

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Высшего образования

«Иркутский государственный университет путей сообщения»

Факультет «Транспортные системы»

Кафедра «Физика, механика и приборостроение»

Расчетно-графическая работа № 3

по дисциплине «Механика»

«Расчет ступенчатого стержня на прочность и жесткость при растяжении и
сжатии»

РГР420300.190901.62.36.ПЗ

Выполнил

студент группы СОД.2-15-2

И. И. Иванов

Принял

ассистент каф. «ФМиП»

М. А. Дудаев

Иркутск, 2015 г.

Цель работы и исходные данные

Требуется:

- 1) Построить эпюру продольных сил;
- 2) Из расчета на прочность определить безопасные размеры круглого поперечного сечения ступеней стержня;
- 3) Построить эпюру нормальных напряжений;
- 4) Определить перемещение свободного конца стержня.

Заданные величины:

- 1) Расчетная схема (рисунок 1);
- 2) Материал – чугун;
- 3) Предел прочности на растяжение $\sigma_B^+ = 80$ МПа, предел прочности на сжатие $\sigma_B^- = 240$ МПа.
- 4) Модуль упругости материала $E = 1,5 \cdot 10^5$ МПа;
- 5) Коэффициент запаса прочности $[n] = 2$;
- 6) Длины силовых участков
 $l_1 = 0,7$ м; $l_2 = 0,4$ м; $l_3 = 0,8$ м; $l_4 = 1,0$ м;
- 7) Внешние силовые факторы

$$F_1 = 20 \text{ кН}; F_2 = 40 \text{ кН}; q = 80 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

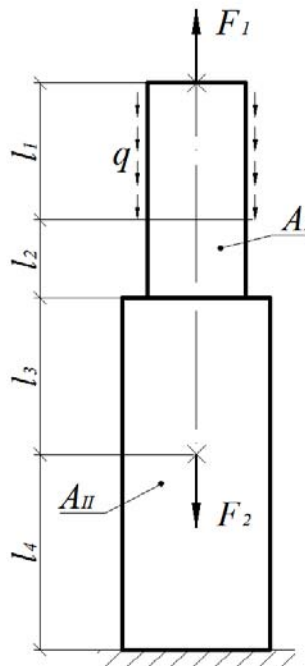


Рисунок 1

					РГР420300.190901.62.36.ПЗ			
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата				
Разраб.	Иванов				Расчет ступенчатого стержня на прочность и жесткость при растяжении и сжатии	Лит.	Лист	Листов
Пров.	Дудаев						2	9
Н. Контр.						Кафедра СОД Группа СОД 2-14-1		
Утв.								

1 Построение эпюры продольных сил

Эпюра продольных сил строится на основании выражений для продольной силы на каждом силовом участке. При составлении выражений рассматривается равновесие верхней (незакрепленной) части стержня, что позволяет не определять реакции опоры.

1-й участок (рисунок 2); $0 \leq z_1 \leq l_1$.

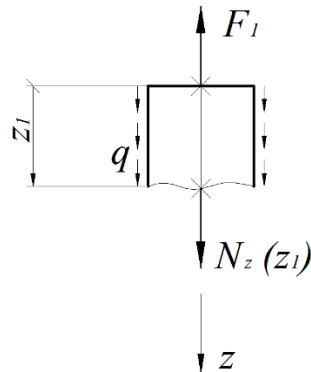


Рисунок 2

$$\sum F_z = N_z(z_1) + q \cdot z_1 - F_1 = 0;$$

$$N_z(z_1) = -q \cdot z_1 + F_1$$

– линейная зависимость; значения определяются в двух точках:

$$N_z(0) = F_1 = 20 \text{ кН} > 0 \Rightarrow \text{растяжение.}$$

$$N_z(l_1) = -q \cdot l_1 + F_1 = -80 \cdot 0,7 + 20 = -36 \text{ кН} < 0 \Rightarrow \text{сжатие.}$$

2-й участок (рисунок 3); $0 \leq z_2 \leq l_2$.

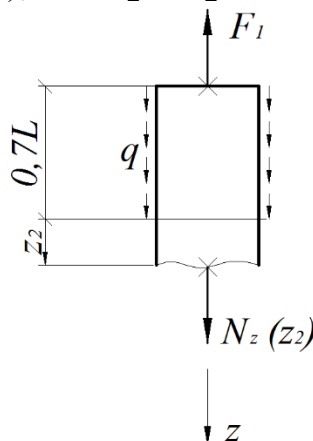


Рисунок 3

$$\sum F_z = N_z(z_2) + q \cdot l_1 - F_1 = 0;$$

$$N_z(z_2) = -q \cdot l_1 + F_1 = -80 \cdot 0,7 + 20 = -36 \text{ кН} = \text{const} < 0 \Rightarrow \text{сжатие.}$$

3-й участок (рисунок 4); $0 \leq z_3 \leq l_3$.

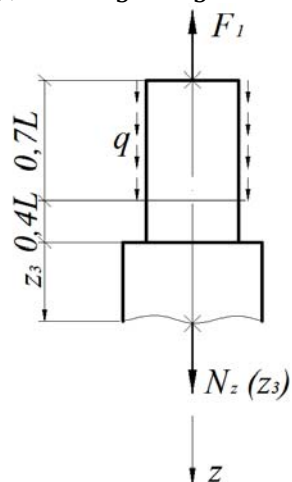


Рисунок 4

$$\sum F_z = N_z(z_3) + q \cdot 0,7L - F_1 = 0;$$

$$N_z(z_3) = -q \cdot l_1 + F_1 = -80 \cdot 0,7 + 20 = -36 \text{ кН} = \text{const} < 0 \Rightarrow \text{сжатие.}$$

4-й участок (рисунок 5); $0 \leq z_4 \leq l_4$.

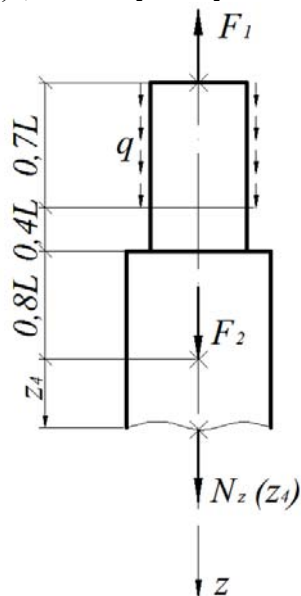


Рисунок 5

$$\sum F_z = N_z(z_4) + q \cdot 0,7L - F_1 + F_2 = 0;$$

$$N_z(z_4) = -F_2 - q \cdot l_1 + F_1 = -40 - 80 \cdot 0,7 + 20 = -76 \text{ кН} < 0 \Rightarrow \text{сжатие.}$$

На основании полученных значений строится эпюра продольной силы (рисунок 6).

2 Определение безопасных размеров круглого поперечного сечения ступеней стержня

Условие прочности при растяжении-сжатии

$$|\sigma^+|_{max} = \frac{|N_z^+|_{max}}{A} < [\sigma^+] = \frac{\sigma_B^+}{[n]}, \quad (1, a)$$

$$|\sigma^-|_{max} = \frac{|N_z^-|_{max}}{A} < [\sigma^-] = \frac{\sigma_B^-}{[n]}, \quad (1, б)$$

где $|\sigma^+|_{max}$ и $|\sigma^-|_{max}$ – максимальные по модулю действующие растягивающие и сжимающие напряжения соответственно, Па;
 $[\sigma^+]$ и $[\sigma^-]$ – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие соответственно, Па;
 $|N_z^+|_{max}$ и $|N_z^-|_{max}$ – максимальные по модулю растягивающие и сжимающие продольные силы соответственно (на каждой ступени), Н.

Потребные площади силовых участков, м², из условий прочности:

$$A_{тр\text{еб}}^+ \geq \frac{|N_z^+|_{max}}{[\sigma^+]}; \quad (2, a)$$

$$A_{тр\text{еб}}^- \geq \frac{|N_z^-|_{max}}{[\sigma^-]}. \quad (2, б)$$

Допускаемые напряжения (при $\sigma_B^+ = 80$ МПа и $\sigma_B^- = 240$ МПа):

$$[\sigma^+] = \frac{80 \cdot 10^6}{2} = 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа};$$

$$[\sigma^-] = \frac{240 \cdot 10^6}{2} = 120 \cdot 10^6 \text{ Па} = 120 \text{ МПа}.$$

Из эпюры продольных сил для I-ой ступени стержня (участки 1 и 2)

$$|N_z^+|_{max} = 20 \text{ кН} = 20000 \text{ Н}; \quad |N_z^-|_{max} = 36 \text{ кН} = 36000 \text{ Н}.$$

Тогда

$$A_{тр\text{еб } I}^+ \geq \frac{20000}{40 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_{тр\text{еб } I}^- \geq \frac{36000}{120 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Для выполнения обоих условий для ступени принимается наибольшая расчетная площадь

$$A_I = \max(A_{\text{треб } I}^+, A_{\text{треб } I}^-) = A_{\text{треб } I}^+ = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Из эпюры продольных сил для II-ой ступени стержня (участки 3 и 4)

$$|N_z^+|_{\max} = 0; |N_z^-|_{\max} = 76 \text{ кН} = 76000 \text{ Н}.$$

Тогда

$$A_{\text{треб } II}^+ \geq 0;$$

$$A_{\text{треб } II}^- \geq \frac{76000}{120 \cdot 10^6} = 6,333 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Для выполнения обоих условий для ступени принимается наибольшая расчетная площадь

$$A_{II} = \max(A_{\text{треб } II}^+, A_{\text{треб } II}^-) = A_{\text{треб } II}^- = 6,333 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Диаметр ступени, м, вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}. \quad (3)$$

Тогда

$$d_I = \sqrt{\frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 0,0252 \text{ м} = 25,2 \text{ мм};$$

$$d_{II} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6,333 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 0,0284 \text{ м} = 28,4 \text{ мм}.$$

Таким образом, необходимые размеры поперечных сечений определены.

					РГР420300.190901.62.36.ПЗ	Лист
						6
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		

3 Определение действующих напряжений

Действующее напряжение определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N_z}{A}, \quad (4)$$

где продольные силы N_z берутся со своими знаками с эпюры.

1-й участок; $0 \leq z_1 \leq l_1$.

$$N_z(z_1) = -q \cdot z_1 + F_1; A_1 = A_I.$$
$$\sigma(z_1) = \frac{-q \cdot z_1 + F_1}{A_I}$$

– линейная зависимость; значения определяются в двух точках:

$$\sigma(0) = \frac{N_z(0)}{A_I} = \frac{20000}{5 \cdot 10^{-4}} = 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа};$$
$$\sigma(l_1) = \frac{N_z(l_1)}{A_I} = \frac{-36000}{5 \cdot 10^{-4}} = -72 \cdot 10^6 \text{ Па} = -72 \text{ МПа}.$$

2-й участок; $0 \leq z_2 \leq l_2$.

$$N_z(z_2) = -36 \text{ кН} = \text{const}; A_2 = A_I.$$
$$\sigma(z_2) = \frac{N_z(z_2)}{A_I} = \frac{-36000}{5 \cdot 10^{-4}} = -72 \cdot 10^6 \text{ Па} = -72 \text{ МПа} = \text{const}.$$

3-й участок; $0 \leq z_3 \leq l_3$.

$$N_z(z_3) = -36 \text{ кН} = \text{const}; A_3 = A_{II}.$$
$$\sigma(z_3) = \frac{N_z(z_3)}{A_{II}} = \frac{-36000}{6,333 \cdot 10^{-4}} = -56,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = -56,8 \text{ МПа} = \text{const}.$$

4-й участок; $0 \leq z_4 \leq l_4$.

$$N_z(z_4) = -76 \text{ кН} = \text{const}; A_4 = A_{II}.$$
$$\sigma(z_4) = \frac{N_z(z_4)}{A_{II}} = \frac{-76000}{6,333 \cdot 10^{-4}} = -120 \cdot 10^6 \text{ Па} = -120 \text{ МПа} = \text{const}.$$

На основании вычисленных значений строится эпюра действующих напряжений (рисунок 6).

4 Построение эпюры перемещений сечений стержня

Построение эпюры перемещений начинается от заделки (сечение А-А), поскольку заведомо известно

$$\delta_{A-A} = 0.$$

Перемещение сечения Б-Б

$$\delta_{B-B} = \delta_{A-A} + \Delta l_4,$$

где Δl_4 – абсолютное удлинение 4-го силового участка ($N_z(z_4) = const$):

$$\Delta l_4 = \frac{N_z(z_4) \cdot l_4}{EA_{II}} = \frac{-76000 \cdot 1,0}{1,5 \cdot 10^{11} \cdot 6,333 \cdot 10^{-4}} = -8,0 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,8 \text{ мм} < 0 \Rightarrow$$

участок 4 укорачивается.

$$\delta_{B-B} = 0 - 8,0 \cdot 10^{-4} = -8,0 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,8 \text{ мм} < 0 \Rightarrow,$$

сечение Б-Б перемещается к заделке (вниз).

Перемещение сечения В-В

$$\delta_{B-B} = \delta_{B-B} + \Delta l_3,$$

где Δl_3 – абсолютное удлинение 3-го силового участка ($N_z(z_3) = const$):

$$\Delta l_3 = \frac{N_z(z_3) \cdot l_3}{EA_{II}} = \frac{-36000 \cdot 0,8}{1,5 \cdot 10^{11} \cdot 6,333 \cdot 10^{-4}} = -3,03 \cdot 10^{-4} \text{ м} = \\ = -0,303 \text{ мм} < 0 \Rightarrow$$

участок 3 укорачивается.

$$\delta_{B-B} = -8,0 \cdot 10^{-4} - 3,03 \cdot 10^{-4} = -11,03 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1,03 \text{ мм} < 0 \Rightarrow,$$

сечение В-В перемещается к заделке (вниз).

Перемещение сечения Г-Г

$$\delta_{\Gamma-\Gamma} = \delta_{B-B} + \Delta l_2,$$

где Δl_2 – абсолютное удлинение 2-го силового участка ($N_z(z_2) = const$):

$$\Delta l_2 = \frac{N_z(z_2) \cdot l_2}{EA_I} = \frac{-36000 \cdot 0,4}{1,5 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = -1,92 \cdot 10^{-4} \text{ м} =$$

					РГР420300.190901.62.36.ПЗ	Лист
						8
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		

$$= -0,192 \text{ мм} < 0 \Rightarrow$$

участок 2 укорачивается.

$$\delta_{\Gamma-\Gamma} = -11,03 \cdot 10^{-4} - 1,92 \cdot 10^{-4} = -12,95 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1,295 \text{ мм} < 0 \Rightarrow,$$

сечение Г-Г перемещается к заделке (вниз).

Перемещение сечения Д-Д

$$\delta_{\text{Е-Е}} = \delta_{\Gamma-\Gamma} + \Delta l_1.$$

При определении удлинений на 1-ом участке $N_z(z_1) \neq \text{const}$ и удлинение определяется интегралом

$$\Delta l_1 = \frac{1}{EA_I} \int_l N_z(z_1) dz_1;$$

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{1}{EA_I} \int_0^{l_1} (-q \cdot z_1 + F_1) dz_1 = \frac{1}{EA_I} (-0,5qz_1^2 + F_1z_1) = \\ &= \frac{1}{EA_1} \cdot [-0,5ql_1^2 + F_1l_1] = \frac{10^3}{1,5 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \cdot [-0,5 \cdot 80 \cdot 0,7^2 + 20 \cdot 0,7] = \\ &= -0,75 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,075 \text{ мм} > 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

участок 1 укорачивается.

$$\delta_{\text{Д-Д}} = -12,95 \cdot 10^{-4} - 0,75 \cdot 10^{-4} = -13,7 \cdot 10^{-4} = -1,37 \text{ мм} < 0 \Rightarrow$$

сечение Д-Д перемещается к заделке (вниз).

Для построения эпюры нелинейной функции вычисляется перемещение в промежуточном сечении Е-Е

$$\delta_{\text{Е-Е}} = \delta_{\Gamma-\Gamma} + \frac{1}{EA_I} \int_{0,5l_1}^{l_1} N_z(z_1) dz_1.$$

Удлинение нижней половины участка 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{EA_1} \int_{0,5l_1}^{l_1} N_z(z_1) dz_1 &= \frac{1}{EA_1} \cdot (-0,5qz_1^2 + F_1z_1) \Big|_{0,5l_1}^{l_1} = \\ &= \frac{1}{EA_1} \cdot [(-0,5ql_1^2 + F_1l_1) - (-0,5q \cdot (0,5l_1)^2 + F_1 \cdot 0,5l_1)] = \\ &= \frac{1}{EA_1} \cdot [-0,375ql_1^2 + 0,5F_1l_1] = \end{aligned}$$

$$= \frac{10^3}{1,5 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \cdot [-0,375 \cdot 80 \cdot 0,7^2 + 0,5 \cdot 20 \cdot 0,7] =$$

$$= -1,03 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,103 \text{ мм} < 0 \Rightarrow$$

нижняя часть участка 1 укорачивается.

$$\delta_{E-E} = -12,95 \cdot 10^{-4} - 1,03 \cdot 10^{-4} = -13,98 \cdot 10^{-4} = -1,398 \text{ мм} < 0 \Rightarrow$$

сечение Е-Е перемещается к заделке (вниз).

На основании рассчитанных значений строится эпюра перемещений сечений стержня (рисунок 6).

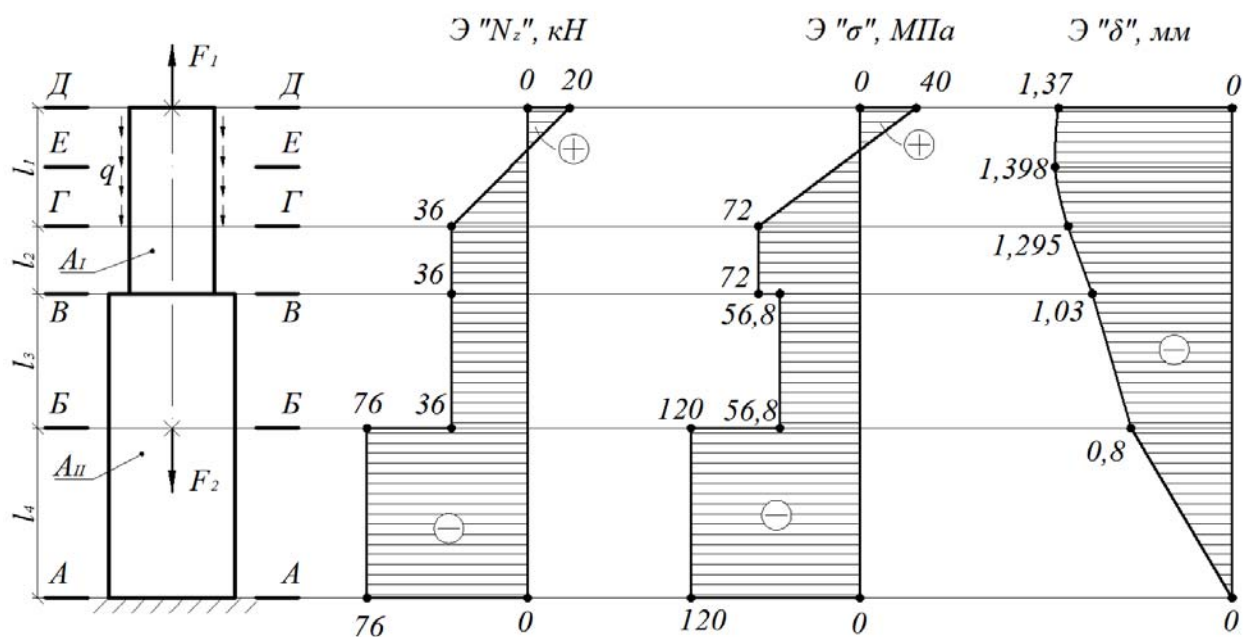


Рисунок 6