S_n . Найти распределение случайной величины, равной числу возвращений в точку старта.
- (9) Рассмотрим одномерное несимметричное случайное блуждание S_n . Докажите, что среднее число шагов, нужное для возвращения в точку старта, при условии что это возвращение состоялось, равно $\frac{4pq}{|p-q|(1-|p-q|)}$.
- (10) Рассмотрим одномерное симметричное случайное блуждание, стартующее из нуля. Найти распределение случайной величины T_b , равной первому времени достижения точки $b \neq 0$. Указание: используйте принцип отражения и/или распределение максимума S_n .
- (11) Рассмотрим случайное блуждание по двумерной решетке, стартующее из начала координат, в котором каждый сосед посещается с равной вероятностью $1/4$. Рассмотрим прямую $x + y = m$. Пусть T — первый момент времени достижения этой прямой в точке (X, Y) . Найти распределение T и $X - Y$.
- (12) (Закон арксинуса) Рассмотрим симметричное случайное блуждание S_n , стартующее из нуля. 1) Докажите, что вероятность того, что последнее посещение нуля на отрезке $[0, 2n]$ произошло в точке $2k$ равно

$$P(S_{2k} = 0)P(S_{2n-2k} = 0).$$

2) Пусть T_{2n} — последнее посещение нуля на $[0, 2n]$. Докажите, что $P(T_{2n} \leq 2xn) \sim 2/\pi \arcsin x, n \rightarrow \infty$.